

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ G-СЕТИ С МНОГОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С КОНТРОЛЬНЫМИ И КВАРАНТИННЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ

Д.Я. Копать

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы*

## ASYMPTOTIC ANALYSIS OF G-NETWORK WITH MANY-LINES SYSTEMS WITH CONTROL AND QUARANTINE QUEUES

D.Y. Kopats

*Yanka Kupala State University of Grodno*

**Аннотация.** Предложен метод нахождения средних характеристик и их дисперсий для G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями в случае большого, но ограниченного числа функционирующих в ней заявок. Данная сеть является математической моделью информационно-телекоммуникационных систем и сетей, состоящей из многопроцессорных устройств с установленным на каждом из них антивирусным программным обеспечением в случае большой нагрузки сети.

**Ключевые слова:** G-сеть, контрольная и карантинные очереди, асимптотический анализ, антивирусное программное обеспечение.

**Для цитирования:** Копать, Д.Я. Асимптотический анализ G-сети с многолинейными системами с контрольными и карантинными очередями / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 48–55. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_3\\_56\\_48](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48). – EDN: JQKVQE

**Abstract.** A method for finding average characteristics and their variances for a G-network in systems with control and quarantine queues in case of a big but limited number of customers in network is proposed. This network is a mathematical model of informational systems and networks, which consists of multiprocessor devices with antivirus software installed on each of them in case of heavy load in the network.

**Keywords:** G-network, control and quarantine queues, asymptotic analysis, antivirus software.

**For citation:** Kopats, D.Y. Asymptotic analysis of G-network with many-lines systems with control and quarantine queues / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 48–55. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_3\\_56\\_48](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48) (in Russian). – EDN: JQKVQE

### Введение

Несмотря на тот факт, что модель функционирования информационно-телекоммуникационной сети (ИТС) с возможностью попадания на каждое устройство которой компьютерных вирусов исследовалась в работе [1], первая стохастическая модель функционирования ИТС, с установленным антивирусным программным обеспечением (АПО), рассматривалась в работе [2] спустя около 20 лет после опубликования работы [1]. В работах [3]–[4] состоялось объединение этих сетей с возможностью нахождения заявки в карантине в каждой системе сети массового обслуживания (СМО) без выделения для этих целей отдельной СМО. В работе [3] данная сеть исследовалась методом многомерных производящих функций, а в работе [4] методом последовательных приближений, совмещенного с методом рядов. В работе [5] данная модель обобщилась на случай, когда вирус, уничтожив один пользовательский запрос, мог переходить в другие системы до тех пор, пока не был обнаружен

АПО. Но в данных работах не учитывался тот факт, что большинство современных устройств являются многопроцессорными и в них может параллельно происходить обработка нескольких пользовательских запросов. В данной работе будет происходить обобщение моделей, предложенных в работе [5] на случай наличия в ИТС многопроцессорных устройств.

### 1 Описание сети

Рассмотрим G-сеть [1], состоящую из  $n$  СМО, в каждой из которых функционируют  $m_i + 2, i = \overline{1, n}$  линий обслуживания (ЛО). Поступающие в каждую СМО потоки положительных (неопасный запрос) и отрицательных заявок (вредоносный запрос) являются простейшими с интенсивностями соответственно  $\lambda_{0i}^+, \lambda_{0i}^-, i = \overline{1, n}$ . Для предотвращения заражения ИТС поступившая в  $i$ -ю СМО заявка первоначально становится в контрольную очередь, которая физически представляет собой место RAM, отведенное для антивирусного ПО, где проверяется на

стандартность, т. е. на наличие вируса в течении времени, имеющего показательное распределение с параметром  $\mu_i^{(v)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Количество ЛО в контрольной очереди равно единице. Пусть вероятность успешной проверки на стандартность положительной заявки равна  $p_i^+$  и тогда она поступает в очередь на обслуживание в этой СМО, а с противоположной вероятностью  $1 - p_i^+$  будет признана отрицательной и отправится в карантин на лечение. Вероятность успешного опознания отрицательной заявки в контрольной очереди СМО  $S_i$  равна  $p_i^-$ . Тогда отрицательная заявка и переходит в карантинную очередь на лечение, а с вероятностью  $1 - p_i^-$  может она ошибочно быть признана положительной из-за технических сложностей, таких как не обновления антивирусных БД. Тогда она поступит в очередь на обработку, где она немедленно уничтожает 1 положительную заявку в непустой системе, после чего с вероятностью  $n_{i0}$  покидает сеть или с вероятностью  $n_{ij}$  переходит в контрольную очередь  $j$ -й СМО,  $\sum_{j=0}^n n_{ij} = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В пустой системе

отрицательная заявка не производит никакого воздействия. Пусть длительности обслуживания положительных заявок в СМО  $S_i$  одной ЛО имеют экспоненциальную ф.р. с параметром  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , по завершении которого с вероятностью  $p_{ij}^+$  переходит в контрольную очередь СМО  $S_j$  как положительная заявка, с вероятностью  $p_{ij}^-$  как отрицательная, зараженный во время обслуживания резидентными вирусами и с вероятностью  $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$  покидает сеть,  $i, j = \overline{1, n}$ .

В карантине, которая в ИТС является папкой файлов, помещенных на карантин, заявки, признанные нестандартными, становятся в очередь на лечение. Предположим, что длительность лечения заявки в  $i$ -м узле имеет экспоненциальную ф.р. с параметром  $\mu_i^{(c)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Если лечение успешное, то заявка с вероятностью  $p_i^{(s)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  переходит в очередь на обработку в  $i$ -й СМО, в противном случае с вероятностью  $1 - p_i^{(s)}$  зараженная заявка оказывается вирусом и удаляется, т. е. покидает сеть. В этом описании карантина мы предполагаем, что вирус не может обмануть его при его лечении.

Состояние сети описывается вектором:

$$(\bar{k}, \bar{l}, t) = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n; t), \quad (1.1)$$

где  $(\bar{k}_i, \bar{l}_i, t) = (k_i^{(p)}; k_i^{(s)}; l_i^{(n)}; l_i^{(c)}; t)$ ,  $k_i^{(p)}$ ,  $l_i^{(n)}$  – соответственно число положительных и отрицательных

заявок, находящихся в контрольной очереди;  $k_i^{(s)}$  – количество положительных заявок на обслуживании;  $l_i^{(c)}$  – количество заявок на карантине. Пусть заявки выбираются на проверку на стандартность из очереди случайным образом. Тогда вероятность того, что будет проверена на стандартность положительная заявка в режиме насыщения равна

$$q_i^+ = \left( \lambda_{0i}^+ + \sum_{j=1}^n \mu_j p_{ji}^+ \right) \left( \lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \mu_j (p_{ji}^+ + p_{ji}^-) \right)^{-1}.$$

В [6] данный коэффициент представлен в стационарном режиме.

Пусть вектор  $\tilde{I}_\alpha$  – вектор размерности  $2n$ , состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером  $\alpha$ , которая равна 1. Возможны следующие переходы нашего случайного марковского процесса в состоянии  $(\bar{k}, \bar{l}, t + \Delta t)$  за время  $\Delta t$ :

1) из состояния  $(\bar{k} - \tilde{I}_{2i-1}, \bar{l}, t)$  с вероятностью  $\lambda_{0i}^+ u(k_i^{(p)}) \Delta t + o(\Delta t)$  в контрольную очередь  $i$ -й СМО извне за время  $\Delta t$  поступит положительная заявка  $i = \overline{1, n}$ ;

2) из состояния  $(\bar{k}, \bar{l} - \tilde{I}_{2i-1}, t)$  в контрольную очередь  $i$ -й СМО за время  $\Delta t$  извне поступит отрицательная заявка с вероятностью  $\lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

3) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}, \bar{l}, t)$  с вероятностью  $\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  положительная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -й СМО будет признана таковой и перейдет в очередь для обслуживания;

4) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i-1}, \bar{l} - \tilde{I}_{2i}, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  с вероятностью  $\mu_i^{(v)} q_i^+ (1 - p_i^+) u(l_i^{(c)}) \Delta t + o(\Delta t)$  положительная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -й СМО будет признана отрицательной и перейдет в карантин для лечения;

5) из состояния  $(\bar{k}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}, t)$  с вероятностью  $\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) p_i^- u(l_i^{(c)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  отрицательная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -й СМО будет признана отрицательной и перейдет в карантин для лечения;

6) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1}, t)$  с вероятностью  $\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(k_i^{(s)}) n_{i0} \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  отрицательная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -той СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, уйдя из сети;

7) из состояния  $(\bar{k}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1}, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$   
 $\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) \left(1 - u(k_i^{(s)})\right) n_{i0} \Delta t + o(\Delta t)$  отрицательная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и уйдет из сети;

8) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2j-1}, t)$  с вероятностью

$$\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) u(k_i^{(s)}) n_{ij} u(l_j^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t),$$

$i = \overline{1, n}$  отрицательная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, перейдя в контрольную очередь  $j$ -й СМО;

9) из состояния  $(\bar{k}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1}, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$

$$\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) \left(1 - u(k_i^{(s)})\right) n_{ij} u(l_j^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t)$$

отрицательная заявка после проверки на стандартность в  $i$ -ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и перейдет в контрольную очередь  $j$ -ой СМО;

10) из состояния  $(\bar{k} - \tilde{I}_{2i}, \bar{l} + I_{2i}, t)$  с вероятностью  $\mu_i^{(c)} p_i^{(s)} u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  карантинному узлу  $i$ -ой СМО удастся вылечить зараженную заявку и она отправляется в очередь на обслуживание в  $i$ -ую СМО;

11) из состояния  $(\bar{k}, \bar{l} + \tilde{I}_{2i}, t)$  с вероятностью  $\mu_i^{(c)}(1 - p_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  карантинному узлу не удастся вылечить зараженную заявку и он покидает сеть, не принеся ей вреда;

12) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i} - \tilde{I}_{2j-1}, \bar{l}, t)$  с вероятностью  $\mu_i \min(k_i + 1, m_i) p_{ij}^+ u(k_j^{(p)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  время обслуживания заявки в  $i$ -й СМО закончилось и он направится в контрольную очередь  $j$ -ой СМО снова как положительная заявка;

13) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}, \bar{l} - \tilde{I}_{2j-1}, t)$  с вероятностью  $\mu_i \min(k_i + 1, m_i) p_{ij}^- u(l_j^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  время обслуживания заявки в  $i$ -ой СМО закончилось и она направляется в контрольную очередь  $j$ -ой СМО как отрицательная заявка;

14) из состояния  $(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}, \bar{l}, t)$  с вероятностью  $\mu_i \min(k_i + 1, m_i) p_{i0} \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ; время обслуживания файла в  $i$ -ой СМО закончилось, она и уходит из сети;

15) из состояния  $(\bar{k}, \bar{l}, t)$  с вероятностью

$$1 - \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{0i}^+ u(k_i^{(p)}) + \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) + \mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) n_{i0} + \mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) \sum_{j=1}^n n_{ij} u(l_j^{(n)}) + \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(k_i^{(s)}) + \mu_i^{(v)}(q_i^+(1 - p_i^+) + (1 - q_i^+) p_i^-) u(l_i^{(c)}) + \mu_i^{(c)}(p_i^{(s)} u(k_i^{(s)}) + (1 - p_i^{(s)})) + \mu_i \min(k_i + 1, m_i) \times \left(1 - \sum_{j=1}^n p_{ij}^+ (1 - u(k_j^{(p)})) + p_{ij}^- (1 - u(l_j^{(n)})) \right) \right] \Delta t + o(\Delta t).$$

С помощью формулы полной вероятности, в которой, перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , можно показать, что нестационарные вероятности состояний удовлетворяют следующей системе РДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\bar{k}, \bar{l}, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_{0i}^+ u(k_i^{(p)}) + \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) + \mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) n_{i0} + \mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) \times \right. \\ & \times \sum_{j=1}^n n_{ij} u(l_j^{(n)}) + \mu_i^{(v)}(q_i^+(1 - p_i^+) + (1 - q_i^+) p_i^-) u(l_i^{(c)}) + \mu_i^{(c)}(p_i^{(s)} u(k_i^{(s)}) + (1 - p_i^{(s)})) + \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(k_i^{(s)}) + \\ & \left. + \mu_i \left(1 - \sum_{j=1}^n p_{ij}^+ (1 - u(k_j^{(p)})) + p_{ij}^- (1 - u(l_j^{(n)})) \right) \right\} P(\bar{k}, \bar{l}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{0i}^+ u(k_i^{(p)}) P(\bar{k} - \tilde{I}_{2i-1}; \bar{l}; t) + \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) P(\bar{k}; \bar{l} - \tilde{I}_{2i-1}; t) + \right. \\ & + (\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(k_i^{(s)})) P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}; \bar{l}; t) + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} u(k_i^{(s)}) P(\bar{k} - \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i}; t) + \\ & + \mu_i^{(v)} q_i^+ (1 - p_i^+) u(l_i^{(c)}) P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i-1}; \bar{l} - \tilde{I}_{2i}; t) + \mu_i^{(v)}(1 - q_i^+) p_i^- u(l_i^{(c)}) P(\bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}; t) + \\ & + (\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) n_{i0} u(k_i^{(s)})) P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1}; t) + (\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) n_{i0} (1 - u(k_i^{(s)}))) P(\bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1}; t) + \\ & + \sum_{j=1}^n \left\{ (\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) u(k_i^{(s)})) n_{ij} \times P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2j-1}; t) + \right. \\ & + (\mu_i^{(v)}(1 - q_i^+)(1 - p_i^-) (1 - u(k_i^{(s)}))) n_{ij} \times P(\bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2j-1}; t) \left. \right\} + \\ & + (\mu_i^{(c)}(1 - p_i^{(s)})) P(\bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i}; t) \left. \right] + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \min(k_i + 1, m_i) \left[ p_{i0} P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l}; t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p_{ij}^+ u(k_j^{(p)}) P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i} - \tilde{I}_{2j-1}; \bar{l}; t) + \\
 &+ p_{ij}^- u(l_j^{(n)}) P(\bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} - \tilde{I}_{2j-1}; t) \Big]. \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

## 2 Уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка

Решение РДУ Колмогорова (1.2) будем искать в случае, когда число линий обслуживания, общее количество положительных заявок в контрольной, карантинных и обслуживающих очередях не превосходит величины  $K \gg 1$ . Пусть  $x_i^{(p)} = k_i^{(p)} K^{-1}$ ,  $x_i^{(s)} = k_i^{(s)} K^{-1}$ ,  $z_i^{(n)} = l_i^{(n)} K^{-1}$ ,  $z_i^{(c)} = l_i^{(c)} K^{-1}$ . Введём в рассмотрение вектор относительных переменных  $(\bar{x}, \bar{z}^-, t) = (x_1^{(p)}, x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(p)}, x_n^{(s)}, z_1^{(n)}, z_1^{(c)}, \dots, z_n^{(n)}, z_n^{(c)}, t)$ . В этом случае возможные значения этого вектора при фиксированном  $t$  принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$\begin{aligned}
 G = &\left\{ (\bar{x}, \bar{z}^-) : (x_1^{(p)}, x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(p)}, \right. \\
 &x_n^{(s)}, z_1^{(n)}, z_1^{(c)}, \dots, z_n^{(n)}, z_n^{(c)}) , x_i^{(p)}, x_i^{(s)}, z_i^{(n)}, z_i^{(c)} \geq 0, \\
 &\left. i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i^{(p)} \leq 1, \sum_{i=1}^n x_i^{(s)} \leq 1, \sum_{i=1}^n z_i^{(n)} \leq 1, \sum_{i=1}^n z_i^{(c)} \leq 1 \right\},
 \end{aligned}$$

в котором они располагаются в узлах  $4n$ -мерной решетки на расстоянии  $\varepsilon = K^{-1}$  друг от друга. При увеличении  $K$  «плотность заполнения» множества  $G$  возможными компонентами вектора  $(x, \bar{z}^-, t)$  увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью вероятностей  $p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)$ , причем  $K^{4n} P(\bar{k}, \bar{l}, t) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)$ . Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией функции  $P(\bar{k}, \bar{l}, t)$ , применив соотношение

$$K^{4n} P(\bar{k}, \bar{l}, t) = K^{4n} P(\bar{y}K, \bar{x}K, \bar{z}^- K, t) = p(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}^-, t),$$

$(\bar{x}, \bar{z}^-, t) \in G$ . Обозначим  $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon \tilde{l}_i, i = \overline{1, 2n}$ . Полагая, что  $p(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}^-, t)$  является однородными функциями первого порядка и дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, исходя из (1.2) получаем уравнения для плотности распределения вероятностей состояний

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)}{\partial t} = &-\sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_{0i}^+ u(x_i^{(p)}) + \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) + \right. \\
 &+ \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) \times \\
 &\times \sum_{j=1}^n n_{ij} u(z_j^{(n)}) + \mu_i^{(v)} (q_i^+ (1 - p_i^+) + (1 - q_i^+) p_i^-) u(l_i^{(c)}) + \\
 &\left. + \mu_i^{(c)} (p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) + (1 - p_i^{(s)})) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) + \\
 &+ \mu_i \left( 1 - \sum_{j=1}^n p_{ij}^+ (1 - u(x_j^{(p)})) + p_{ij}^- (1 - u(z_j^{(n)})) \right) \Big] \times \\
 &\times p(\bar{x}, \bar{z}^-, t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{0i}^+ u(x_i^{(p)}) p(\bar{x} - \tilde{\varepsilon}_{2i-1}, \bar{z}^-; t) + \right. \\
 &+ \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) p(\bar{x}; \bar{z}^- - \tilde{\varepsilon}_{2i-1}; t) + \\
 &+ (\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)})) p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^-; t) + \\
 &+ \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) p(\bar{x} - \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i}; t) + \\
 &+ \mu_i^{(v)} q_i^+ (1 - p_i^+) u(z_i^{(c)}) p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i-1}, \bar{z}^- - \tilde{\varepsilon}_{2i}; t) + \\
 &+ \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)}) p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2i}; t) + \\
 &+ (\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} u(x_i^{(s)})) p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1}; t) + \\
 &+ (\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} (1 - u(x_i^{(s)}))) p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1}; t) + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \left\{ (\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} \times \right. \\
 &\times p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}; t) + \\
 &+ (\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) (1 - u(x_i^{(s)}))) n_{ij} \times \\
 &\times p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}; t) \Big\} + \\
 &+ (\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)})) p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i}; t) \Big] + \\
 &+ K \sum_{i,j=1}^n \mu_i \min(x_i, l_j) \left[ p_{i0} p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^-; t) + \right. \\
 &+ p_{ij}^+ u(x_j^{(p)}) p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i} - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}, \bar{z}^-; t) + \\
 &\left. + p_{ij}^- p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}; t) \right]. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Полагая, что  $p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)$  дифференцируема по  $t$  и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема по  $x_i, z_i, i = \overline{1, 4n}$ , разложим функции

$$\begin{aligned}
 &p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i} - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}, \bar{z}^-; t), \\
 &p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}; t), p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i}; t), \\
 &p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^-; t), p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}; t), \\
 &p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2j-1}; t), \\
 &p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1}; t), p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1}; t), \\
 &p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2j}, \bar{z}^-; t), p(\bar{x} - \tilde{\varepsilon}_{2i}, \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i}; t), \\
 &p(\bar{x}; \bar{z}^- + \tilde{\varepsilon}_{2i-1} - \tilde{\varepsilon}_{2j}; t), p(\bar{x} + \tilde{\varepsilon}_{2i-1}, \bar{z}^- - \tilde{\varepsilon}_{2j}; t) \\
 &p(\bar{x} - \tilde{\varepsilon}_{2i-1}, \bar{z}^-; t), p(\bar{x}; \bar{z}^- - \tilde{\varepsilon}_{2i-1}; t)
 \end{aligned}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\bar{x}, \bar{z}^-, t)$ , используя члены до второго порядка включительно:



Учитывая данные соотношения, уравнение (2.1) представимо в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)}{\partial t} = \\ & = \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{0i}^+ u(x_i^{(p)}) \left( -\varepsilon \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i-1}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i-1}^2} \right) + \right. \\ & + \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) \left( -\varepsilon \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}^2} \right) + \\ & + \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i-1}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i-1}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i} \partial x_{2i-1}} \right) \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i}^2} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i} \partial x_{2i}} \right) \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(v)} q_i^+ (1-p_i^+) u(z_i^{(c)}) \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i-1}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i}^2} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i-1}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i} \partial x_{2i-1}} \right) \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(v)} (1-q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)}) \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i} \partial z_{2j-1}} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}^2} \right) \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(v)} (1-q_i^+) (1-p_i^-) n_{i0} u(x_i^{(s)}) \times \\ & \times \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} + \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}^2} + 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i} \partial z_{2i-1}} \right) \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(v)} (1-q_i^+) (1-p_i^-) n_{i0} (1-u(x_i^{(s)})) \times \\ & \times \left( \varepsilon \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}^2} \right) \left. \right) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left[ \mu_i^{(v)} (1-q_i^+) (1-p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} \times \right. \\ & \times \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} + \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1} \partial z_{2j-1}} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}^2} + \right. \\ & + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} + 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1} \partial x_{2i}} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i} \partial z_{2j-1}} \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(v)} (1-q_i^+) (1-p_i^-) (1-u(x_i^{(s)})) n_{ij} \times \\ & \times \left( \varepsilon \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1} \partial x_{2j-1}} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}^2} \right) \left. \right) + \\ & + \mu_i^{(c)} (1-p_i^{(s)}) \left( \varepsilon \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2i-1}^2} \right) + \\ & + \mu_i \min(x_i, l_i) p_{i0} \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} \right) + \\ & + \mu_i \min(x_i, l_i) \times \\ & \times \sum_{i,j=1}^n \left[ p_{ij}^+ u(x_j^{(p)}) \left( \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2j-1}} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i} \partial x_{2j-1}} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2j-1}^2} \right) \left. \right) + \\ & + p_{ij}^- \left( \left( \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}} - \frac{\partial p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}} \right) + \right. \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i}^2} - 2 \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial x_{2i} \partial z_{2j-1}} + \frac{\partial^2 p(\bar{x}; \bar{z}^-; t)}{\partial z_{2j-1}^2} \right) \left. \right). \end{aligned}$$

**Теорема 2.1.** В асимптотическом случае при достаточно больших  $K$  плотность распределения  $p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)$  вектора относительных переменных  $(\bar{x}, \bar{z}^-, t) = (x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}, x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}, z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}, z_1^{(c)}, \dots, z_n^{(c)}, t)$  удовлетворяет с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon = K^{-1}$ , уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=0}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^-) p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)) - \\ & - \sum_{i=0}^{2n} \frac{\partial}{\partial z_i} (A_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=0}^{2n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^-) p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (B_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=0}^{2n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (B_{ij}^{(3)}(\bar{x}, \bar{z}^-) p(\bar{x}, \bar{z}^-, t)), \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= \lambda_{0i}^+ \varepsilon u(x_i^{(p)}) - \\ &- \mu_i^{(v)} \varepsilon q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) - \mu_i^{(v)} \varepsilon q_i^+ (1 - p_i^+) u(z_i^{(c)}) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \mu_j \min(x_j, l_j) p_{ji}^+ u(x_i^{(p)}), \quad i = 2k - 1, k = \overline{1, n}, \\ A_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= \mu_i^{(v)} \varepsilon q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) + \mu_i^{(c)} \varepsilon p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) - \\ &- \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} \varepsilon u(x_i^{(s)}) - \mu_i \min(x_i, l_i) p_{i0} - \\ &- \sum_{j=1}^n \left[ \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} - \right. \\ &\left. - \mu_i \min(x_i, l_i) (p_{ij}^+ u(x_j^{(p)}) + p_{ij}^-) \right], \quad i = 2k, k = \overline{1, n}. \\ A_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= \lambda_{0i}^- \varepsilon u(l_i^{(n)}) - \mu_i^{(v)} \varepsilon (1 - q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)}) - \\ &- \mu_i^{(v)} \varepsilon (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} u(x_i^{(s)}) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[ -\mu_i^{(v)} \varepsilon (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} + \right. \\ &\left. + \mu_j^{(v)} \varepsilon (1 - q_j^+) (1 - p_j^-) n_{ji} + \mu_j \min(x_j, l_j) p_{ji}^- \right], \\ &\quad i = 2k - 1, k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= \mu_i^{(v)} \varepsilon (q_i^+ (1 - p_i^+) u(z_i^{(c)}) + \\ &+ (1 - q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)})) - \mu_i^{(c)} \varepsilon p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) - \\ &- (\mu_i^{(c)} \varepsilon (1 - p_i^{(s)})), \quad i = 2k, k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= -n^{-1} (\lambda_{0i}^+ \varepsilon u(x_i^{(p)}) + \\ &+ \mu_i^{(v)} \varepsilon q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) + \mu_i^{(v)} \varepsilon q_i^+ (1 - p_i^+) u(z_i^{(c)})) - \\ &- \mu_j \min(x_j, l_j) p_{ji}^+ u(x_i^{(p)}), \quad i = j = 2k - 1, \\ &\quad k = \overline{1, n}, \quad B_{ij}^{(1)}(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}) = 0, \quad i \neq j, l = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}) &= \\ &= n^{-1} \left( -\mu_i^{(v)} \varepsilon q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) - \mu_i^{(c)} \varepsilon p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} \varepsilon u(x_i^{(s)}) + \mu_i \min(x_i, l_i) p_{i0} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i \min(x_i, l_i) (p_{ij}^+ u(x_j^{(p)}) + p_{ij}^-) \right), \quad i = j = 2k, k = \overline{1, n}. \\ B_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= -n^{-1} \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(x_i^{(s)}) - \mu_i \min(x_i, l_i) p_{ij}^+, \\ &\quad i = 2k, j = 2l + 1, k, l = \overline{1, n}, \\ B_{ii}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= n^{-1} \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) (1 - u(x_i^{(s)})) n_{ii}, \\ &\quad i, j = 2k - 1, k = \overline{1, n}. \\ B_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= n^{-1} \mu_i^{(v)} q_i^+ (1 - p_i^+) u(z_i^{(c)}), \end{aligned}$$

$$i = 2k, j = 2l - 1, k, l = \overline{1, n}.$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} + \\ &+ \mu_i \min(x_i, l_i) p_{ij}^+ + n^{-1} \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} u(x_i^{(s)}), \end{aligned}$$

$$i = 2k - 1, j = 2l, k, l = \overline{1, n}.$$

$$B_{ij}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}^-) = n^{-1} \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}),$$

$$i = 2k, j = 2l, k, l = \overline{1, n}.$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(3)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= \\ &= n^{-1} \left( -\lambda_{0i}^- \varepsilon u(l_i^{(n)}) + \mu_i^{(v)} \varepsilon (1 - q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)}) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i^{(v)} \varepsilon (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} u(x_i^{(s)}) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_i^{(v)} \varepsilon (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(x_i^{(s)}) n_{ij} - \right. \\ &\quad \left. - \mu_j^{(v)} \varepsilon (1 - q_j^+) (1 - p_j^-) n_{ji} - \mu_j \min(x_j, l_j) p_{ji}^- \right), \\ &\quad i = 2k - 1, k = \overline{1, n}, \\ B_{ij}^{(3)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= n^{-1} \left( \mu_i^{(v)} \varepsilon (q_i^+ (1 - p_i^+) u(z_i^{(c)}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)})) - \mu_i^{(c)} \varepsilon p_i^{(s)} u(x_i^{(s)}) \right), \\ B_{ij}^{(3)}(\bar{x}, \bar{z}^-) &= -n^{-1} \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) p_i^- u(z_i^{(c)}), \\ &\quad i = 2k, j = 2l - 1, k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть

$$\begin{aligned} N_i^{(p)}(t) &= M \{k_i^{(p)}(t)\}, \quad L_i^{(c)}(t) = M \{l_i^{(c)}(t)\}, \\ N_i^{(s)}(t) &= M \{k_i^{(s)}(t)\}, \quad L_i^{(n)}(t) = M \{l_i^{(n)}(t)\} \end{aligned}$$

и введем средние относительные характеристики

$$\begin{aligned} n_i^{(p)}(t) &= N_i^{(p)}(t) K^{-1}, \quad Z_i^{(c)}(t) = L_i^{(c)}(t) K^{-1}, \\ n_i^{(s)}(t) &= N_i^{(s)}(t) K^{-1}, \quad Z_i^{(n)}(t) = L_i^{(n)}(t) K^{-1}. \end{aligned}$$

Составим вектора из данных характеристик

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= (n_1^{(p)}(t), n_1^{(s)}(t), \dots, n_n^{(p)}(t), n_n^{(s)}(t)), \\ \bar{Z}(t) &= (z_1^{(n)}(t), z_1^{(c)}(t), \dots, z_n^{(n)}(t), z_n^{(c)}(t)). \end{aligned}$$

В [6] показано, что средние относительные числа положительных заявок в контрольной и обслуживающих очередях, а также средние относительные числа отрицательных заявок в контрольной и карантинной очередях находятся из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dn_i^{(p)}(t)}{dt} &= A_i^{(1)}(\bar{n}, \bar{Z}), \quad i = 2k - 1, k = \overline{1, n}; \\ \frac{dn_i^{(s)}(t)}{dt} &= A_i^{(1)}(\bar{n}, \bar{Z}), \quad i = 2k, k = \overline{1, n}; \\ \frac{dZ_i^{(n)}(t)}{dt} &= A_i^{(2)}(\bar{n}, \bar{Z}), \quad i = 2k - 1, k = \overline{1, n}; \\ \frac{dZ_i^{(c)}(t)}{dt} &= A_i^{(2)}(\bar{n}, \bar{Z}), \quad i = 2k, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При функционировании сети в режиме насыщения, т. е.

$$\forall t \ k_i^{(p)} > 0, k_i^{(s)} > 0, l_i^{(n)} > 0, l_i^{(c)} > 0, i = \overline{1, n}$$

решение системы (2.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} N_i^{(p)}(t) &= \left( \lambda_{0i}^+ - \mu_i^{(v)} q_i^+ + \sum_{j=1}^n \mu_j m_j p_{ji}^+ \right) t + N_i^{(p)}(0); \\ N_i^{(s)}(t) &= \left( \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} - \right. \\ &\quad \left. - \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) - \mu_i m_i \right) t + N_i^{(s)}(0); \\ L_i^{(n)}(t) &= \left( \lambda_{0i}^- - \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left[ \mu_j^{(v)} (1 - q_j^+) (1 - p_j^-) n_{ji} + \mu_j m_j p_{ji}^- \right] \right) t + L_i^{(n)}(0); \\ L_i^{(c)}(t) &= \left( \mu_i^{(v)} \left( q_i^+ (1 - p_i^+) + (1 - q_i^+) p_i^- \right) - \mu_i^{(c)} \right) t + \\ &\quad + L_i^{(c)}(0). \end{aligned}$$

В статье [7] показаны методы нахождения дисперсии числа заявок в данной сети.

#### Заключение

В статье выведено уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка для G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями в случае большого количества находящихся в системе сети запросов. Данная сеть является стохастической моделью компьютерной сети с установленным на каждом компьютере сети антивирусного программного обеспечения. С его помощью можно находить любые характеристики для данной сети.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe, E. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.
2. Летунович, Ю.Е. Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 32–38.

3. Kosarava, K.U. Application of a queueing network with positive and negative arrivals for modeling a computer network with antivirus software / K.U. Kosarava, D. Y. Kopats // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление вычисление, связь (DCCN-2021): материалы XXIV Междунар. науч. конф., Москва, 20-24 сент. 2021 г. – Москва: ИПУ РАН, 2021. – С. 108–113.

4. Kosarava, K.U. Analysis of the Probabilistic and Cost Characteristics of the Queueing Network with a Control Queue and Quarantine in Systems and Negative Requests by Means of Successive Approximations / K.U. Kosarava, D.Y. Kopats // Communications in Computer and Information Science (CCIS). Vol. 1552: Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2021): International Conference, Moscow, September 20-24, 2021. – Moscow: Springer Nature Switzerland AG, 2022. – С. 259–271.

5. Копать, Д.Я. Нахождение ожидаемых доходов систем в G-сети с контрольной и карантинной очередями и перемещениями отрицательных заявок между системами сети / Д.Я. Копать // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2022): сб. материалов II Междунар. науч.-практ. конф., Полоцк, 30-31 марта 2022 г. – Новополоцк: Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, 2022. – С. 23–28.

6. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов; 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

7. Русилко, Т.В. Дифференциальные уравнения для моментов вектора состояния замкнутой по структуре сети массового обслуживания с нетерпеливыми заявками / Т.В. Русилко, Д.Я. Копать // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. – 2021. – Т. 36, № 2. – С. 20–30.

Поступила в редакцию 03.03.2023.

#### Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н.