ФИЗИКА

УДК 539.12.01
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_12
EDN: ANAMGY

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Ю.А. Гришечкин, А.В. Бужан, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL QUASIPOTENTIAL EQUATION WITH THE POTENTIAL $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATIONAL REPRESENTATION

Yu.A. Grishechkin, A.V. Buzhan, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены приближённые аналитические решения одномерного уравнения Логунова – Тавхелидзе в интегральной форме, описывающего связанные состояния, с модельным потенциалом вида $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении. Для решения задачи выполнено приближённое преобразование релятивистского интегрального уравнения в импульсном представлении к задаче Штурма – Лиувилля для уравнения Шрёдингера с потенциалом в виде модифицированной потенциальной ямы Пешля – Теллера.

Ключевые слова: *уравнение Логунова – Тавхелидзе, модельный потенциал, релятивистское конфигурационное представление, импульсное представление, задача Штурма – Лиувилля, приближённое аналитическое решение, уравнение Шрёдингера, модифицированный потенциал Пешля – Теллера, гипергеометрический ряд, условие квантования энергии.*

Для цитирования: *Гришечкин, Ю.А.* Приближённое аналитическое решение одномерного квазипотенциального уравнения с потенциалом $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении / Ю.А. Гришечкин, А.В. Бужан, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 12–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_12. – EDN: ANAMGY

Abstract. The approximate analytical solutions of the one-dimensional Logunov-Tavkhelidze equation in integral form, that describes bound states, with a model potential of the form $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ in the relativistic configuration representation are found. To solve the problem an approximate transformation of the relativistic integral equation in the momentum representation to the Sturm – Liouville problem for the Schrödinger equation with a potential in the form of the modified Pöschl – Teller potential well is performed.

Keywords: *Logunov – Tavkhelidze equation, model potential, relativistic configurational representation, momentum representation, Sturm – Liouville problem, approximate analytical solution, Schrödinger equation, modified Pöschl – Teller potential, hypergeometric series, energy quantization condition.*

For citation: *Grishechkin, Yu.A.* Approximate analytical solution of the one-dimensional quasipotential equation with the potential $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ in the relativistic configurational representation / Yu.A. Grishechkin, A.V. Buzhan, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 12–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_12 (in Russian). – EDN: ANAMGY

Введение

Одномерное уравнение Логунова – Тавхелидзе для волновой функции $\psi(2E,\rho)$, описывающей связанные состояния системы двух частиц одинаковой массы *m*, в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) имеет вид [1], [2]

$$\psi(2E,\rho)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(E,\rho-\rho')V(\rho')\psi(2E,\rho')d\rho',$$
$$-\infty<\rho<\infty, \qquad (0.1)$$

где величина $2E$ – энергия системы двух частиц в системе центра масс $(0<2E<2m)$, ρ – координата в РКП, $V(\rho)$ − потенциал, $G(E,\rho-\rho')$ – функция Грина, имеющая следующую форму [1], [2]:

$$G(E,\rho-\rho')=\frac{-1}{m\sin 2w}\frac{\operatorname{sh}\left[\left(\pi/2-w\right)m(\rho-\rho')\right]}{\operatorname{sh}\left[\pi m(\rho-\rho')/2\right]}. \qquad (0.2)$$

Величина $0<w<\pi/2$ в (0.2) связана с энергией $2E$ по формуле $2E=2m\cos w$.

В данной работе мы рассматриваем нахождение приближённых аналитических решений уравнения (0.1) с модельным потенциалом в РКП следующего вида:

$$V(\rho)=\frac{-V_0}{\rho^2+\rho_0^2}, \tag{0.3}$$

где $V_0>0$, $\rho_0>0$ – константы. Отметим, что решение задачи в случае аналогичного трёхмерного потенциала было выполнено в работе [3]: точно – в случаях, когда $2E=0$ и $2E=2m$, численно – в случае, когда $0<2E<2m$.

1 Приближённое аналитическое решение

Для решения поставленной задачи сформулируем уравнение (0.1) в импульсном представлении [4]

$$\phi(2E,\chi_p)=-\frac{m}{2\pi}G(E,\chi_p)\int_{-\infty}^{+\infty}V(\chi_p-\chi_k)\phi(2E,\chi_k)d\chi_k,$$
$$-\infty<\chi_p<\infty, \tag{1.1}$$

где $\phi(2E,\chi_p)$ – волновая функция, χ_p – быстрота, связанная с относительным импульсом p в системе центра масс по формуле $p=m\,\mathrm{sh}\,\chi_p$, $V(\chi_p-\chi_k)$ – потенциал, $G(E,\chi_p)$ – функция Грина, имеющая вид

$$G(E,\chi_p)=\frac{1}{m^2\,\mathrm{ch}^2\,\chi_p-E^2}. \tag{1.2}$$

Входящие в уравнение (1.1) величины связаны с соответствующими величинами в РКП интегральными соотношениями [1], [2]

$$\psi(2E,\rho)=\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\chi_p m\rho)\phi(2E,\chi_p)d\chi_p,$$

$$G(E,\rho-\rho')=-\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\chi_p m(\rho-\rho'))G(E,\chi_p)d\chi_p,$$

$$V(\chi_p-\chi_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i(\chi_p-\chi_k)m\rho)V(\rho)d\rho. \tag{1.3}$$

Подстановка выражения для потенциала в РКП (0.3) в формулу (1.3) и последующее вычисление интеграла приводит к следующему выражению для потенциала в импульсном представлении:

$$V(\chi_p-\chi_k)=-V_0\pi/\rho_0\exp(-|\chi_p-\chi_k|m\rho_0). \tag{1.4}$$

Интегральное уравнение (1.1) с потенциалом (1.4) эквивалентно задаче Штурма – Лиувилля (ЗШЛ) [3]

$$\left[\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(m\rho_0)^2\right]G^{-1}(E,\chi_p)\phi(2E,\chi_p)=$$
$$=-m^2V_0\phi(2E,\chi_p),\ -\infty<\chi_p<\infty,$$
$$\left\{\frac{d}{d\chi_p}\left[G^{-1}(E,\chi_p)\phi(2E,\chi_p)\right]\right\}\Bigg|_{\chi_p\to\pm\infty}\cong 0.$$

После подстановки

$$G^{-1}(E,\chi_p)\phi(2E,\chi_p)=\Phi(2E,\chi_p)$$

и учёта явного вида функции Грина (1.2) представим ЗШЛ в следующей форме:

$$\left[\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(m\rho_0)^2\right]\Phi(2E,\chi_p)=$$
$$=-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p-\left(E/m\right)^2}\Phi(2E,\chi_p),\ -\infty<\chi_p<\infty, \tag{1.5}$$
$$\frac{d}{d\chi_p}\Phi(2E,\chi_p)\Bigg|_{\chi_p\to\pm\infty}\cong 0.$$

Задача (1.5) не имеет точных решений. Найдём её решения приближённо аналитически. Для этого выполним приближение множителя в правой части уравнения

$$-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p-\left(E/m\right)^2}\approx-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\alpha\chi_p\left[1-\left(E/m\right)^2\right]}, \tag{1.6}$$

где $\alpha>0$ – параметр, выбор значения которого определяет точность данного равенства и зависит от параметра E/m. Представим ЗШЛ (1.5) с учётом приближения (1.6) в виде

$$\left[\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(m\rho_0)^2\right]\Phi(2E,\chi_p)=-\frac{g^2}{\mathrm{ch}^2\,\alpha\chi_p}\Phi(2E,\chi_p),$$
$$-\infty<\chi_p<\infty, \tag{1.7}$$
$$\frac{d}{d\chi_p}\Phi(2E,\chi_p)\Bigg|_{\chi_p\to\pm\infty}\cong 0,$$

где введено обозначение $g^2=V_0\left[1-\left(E/m\right)^2\right]^{-1}$.

Уравнение в (1.7) аналогично одномерному уравнению Шрёдингера в случае модифицированного потенциала Пешля – Теллера [5], [6]. Как известно, в случае такого взаимодействия нерелятивистская задача имеет точные решения. Приведём кратко процедуру нахождения решений полученной нами релятивистской задачи (с совершенно другими граничными условиями). Для этого выполним в (1.7) замену переменной $x=\mathrm{th}\,\alpha\chi_p$ и переобозначение

$$\Phi(2E,\chi_p)\Rightarrow W(x).$$

После указанных преобразований представим (1.7) в форме

$$\left[\hat{L}^2-(m\rho_0/\alpha)^2+(g/\alpha)^2(1-x^2)\right]W(x)=0,$$
$$-1\le x\le 1, \tag{1.8}$$
$$\hat{L}W(x)\Big|_{x\to\pm1}\cong 0, \tag{1.9}$$

где мы ввели обозначение для оператора $\hat{L}=(1-x^2)\dfrac{d}{dx}$. В уравнении (1.8) сделаем подстановку $W(x)=(1-x^2)^{\mu}U(x)$, где $U(x)$ – неизвестная функция, $\mu=m\rho_0/(2\alpha)$. В результате получим дифференциальное уравнение для функции $U(x)$:

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-(2+4\mu)x\frac{d}{dx}+\left(g/\alpha\right)^2-4\mu^2-2\mu\right]\times \tag{1.10}$$
$$\times U(x)=0.$$

Заменой переменной $y=(1-x)/2$ преобразуем уравнение (1.10) к гипергеометрическому [7]

$$\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left((1+2\mu)-(2+4\mu)y\right)\frac{d}{dy}+\right.$$
$$\left.+\left(g/\alpha\right)^2-4\mu^2-2\mu\right]U(y)=0,\ \ 0\le y\le 1,$$

общее решение которого имеет вид

$$U(y)=A\,{}_2F_1(a,b;c;y)+ \tag{1.11}$$
$$+By^{1-c}{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;y),$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрические ряды, A, B – неопределённые константы, a, b, c – параметры следующего вида:

$$a=1/2+2\mu-\left[1/4+\left(g/\alpha\right)^2\right]^{1/2};$$

$$b=1/2+2\mu+\left[1/4+\left(g/\alpha\right)^2\right]^{1/2};\ \ c=1+2\mu.$$

Возвращая в (1.11) переменную x и подставляя эту функцию в формулу для $W(x)$, получим следующее выражение:

$$W(x)=A(1-x^2)^{\mu}\,{}_2F_1(a,b;c;(1-x)/2)+ \tag{1.12}$$
$$+B(1-x^2)^{\mu}\left((1-x)/2\right)^{1-c}\times$$
$$\times{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;(1-x)/2).$$

Выражение (1.12) удовлетворяет граничному условию (1.9) при $x\to 1$, если $B=0$. Граничное условие при $x\to -1$ выполняется только когда ${}_2F_1(a,b;c;(1-x)/2)$ является полиномом, т. е. должно выполнятся равенство

$$a=-n,\ \ n=0,1,2,... \tag{1.13}$$

Учтём в (1.13) явный вид величины a, а также величин μ, g и выразим из него энергию

$$2E_n=2m\left[1-\frac{V_0}{(m\rho_0+\alpha n)(m\rho_0+\alpha+\alpha n)}\right]^{1/2}. \tag{1.14}$$

Выражение (1.14) является условием квантования энергии. Из равенства (1.13) следует, что $a\le 0$. С учётом явного вида величины a получим условие, которому должны удовлетворять параметры V_0, α, $m\rho_0$: $V_0\ge m\rho_0(1+m\rho_0/\alpha)$.

Формула для волновой функции, соответствующей собственному значению энергии $2E_n$, имеет следующий вид:

$$\phi(2E_n,\chi_p)=\frac{A_n}{\left[m^2\,\mathrm{ch}^2\,\chi_p-E_n^2\right]\mathrm{ch}^{m\rho_0/\alpha}\,\alpha\chi_p}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(-n,1+2m\rho_0/\alpha+n;1+m\rho_0/\alpha;(1-\mathrm{th}\,\alpha\chi_p)/2\right),$$

где константа A_n – всё ещё не определена.

2 Анализ полученных результатов

Исследуем найденные приближённые решения. Из выражения (1.14) следует, что параметр n может принимать любые целые неотрицательные значения, не меньшие, чем

$$\left(1/4+V_0/\alpha^2\right)^{1/2}-1/2-m\rho_0/\alpha.$$

С целью выяснения точности собственных значений выполним сравнение получаемых по формуле результатов с соответствующими величинами, полученными численным решением интегрального уравнения (0.1) с потенциалом (0.3):

$$\psi(2E,\rho)=\frac{V_0}{2m\sin w}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\left[(\pi/2-w)m(\rho-\rho')\right]}{\mathrm{sh}\left[\pi m(\rho-\rho')/2\right]}\frac{1}{\rho'^2+\rho_0^2}\psi(2E,\rho')d\rho'. \tag{2.1}$$

Для этого удобно выразить из формулы (1.14) величину V_0 и считать, что условие квантования выполняется для неё, а величину $2E$ рассматривать как параметр. Такое условие квантования имеет вид

$$V_{0(n)}=\left(1-\left(E/m\right)^2\right)(m\rho_0+\alpha n)(m\rho_0+\alpha+\alpha n),$$
$$n=0,1,2,... \tag{2.2}$$

В таблице 2.1 приведены величины параметра α, соответствующие различным значениям обезразмеренной энергии $2E/m$.

Таблица 2.1 – Значения параметра аппроксимации α

$2E/m$	α	$2E/m$	α
0,3	1,01	1,2	1,18
0,6	1,03	1,5	1,36
0,9	1,08	1,8	1,90

Данные в таблице 2.1 величины α – это значения, при которых интегральная функция

$$\varepsilon(\alpha)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p-\left(E/m\right)^2}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\alpha\chi_p\left[1-\left(E/m\right)^2\right]}\right]^2 d\chi_p$$

принимает минимальное значение для фиксированной величины $2E/m$.

В таблице 2.2 приведены значения величин $V_{0(n)}$, найденных при численном решении интегрального уравнения (2.1) (numerically) и определённых по формуле (2.2) (approximately) для разных значений величин $m\rho_0$, $2\varepsilon=2E/m$, n. Величины $V_{0(n)}^{num}$ найдены с точностью до 4 знаков после запятой и выше. Насколько полученные значения оказываются близкими к точным можно судить по приведенным в таблице величинам $\Delta_{(n)}=\left|V_{0(n)}^{num}-V_{0(n)}^{appr}\right|$.

Таблица 2.2 – Значения константы связи $V_{0(n)}$

2ε	$V_{0(0)}^{num}$	$V_{0(0)}^{appr}$	$\Delta_{(0)}$	$V_{0(1)}^{num}$	$V_{0(1)}^{appr}$	$\Delta_{(1)}$	$V_{0(2)}^{num}$	$V_{0(2)}^{appr}$	$\Delta_{(2)}$
$m\rho_0=0,25$									
0,3	0,3075	0,3079	0,0004	2,7836	2,7959	0,0123	7,2322	7,2781	0,0459
0,6	0,2922	0,2912	0,0010	2,6955	2,6907	0,0048	6,9871	7,0210	0,0339
0,9	0,2662	0,2652	0,0010	2,5429	2,5562	0,0133	6,5623	6,7077	0,1454
1,2	0,2283	0,2288	0,0005	2,3148	2,3887	0,0739	5,9257	6,3308	0,4051
1,5	0,1760	0,1761	0,0001	1,9858	2,0920	0,1062	5,0039	5,6263	0,6224
1,8	0,1019	0,1021	0,0002	1,4756	1,6544	0,1788	3,5658	4,5785	1,0127
$m\rho_0=1,00$									
0,3	1,9639	1,9648	0,0009	5,9226	5,9336	0,0110	11,8555	11,8968	0,0413
0,6	1,8551	1,8473	0,0078	5,6875	5,6527	0,0348	11,4151	11,3890	0,0261
0,9	1,6710	1,6588	0,0122	5,2844	5,2418	0,0426	10,6562	10,6852	0,0290
1,2	1,4066	1,3952	0,0114	4,6911	4,6879	0,0032	9,5286	9,7628	0,2342
1,5	1,0505	1,0325	0,0180	3,8576	3,8409	0,0167	7,9194	8,2677	0,3483
1,8	0,5685	0,5510	0,0175	2,6269	2,6448	0,0179	5,4710	6,1104	0,6394
$m\rho_0=4,00$									
0,3	19,5907	19,5891	0,0016	29,4800	29,4816	0,0016	41,3457	41,3684	0,0227
0,6	18,3595	18,3092	0,0503	27,9101	27,7384	0,1717	39,3652	39,0985	0,2667
0,9	16,2960	16,2052	0,0908	25,2570	24,9560	0,3010	35,9991	35,5672	0,4319
1,2	13,3771	13,2608	0,1163	21,4480	21,0847	0,3633	31,1174	30,6908	0,4266
1,5	9,5516	9,3800	0,1716	16,3196	15,7584	0,5612	24,4268	23,7552	0,6716
1,8	4,6630	4,4840	0,1790	9,3670	8,7438	0,6232	15,0115	14,3754	0,6361

Как видно из таблицы 2.2, с ростом величины $m\rho_0$ точность значений константы связи, найденных по формуле (2.2), снижается. Также точность снижается с ростом номера состояния n для каждого фиксированного значения $m\rho_0$.

Заключение

Таким образом, в данной работе получены приближённые аналитические решения одномерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом $(\rho^2+\rho_0^2)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении. Решения получены преобразованием интегрального уравнения в релятивистском конфигурационном представлении к задаче Штурма – Лиувилля в импульсном представлении с последующей заменой обыкновенного дифференциального уравнения аналогом уравнения Шрёдингера с модифицированным потенциалом Пешля – Теллера, для которого известны точные решения. Сравнение полученных данным методом собственных значений с соответствующими величинами, найденными при численном решении уравнения Логунова – Тавхелидзе, показало эффективность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

2. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. *Капшай*, *В.Н.* Решения релятивистских двухчастичных уравнений с произвольным орбитальным моментом / В.Н. Капшай, С.И. Фиалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 34–43.

4. *Капшай*, *В.Н.* Точные решения квазипотенциальных уравнений для кулоновского и линейного запирающего потенциалов / В.Н. Капшай, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1983. – Т. 55, № 2. – С. 236–245.

5. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

6. *Теоретическая физика*: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

7. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила в редакцию 14.08.2023.

Информация об авторах

Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент
Бужан Андрей Вадимович – аспирант
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент