МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38
EDN: EQNIHG

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В *l*-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POWERS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье продолжается изучение степеней элементов в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *степень элемента.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38. – EDN: EQNIHG

Abstract. The study on the powers in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary group*, *power*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Powers in *l*-ary groups of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38 (in Russian). – EDN: EQNIHG

Введение

Данная статья, посвящённая изучению степеней элементов в полиадических группах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1].

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [2]–[6].

3 Главная теорема

Вначале покажем, что, если в теореме 2.2 подстановка σ оставляет неподвижным некоторый символ, то компонента элемента $\mathbf{a}^{[\nu]}$ $(\nu < 0)$, индекс которой совпадает с этим символом, имеет вид, указанный в следующем предложении.

***Предложение* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* $(n \geq 3)$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$ *и оставляет неподвижным символ* m, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда m-я компонента* b_m *элемента* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$ *имеет вид*

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{(n-3)(-\nu(l-1)-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu(l-1)-1}).$$

Доказательство. Так как подстановка σ оставляет неподвижным символ m, то

$$a_{\sigma^r(m)} = a_m, \quad \overline{a_{\sigma^r(m)}} = \overline{a},$$

$$\underbrace{a_{\sigma^r(m)} \ldots a_{\sigma^r(m)}}_{n-3} = \underbrace{a_m \ldots a_m}_{n-3}$$

для любого $r = 0, 1, \ldots, l-2$. Далее, учитывая, перестановочность в n-арной группе $< A, \eta >$ любого её элемента a со своим косым элементом $\overline{a}$, находим u_m и b_m из формулировки теоремы 2.2:

$$u_m = \underbrace{\underbrace{a_m \ldots a_m}_{n-3} \overline{a_m} \ldots \underbrace{a_m \ldots a_m}_{n-3} \overline{a_m}}_{l-2} =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{(n-3)(l-2)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{l-2}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{u_m \ldots u_m}_{-\nu} \underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{(n-3)(-\nu-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{-\nu(n-3)(l-2)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu(l-2)} \underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{(n-3)(-\nu-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{(n-3)(-\nu(l-1)-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu(l-1)-1}). \qquad \square$$

***Следствие* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *оставляет неподвижным символ* m, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s+1)$-*арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда m-я компонента* b_m *элемента* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$ *имеет вид*

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-2\nu s-1}).$$

© *Гальмак А.М.*, 2023

В следующей теореме, в отличие от теоремы 2.1, более детально описаны компоненты полиадических степеней элементов l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит натуральное* d, $l = td + 1$ *для некоторого натурального* t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k, \qquad (3.1)$$

a_j^{-1} *и* α_j^{-1} – *любые обратные последовательности в* $< A, \eta >$ *для элемента* a_j *и последовательности* α_j *соответственно. Тогда*:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \textit{если}\ \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{t\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{t\nu})), \qquad (3.2)$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})), \qquad (3.3)$$

если $\nu < -1$ *или* $\nu = -1$, $t \neq 1$.

Доказательство. Так как порядок подстановки σ делит d, то из условия $l = td + 1$ следует, что порядок подстановки σ делит $l - 1$. Следовательно, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1, согласно которой $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа.

По условию подстановка σ^d является тождественной и $l = td + 1$. Поэтому

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} =$$

$$= \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1} a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}$$

или, учитывая равенство (3.1),

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j. \qquad (3.4)$$

Для $\nu = 0$ доказывать нечего.

Если $\nu > 0$, то положим

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ \ldots \ \mathbf{a}}_{\nu(l-1)+1}) = (b_1, \ldots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}$$

$$\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j$$

$$\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}).$$

Из полученного равенства и равенства (3.4) вытекает

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j}_{\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t} \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t}}_{\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu})$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно, верно (3.2)

Пусть теперь $\nu < -1$ или $\nu = -1$, $t \neq 1$ и положим

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-t\nu-1}), j \in \{1, \ldots, k\}, \qquad (3.5)$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{-\nu(l-1)} (b_1, \ldots, b_k)) = (c_1, \ldots, c_k). \qquad (3.6)$$

Из последнего равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j),$$

то есть

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j).$$

Полученное равенство, учитывая равенство (3.4), можно переписать следующим образом

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j}_{-\nu-1}$$

$$\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j b_j),$$

откуда следует

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t(-\nu-1)+t-1} \alpha_j b_j) = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-t\nu-1} \alpha_j b_j),$$

то есть

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-t\nu-1} \alpha_j b_j).$$

Подставляя в это равенство вместо b_j правую часть из (3.5) и используя нейтральность соответствующих последовательностей, получим

$$c_j=\eta(a_j\underbrace{\alpha_j a_j\ldots\alpha_j a_j}_{-t\nu-1}\alpha_j\eta(\alpha_j^{-1}\underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1}\ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-t\nu-1}))=a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, откуда и из (3.6) вытекает

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathrm{a}\ldots\mathrm{a}}_{-\nu(l-1)}(b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{a}.$$

Следовательно, $(b_1, \ldots, b_k) = \mathrm{a}^{[\nu]}$ и верно (3.3). □

***Замечание* 3.1.** Если в теореме 3.1 $d = l - 1$, то $t = 1$ и получается теорема 2.1, являющаяся таким образом следствием теоремы 3.1.

***Замечание* 3.2.** Пустую последовательность можно рассматривать как нейтральную последовательность. Поэтому будем считать $\eta(a) = a$ для любого элемента a n-арной группы $< A, \eta >$.

***Замечание* 3.3.** Так как при $t = 1$, $\nu = -1$ последовательность

$$\underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1}\ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-t\nu-1}$$

пустая, то правая часть в (3.3) не имеет смысла. С другой стороны, если $t = 1$, то $d = l - 1 = s(n - 1)$. Это означает, что в качестве обратной последовательности в $< A, \eta >$ для последовательности α_j длины $d - 1 = s(n - 1) - 1$ можно использовать одноэлементную обратную последовательность α_j^{-1}. Поэтому, если в теореме 3.1 $t = 1$, $\nu = -1$, то, как и в теореме 2.1,

$$\mathbf{a}^{[-1]} = (\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_k^{-1}).$$

Если принять во внимание замечание 3.2, то последнее равенство можно считать содержащимся в равенстве (3.3), которое, таким образом, верно для $\nu < 0$. Будем иметь это в виду при формулировке следствий из теоремы 3.1 и других результатов, полученных с её помощью.

***Замечание* 3.4.** Покажем, что число элементов под знаком n-арной операции в каждой компоненте правой части (3.3) равно $r(n - 1) + 1$ для некоторого натурального r, то есть равенство (3.3) корректно.

Так как

$$s(n - 1) = l - 1 = td = (t - 1)d + 1 + d - 1,$$

то обратный элемент α_j^{-1} в $< A, \eta >$ для последовательности α_j длины $d - 1$ эквивалентен в смысле Поста последовательности длины $(t - 1)d + 1$. Кроме того, любая обратная последовательность a_j^{-1} для элемента a_j эквивалентна в $< A, \eta >$ последовательности длины $n - 2$. В этом случае число элементов под знаком n-арной операции в правой части (3.3) равно

$$\begin{aligned}
&(t - 1)d + 1 + (n - 2 + (t - 1)d + 1)(-\nu t - 1) = \\
&= td - d + 1 + (n - 2 + td - d + 1)(-\nu t - 1) = \\
&= l - 1 - d + 1 + (n - 2 + l - 1 - d + 1)(-\nu t - 1) = \\
&= l - d + (n - 2 + l - d)(-\nu t - 1) = \\
&= l - d - \nu t(n - 2) - \nu tl + \nu td - (n - 2) - l + d = \\
&= -\nu t(n - 2) - \nu tl + \nu td - (n - 2) = \\
&= (-\nu t(n - 2) - \nu tl) + \nu(l - 1) - (n - 1) + 1 = \\
&= -\nu t(l + n - 2) + (\nu s(n - 1) - (n - 1)) + 1 = \\
&= -\nu t(s(n - 1) + 1 + n - 2) + (\nu s - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= -\nu t(s(n - 1) + n - 1) + (\nu s - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= -\nu t(s + 1)(n - 1) + (\nu s - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= (-\nu t(s + 1) + \nu s - 1))(n - 1) + 1 = \\
&= (-\nu(ts + t - s) - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= r(n - 1) + 1,
\end{aligned}$$

где $r = -\nu(ts + t - s) - 1$.

***Замечание* 3.5.** Если в теореме 3.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в n-арной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять последовательность

$$a_j^{-1} = \overline{a}_j\underbrace{a_j\ldots a_j}_{n-3}.$$

Кроме того, в силу леммы 2.1, обратная последовательность α_j^{-1} в $< A, \eta >$ для последовательности α_j из теоремы 3.1 имеет вид

$$\alpha_j^{-1} = \underbrace{a_{\sigma^{d-1}(j)}\ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}}\ \ldots$$

$$\ldots\underbrace{a_{\sigma(j)}\ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}. \qquad (3.7)$$

Соответственно теорема 3.1 примет следующий вид.

***Теорема* 3.2.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит натуральное d, $l = td + 1$ для некоторого натурального t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)}\ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – последовательность (3.7) *или любая другая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности α_j. Тогда*:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \text{если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1\underbrace{\alpha_1 a_1\ldots\alpha_1 a_1}_{t\nu}), \ldots, \eta(a_k\underbrace{\alpha_k a_k\ldots\alpha_k a_k}_{t\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1}\underbrace{\overline{a}_1\underbrace{a_1\ldots a_1}_{n-3}\alpha_1^{-1}\ldots\overline{a}_1\underbrace{a_1\ldots a_1}_{n-3}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1}\underbrace{\overline{a}_k\underbrace{a_k\ldots a_k}_{n-3}\alpha_k^{-1}\ldots\overline{a}_k\underbrace{a_k\ldots a_k}_{n-3}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

***Замечание* 3.6.** В теоремах 3.1 и 3.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка d. Если же в качестве подстановки σ в этих теоремах взять подстановку порядка $d = l - 1$, то $t = 1$ в формулах (3.2) и (3.3) из теоремы 3.1 и в соответствующих формулах из теоремы 3.2.

Ввиду равенства $\mathrm{a}^{[-1]} = \overline{\mathrm{a}}$, из теорем 3.1 и 3.2 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [7, теоремы 2.1 и 2.2].

***Замечание* 3.7.** Если $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа, σ – тождественная подстановка,

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, то согласно определению полиадической степени для $\nu > 0$ имеем

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta(\underbrace{\mathbf{a} \ \ldots \ \mathbf{a}}_{\nu(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{(a_1 \ldots a_k) \ldots (a_1 \ldots a_k)}_{\nu(l-1)+1}) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \ \ldots \ a_1}_{\nu(l-1)+1}), \ldots, \eta(\underbrace{a_k \ \ldots \ a_k}_{\nu(l-1)+1})). \quad (3.8).$$

Для $\nu < 0$ имеем

$$\eta(\mathbf{a}^{[\nu]} \underbrace{\mathbf{a} \ \ldots \ \mathbf{a}}_{-\nu(l-1)}) = \mathbf{a},$$

то есть

$$\eta(\mathbf{a}^{[\nu]} \underbrace{(a_1 \ldots a_k) \ldots (a_1 \ldots a_k)}_{-\nu(l-1)}) = (a_1, \ldots, a_k).$$

Если $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$, то из последнего равенства следует

$$(\eta(b_1 \underbrace{a_1 \ \ldots \ a_1}_{-\nu(l-1)}), \ldots, \eta(b_k \underbrace{a_k \ \ldots \ a_k}_{-\nu(l-1)})) = (a_1, \ldots, a_k),$$

то есть

$$\eta(b_j \underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{-\nu(l-1)}) = a_j, j = 1, \ldots, k, \quad (3.9)$$

откуда

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_j^{-1} \ \ldots \ a_j^{-1}}_{-\nu(l-1)}) = \eta(\underbrace{a_j^{-1} \ \ldots \ a_j^{-1}}_{-\nu(l-1)-1}). \quad (3.10)$$

Если теперь в теореме 3.1 $d = 1$, то есть σ – тождественная подстановка, то $t = l - 1$, а последовательность (3.1) – пустая. В этом случае равенства (3.2) и (3.3) принимают соответственно вид (3.8) и (3.10). Следовательно, случай тождественной подстановки содержится в теореме 3.1 при $d = 1$. Это же верно и для теоремы 3.2.

Для тождественной подстановки имеет место предложение, устанавливающее связь между степенями элементов в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ и степенями компонент этих элементов в n-арной группе $< A, \eta >$.

***Предложение* 3.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа*, σ – *тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда для любого целого* ν *верно равенство* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_1^{[s\nu]}, \ldots, a_k^{[s\nu]})$.

Доказательство. Ясно, что для $\nu = 0$ равенство из формулировки теоремы верно.

Положим $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$. Если $\nu > 0$, то, согласно (3.8),

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{\nu(l-1)+1}).$$

А так как $l - 1 = s(n - 1)$, то

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{\nu s(n-1)+1}) = a_j^{[s\nu]}, \ \nu > 0.$$

Если $\nu < 0$, то верно (3.9) и, кроме того,

$$\eta(b_j \underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{-\nu(l-1)}) = \eta(b_j \underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{-\nu s(n-1)}), \ \nu < 0.$$

Следовательно, $b_j = a_j^{[s\nu]}$. Таким образом, формула из условия предложения верна для любого целого ν. □

Тернарный случай. Если в теореме 3.1 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$. В результате получим следствие для $\nu < 0$.

***Следствие* 3.2**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит натуральное* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $\nu < 0$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – *любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1}\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k}\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})).$$

***Замечание* 3.8.** Если d – чётное, то последовательность α_j в следствии 3.2 эквивалентна в смысле Поста элементу $\eta(a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)})$. Поэтому можно считать

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)}),$$

соответственно

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\alpha_j} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}.$$

Если $d = 2$, то α_j – элемент тернарной группы $< A, \eta >$, и в силу замечания 3.2, считаем $\alpha_j = \eta(\alpha_j)$.

Имея в виду замечание 3.8, следствие 3.2 можно переформулировать следующим образом.

***Следствие* 3.3**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит чётное* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $\nu < 0$,

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)}), j = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{\alpha_1} \underbrace{\overline{a_1}\,\overline{\alpha_1} \ldots \overline{a_1}\,\overline{\alpha_1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\overline{\alpha_k} \underbrace{\overline{a_k}\,\overline{\alpha_k} \ldots \overline{a_k}\,\overline{\alpha_k}}_{-t\nu-1})).$$

Если в следствии 3.2 положить $d = 2$, то $t = s$, $\alpha_j = a_{\sigma(j)}$, $\alpha_j^{-1} = a_{\sigma(j)}^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}}$, $j = 1, \ldots, k$ и получим

***Следствие* 3.4**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* 2, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $\nu < 0$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}} \underbrace{\overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma(1)}}}_{-s\nu-1}), \ldots,$$

$$\ldots \eta(\overline{a_{\sigma(k)}} \underbrace{\overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma(k)}}}_{-s\nu-1})).$$

Из следствия 3.4 при $\nu = -1$ вытекает результат о косых элементах из [7, следствие 2.2].

Бинарный случай. Сформулируем бинарное ($n = 2$) следствие из теоремы 3.1 только для случая $\nu < 0$, так как для $\nu \geq 0$ степень $\mathbf{a}^{[\nu]}$ определяется одними и теми же формулами и в теореме 3.1 и в следствии.

***Следствие* 3.5**. *Пусть A – группа, порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит натуральное d, $s = td$ для некоторого натурального t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$-арной группы $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$, $\nu < 0$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – обратные элементы в группе A для элементов a_j и α_j соответственно. Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1}).$$

Если в следствии 3.5 положить $d = 2$, то получим

***Следствие* 3.6**. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка 2, $s = 2t$ для некоторого натурального t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$-арной группы $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$, $\nu < 0$. Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_{\sigma(1)}^{-1} \underbrace{a_1^{-1}a_{\sigma(1)}^{-1} \ldots a_1^{-1}a_{\sigma(1)}^{-1}}_{-t\nu-1}, \ldots$$

$$\ldots, a_{\sigma(k)}^{-1} \underbrace{a_k^{-1}a_{\sigma(k)}^{-1} \ldots a_k^{-1}a_{\sigma(k)}^{-1}}_{-t\nu-1}).$$

В следствиях 3.2, 3.3 и 3.5 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка $n - 1$.

4 Порядок подстановки делит $n - 1$

Если в теоремах 3.1 и 3.2 $d = n - 1$, то $l - 1 = t(n - 1)$, откуда и из $l - 1 = s(n - 1)$ следует $t = s$. Поэтому теоремы 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

***Теорема* 4.1.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$,*

$$\beta_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и β_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности β_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\beta_1 a_1 \ldots \beta_1 a_1}_{s\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\beta_k a_k \ldots \beta_k a_k}_{s\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\beta_1^{-1}}_{-s\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\beta_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\beta_k^{-1}}_{-s\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

***Теорема* 4.2** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$, $\beta_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, β_j^{-1} – любая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности β_j, в частности*

$$\beta_j^{-1} = \underbrace{a_{\sigma^{n-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{n-2}(j)}} \ldots \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\beta_1 a_1 \ldots \beta_1 a_1}_{s\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\beta_k a_k \ldots \beta_k a_k}_{s\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \beta_1^{-1} \ldots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}}_{-s\nu-1} \beta_1^{-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \beta_k^{-1} \ldots \overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \beta_k^{-1}}_{-s\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

Если как и в теоремах 4.1 и 4.2 порядок d подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, то d делит $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = td + 1$, где $t = sr$. Поэтому, если в теоремах 3.1 и 3.2 в качестве подстановки σ взять подстановку порядка d, то можно сформулировать ещё две теоремы.

***Теорема* 4.3.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{sr\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{sr\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-sr\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-sr\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

***Теорема* 4.4.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – последовательность (3.7) *или любая другая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности α_j. Тогда*:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \textit{если}\ \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{sr\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{sr\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1}}_{-sr\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1}}_{-sr\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

Из теорем 4.1 и 4.2 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [7, теоремы 2.3 и 2.4].

***Замечание* 4.1.** Если в теореме 4.2 положить $r = 1$, $d = 2$, то $n = 3$. В этом случае из теоремы 4.2 при $\nu < 0$ вытекает следствие 3.4.

***Замечание* 4.2.** Можно показать, что теоремы 4.3 и 4.4 извлекаются соответственно из теорем 4.1 и 4.2 и наоборот. Так как последовательности β_j и α_j из теорем 4.1 и 4.3 связаны равенством

$$\beta_j = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j.$$

то для $\nu > 0$ имеем

$$\eta(a_j \underbrace{\beta_j a_j \ldots \beta_j a_j}_{s\nu})) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j a_j}_{s\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r} \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r}}_{s\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{sr\nu}).$$

Аналогично для $\nu < 0$ доказывается равенство

$$\eta(\beta_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\beta_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\beta_j^{-1}}_{-s\nu-1})) =$$

$$= \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-sr\nu-1})).$$

Таким образом, теоремы 4.1 и 4.3 могут быть извлечены одна из другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в l-арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51.
2. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
4. *Гальмак*, *А.М.* n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
5. *Гальмак*, *А.М.* n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
6. *Щучкин*, *Н.А.* Введение в теорию n-групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.
7. *Гальмак*, *А.М.* О косых элементах в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 64–68.

Поступила в редакцию 15.08.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор