

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СОВМЕСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ФУРЬЕ

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF CONSISTENT HERMITE – FOURIER APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, E.P. Kechko, T.M. Osnach

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определены тригонометрические аналоги алгебраических аппроксимаций Эрмита – Паде – аппроксимации Эрмита – Фурье. В частности, доказана теорема о существовании аппроксимаций Эрмита – Фурье, получено достаточное условие их единственности, а также установлен критерий существования и единственности многочленов Эрмита – Фурье, являющихся числителем и знаменателем аппроксимаций Эрмита – Фурье, ассоциированных с произвольным набором из k тригонометрических рядов. При выполнении условий критерия установлен явный вид указанных многочленов.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, суммы Фурье, тригонометрические аппроксимации Паде, многочлены Эрмита – Паде, аппроксимации Эрмита – Паде.

Для цитирования: Старовойтов, А.П. Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68. – EDN: VYPYFH

Abstract. The trigonometric analogues of algebraic Hermite – Padé approximations were defined, these are Hermite – Fourier approximations. In particular, the theorem of existence of Hermite – Fourier approximations was proved, the sufficient condition of their uniqueness was obtained, and the criterion of the existence and uniqueness of Hermite – Fourier polynomials, which are the numerator and denominator of Hermite – Fourier approximations associated with an arbitrary set of trigonometric series k . When the conditions of the criterion were met, the explicit type of the specified polynomials was established.

Keywords: trigonometric series, Fourier sums, trigonometric Padé approximants, Hermite – Padé polynomials, Hermite – Padé approximations.

For citation: Starovoitov, A.P. Existence and uniqueness of consistent Hermite – Fourier approximations / A.P. Starovoitov, E.P. Kechko, T.M. Osnach // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68 (in Russian). – EDN: VYPYFH

Введение

В своей знаменитой работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e , Ш. Эрмит впервые определил многочлены и рациональные дроби, ассоциированные с системой экспонент, которые в сложившейся терминологии принято называть многочленами и аппроксимациями Эрмита – Паде. В дальнейшем развитие эрмитовского направления в теории чисел существенный вклад внёс К. Малер [2]–[4]. Именно с появлением работ К. Малера началось интенсивное и систематическое изучение свойств многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде в связи с приложениями их в теории диофантовых приближений. В настоящее время теория аппроксимаций Эрмита – Паде превратилась в полне самостоятельный раздел комплексного анализа, а сами аппроксимации нашли разнообразные применения в различных областях теоретической

и прикладной математики, математической физики (см., например, [5]–[13]).

Многочлены Эрмита – Паде, ассоциированные с произвольной системой функций, определяются как решение следующей задачи [6, гл. 4; § 3, задача А]. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ – набор, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (0.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k -мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Задача А. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$ и

такие многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n,m}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$,
 $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$R_{n,m}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = l_j z^{n+m+1} + \dots \quad (0.2)$$

Многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_1}^1(z), \dots, P_{n_k}^k(z)$, являющиеся решением задачи **A** (решение задачи **A** всегда существует), принято называть *многочленами Эрмита – Паде*, а рациональные дроби $\pi^j(z) = P_{n_j}^j(z) / Q_m(z)$, $j = 1, \dots, k$ – *аппроксимациями Эрмита – Паде* для набора **f**.

Для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные не равные нулю комплексные числа, явный вид решений задачи **A** найден Эрмитом [1] (см. также [6, гл. 4; § 2]). При $k=1$ (в этом случае **f** состоит из одной функции $f(z) = f_1(z)$) решение поставленной задачи было получено Паде [5], который нашел явный вид многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z) := P_{n,m}^1(z; f)$ (их принято называть многочленами Паде, а дроби $\pi_{n,m}(z) = P_n(z) / Q_m(z)$ – аппроксимациями Паде для f): если $f_i := f_i^1$, $i = 0, 1, \dots$, то [5, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix} \quad (0.3)$$

В общем случае решение задачи **A** получено в работах [14], [15], где, в частности, найдены необходимые и достаточные условия, при которых задача **A** имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение, и при выполнении этих условий получены явные детерминантные представления многочленов, при $k=1$ совпадающие с представлениями Паде (0.3).

В данной работе рассмотрим аналогичную задачу в тригонометрическом случае. Нашей целью является обобщение таких хорошо известных понятий, как частная сумма тригонометрического ряда, многочлен Паде – Фурье и аппроксимация Паде – Фурье функции, представленной тригонометрическим рядом, а также нахождение необходимых и достаточных условий, при которых соответствующие тригонометрические многочлены и аппроксимации существуют и единственны, получение для них детерминантных представлений, аналогичных алгебраическому случаю.

1 Многочлены и аппроксимации Эрмита – Фурье

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор, вообще говоря, формальных тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), \quad (1.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+$ и мультииндекс

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$$

и рассмотрим следующую задачу:

Задача \mathbf{A}^t . Для набора тригонометрических рядов (1.1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен

$$Q_m^t(x) = Q_{n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t), \quad \deg Q_m^t \leq m$$

и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg P_j^t \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$R_j^t(x) = R_{j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) := Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) =$$

$$= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1.2)$$

где \tilde{a}_l^j , \tilde{b}_l^j , как и коэффициенты тригонометрических многочленов $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ являются, вообще говоря, комплексными числами.

Очевидно, что многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ условиями (1.2) определяются не однозначно: если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, удовлетворяет условиям (1.2), то для любого отличного от нуля комплексного числа λ новая пара $(\lambda Q_m^t, \lambda P^t)$, где $\lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$, также им удовлетворяет. На самом деле неединственность может быть и более существенной. Приведем подтверждающий пример.

Пример 1.1. Пусть $k=1$, $n=2$, $m=1$, а

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx,$$

где

$$a_l = \begin{cases} 2, & \text{если } l = 1, 2, 3; \\ 4, & \text{если } l = 4; \\ \frac{1}{l!}, & \text{если } l > 4. \end{cases}$$

Тогда любое решение задачи \mathbf{A}^t представимо в виде: $(\lambda Q_1^t, \lambda P_1^t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где полиномы $Q_1^t(x)$, $P_1^t(x)$ в комплексной форме записи определяются равенствами

$$Q_1^t(x) = a e^{-ix} - \frac{a+b}{2} + b e^{ix},$$

$$P_1^t(x) = \frac{a+3b}{2} e^{-i2x} + \frac{b-a}{2} e^{-ix} +$$

$$+ a + b + \frac{a-b}{2} e^{ix} + \frac{3a+b}{2} e^{i2x},$$

в которых a и b – произвольные действительные числа не равные нулю одновременно, $i = \sqrt{-1}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т. е. для любых двух решений $(\overline{Q}_m, \overline{P}^t)$ и $(\widehat{Q}_m, \widehat{P}^t)$ задачи \mathbf{A}^t найдется такое комплексное число λ , что

$$(\overline{Q}_m, \overline{P}^t) = (\lambda \widehat{Q}_m, \lambda \widehat{P}^t).$$

Определение 1.2. Если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, является решением задачи \mathbf{A}^t с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндексом

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

то многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_{j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

будем называть, соответственно, многочленами Эрмита – Фурье и аппроксимациями Эрмита – Фурье (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для набора \mathbf{f}^t формальных степенных рядов (1.1).

Если задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, то условиями (1.2) аппроксимации Эрмита – Фурье $\{\pi_j^t(x)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. В частности, при $k=1$ достаточное условие единственности решения задачи \mathbf{A}^t найдено в работе [16]: для единственности достаточно, чтобы определитель $\Delta^1(n, m) \neq 0$ (определение $\Delta^1(n, m)$ см. далее). При этом условии в [16] найдены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x), P_1^t(x)$, аналогичные формулам Паде (0.3). В случае $k=1$ определенные нами аппроксимации Эрмита – Фурье называют также *тригонометрическими аппроксимациями Паде* или *аппроксимациями Паде – Фурье* (см. [5], [16]).

Укажем на одно важное отличие тригонометрических $\pi_{n,m}^t(x) := P_1^t(x)/Q_m^t(x)$ и алгебраических $\pi_{n,m}(z)$ аппроксимаций Паде. Известно [6, гл. 2; § 1], что для любой пары индексов (n, m) , $n, m \in \mathbb{N}$, алгебраические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$ определяются однозначно. В тригонометрическом случае это не так. Такое заключение можно сделать, опираясь на пример 1.1. Обозначим через $\pi_{2,1}^{t,1}(x)$ тригонометрическую аппроксимацию Паде из примера 1.1, которая соответствует параметрам $a=b=1$, а через $\pi_{2,1}^{t,2}(x)$ – тригонометрическую аппроксимацию Паде, которая соответствует параметрам $a=2, b=0$. Тогда получим

$$\pi_{2,1}^{t,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \neq \frac{-2-6i}{5} = \pi_{2,1}^{t,2}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий, при выполнении которых для набора \mathbf{f}^t и фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекса

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение и, следовательно, аппроксимации Эрмита – Фурье определяются однозначно.

2 Критерий единственности решения задачи \mathbf{A}^t

Запишем ряды (1.1) и полиномы $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \quad j = 1, \dots, k; \quad (2.1)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx}, \quad (2.2)$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx},$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, а $c_0^j = \frac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \frac{a_l^j - b_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \overline{c_l^j}$, $j = 1, \dots, k$; $l = 1, 2, \dots$

Тогда равенства (1.2) примут вид

$$R_j^t(x) = \sum_{l=-n+m+1}^{+\infty} (\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}). \quad (2.3)$$

Введём в рассмотрение матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$, считая, без ограничения общности, что ряды (2.1) сходятся при любом $x \in \mathbb{R}$ и, тем самым, определяют систему $\mathbf{f}^t = \{f_1^t(x), \dots, f_k^t(x)\}$, состоящую из 2π -периодических функций, определенных на всей действительной прямой.

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j = (c_{l+m}^j \quad c_{l+m-1}^j \quad \dots \quad c_{l+1}^j \quad c_l^j \quad c_{l-1}^j \quad \dots \quad c_{l-m+1}^j \quad c_{l-m}^j),$$

$$j = 1, \dots, k;$$

а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) = (e^{-imx} \quad e^{-i(m-1)x} \quad \dots \quad e^{-ix} \quad 1 \quad e^{ix} \quad \dots \quad e^{i(m-1)x} \quad e^{imx}).$$

Для заданного $j \in \{1, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$$

в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{n_j+m_j}^j & c_{n_j+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m_j-1}^j & c_{n_j+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \dots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \dots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \dots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \dots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \bar{m}; x) =$$

$$= \det \left[F_+^k \dots F_+^2 \ F_+^1 \ E_m^t(x) \ F_-^1 \ F_-^2 \ \dots \ F_-^k \right]^T :=$$

$$:= \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае, если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блок-матрицы F_{\pm}^j . Обозначим через $H_{n, \bar{m}}^t$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \bar{m}; x)$ после удаления в нём $(m+1)$ -ой строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \bar{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку \mathbb{C}_l^j , получим новый определитель $d_l^j(n, \bar{m})$. Обозначим через $\Delta^k(n, \bar{m})$ определитель порядка $2m$, полученный в результате вычёркивания в определителе $D(n, \bar{m}; x)$ $(m+1)$ -ой строки и $(m+1)$ -го столбца.

Определение 2.1. Индекс $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ будем называть слабо нормальным для системы \mathbf{f}^t , если ранг матрицы $H_{n, \bar{m}}^t$ максимальный, т. е. равен $2m$.

Определение 2.2. Систему \mathbf{f}^t назовём слабо совершенной, если все индексы $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ являются слабо нормальными для \mathbf{f}^t .

Теорема 2.1. Для того, чтобы для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ и системы \mathbf{f}^t

задача \mathbf{A}^t имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс (n, \bar{m}) был слабо нормальным для \mathbf{f}^t , т. е. $\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$.

Если $\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$, то при определенном выборе нормирующего числового множителя для решений задачи \mathbf{A}^t справедливы представления: для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^t(x) = Q_{n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = D(n, \bar{m}; x), \quad (2.4)$$

$$P_j^t(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (2.5)$$

$$R_j^t(x) = R_{j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) =$$

$$= \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть искомым многочлен $Q_m^t(x)$ имеет вид (2.2). После преобразований получаем

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-m}^m u_p c_{l-p}^j \right) e^{ilx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_l^j e^{ilx},$$

где

$$\tilde{c}_l^j = \sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Выберем коэффициенты u_p , $p = \overline{-m, m}$, многочлена $Q_m^t(x)$ так, чтобы

$$\tilde{c}_l^j = 0, \quad l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), \quad j = 1, \dots, k;$$

и положим

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} \tilde{c}_p^j e^{ipx}.$$

Очевидно, выбранные таким образом многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ удовлетворяют условиям (1.2) и (2.3). Остается исследовать совместность системы уравнений

$$\sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p = 0, \quad (2.8)$$

$$l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Систему (2.8) можно записать в матричной форме

$$H_{n, \bar{m}}^t \cdot u^T = \theta^T,$$

где $u = (u_m, \dots, u_1, u_0, u_{-1}, \dots, u_{-m})$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (2m+1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (2.8) является однородной и в ней число неизвестных $2m+1$ на единицу больше числа уравнений $2m$, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что у системы (2.8) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (2.8) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда

$\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Тем самым первая часть теоремы 2.1 доказана.

Докажем теперь равенства (2.4)–(2.6). Так как по предположению ранг матрицы $H_{n, \bar{m}}^t$ равен $2m$, то при некотором $s \in \{1, \dots, 2m+1\}$ определитель, полученный из элементов матрицы $H_{n, \bar{m}}^t$ в результате вычеркивания в ней s -го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $s = m+1$. Тогда, зафиксировав неизвестное u_0 , получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} c_{l-p}^j u_p + \sum_{p=1}^m c_{l-p}^j u_p = -c_l^j u_0, \quad l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.9)$$

главный определитель которой $\Delta^k(n, \bar{m}) \neq 0$. Заметим, что $u_0 \neq 0$. В противном случае система (2.9), а значит и система (2.8) имела бы только нулевое решение. Поскольку определитель $\Delta^k(n, \bar{m}) \neq 0$, то система (2.9) имеет единственное ненулевое решение, и найти его можно по формулам Крамера:

$$u_p = \frac{\Delta_p^k(n, \bar{m})}{\Delta^k(n, \bar{m})}, \quad p = -m, \dots, m, \quad p \neq 0,$$

где $\Delta_p^k(n, \bar{m})$ – определитель, полученный из определителя $\Delta^k(n, \bar{m})$ заменой в нём p -го столбца на столбец свободных членов. Если положить $\Delta_0^k(n, \bar{m}) := u_0 \Delta^k(n, \bar{m})$, то

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx} = \sum_{p=-m}^m \frac{\Delta_p^k(n, \bar{m})}{\Delta^k(n, \bar{m})} e^{ipx}. \quad (2.10)$$

Разлагая определитель $D(n, \bar{m}; x)$ по элементам $(m+1)$ -ой строки и сравнивая с (2.10), делаем вывод, что

$$Q_m^t(x) = u_0 \frac{D(n, \bar{m}; x)}{\Delta^k(n, \bar{m})}. \quad (2.11)$$

Сопоставив (2.7) и (2.10), замечаем, что для отыскания \tilde{c}_p^j следует только в (2.10) e^{ipx} заменить на c_{l-p}^j . Учитывая введенные обозначения, получаем, что

$$\tilde{c}_p^j = u_0 \frac{d_p^j(n, \bar{m}; x)}{\Delta^k(n, \bar{m})}.$$

Следовательно, полином $P_j^t(x)$ и остаточный член $R_j^t(x)$ можно представить в виде

$$P_j^t(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (2.12)$$

$$R_j^t(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \times$$

$$\times \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \quad (2.13)$$

Умножая равенства (2.11)–(2.13) на нормирующий множитель $\Delta^k(n, \bar{m})/u_0$, получим (2.4)–(2.6). В случае, если бы вычеркивая в матрице $H_{n, \bar{m}}^t$ столбец с номером $s \neq m+1$ получили определитель отличный от нуля, то рассуждая аналогично, также пришли бы к представлениям (2.4)–(2.6). Теорема 2.1 доказана. \square

3 Замечания и следствия

Из представления (2.4) для многочлена $Q_m^t(x)$ следует, что компонента m_j мультииндекса \bar{m} определяет число коэффициентов тригонометрического ряда $f_j^t(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q_m^t(x)$. В частности, если $m_j = 0$, то определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блоки F_{\pm}^j и, следовательно, при построении многочлена $Q_m^t(x)$ тригонометрический ряд $f_j^t(x)$ не учитывается, а порядок мультииндекса \bar{m} определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $\bar{m} = (m_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то $m = m_1$ и тогда, как и в случае $k = 1$, при нахождении $Q_m^t(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f_1^t(x)$. Для такого мультииндекса формула (2.4) совпадает с формулой для знаменателя тригонометрической аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(x)$ функции $f_1^t(x)$, которая доказана в [16] при более ограничительном условии $\Delta^1(n, \bar{m}) \neq 0$. В [16] также установлено, что при $k = 1$ и выполнении условия $\Delta^1(n, \bar{m}) \neq 0$ задача A^t имеет единственное решение.

До сих пор предполагалось, что мультииндекс \bar{m} является ненулевым. В случае, если $\bar{m} = (0, \dots, 0)$ – нулевой мультииндекс, решение задачи A^t очевидно: с точностью до числового множителя $Q_m^t(x) \equiv 1$, а $P_j^t(x)$ – n -ая частная сумма тригонометрического ряда $f_j^t(x)$.

При доказательстве теоремы 2.1 никак не учитывалось наше предположение о сходимости рядов (1.1). Поэтому все утверждения теоремы остаются в силе, если ряды (1.1) являются формальными. Отметим, что в этом случае тригонометрические ряды, содержащиеся в формулировке теоремы 2.1 (см. равенства (2.6)), также являются формальными.

Следует также сказать, что если индекс (n, \bar{m}) не является слабо нормальным для \mathbf{f}^t , то многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$, определяемые формулами (2.4) и (2.5), не являются решениями задачи \mathbf{A}^t . В частности, в примере 1.1 индекс $(2, 1)$ не является слабо нормальным, и если вычислять, например, многочлен $Q_1^t(x)$ по формуле (2.4), то получим $Q_1^t(x) \equiv 0$. Этот пример также показывает, что для мультииндекса (n, \bar{m}) , который не является слабо нормальным, коэффициенты многочленов $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ могут быть комплексными числами. Для слабо нормального мультииндекса это не так.

Следствие 3.1. Пусть мультииндекс (n, \bar{m}) является слабо нормальным для системы \mathbf{f}^t . Тогда многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ являются действительными тригонометрическими многочленами.

Доказательство. По предположению коэффициенты тригонометрических рядов (1.1) являются действительными числами. Поэтому $c_{-p}^j = \bar{c}_p^j, j = 1, \dots, k; p = 1, 2, \dots$. В этом случае справедливы равенства

$$\overline{D(n, \bar{m}; x)} = D(n, \bar{m}; x), \quad \overline{d_p^j(n, \bar{m})} = d_{-p}^j(n, \bar{m}).$$

Чтобы убедиться в этом достаточно поменять местами равноотстоящие от краев строки и столбцы соответствующих определителей. Из предыдущих равенств и формул (2.4), (2.5) следует утверждение следствия 3.1. \square

Следствие 3.2. Для того, чтобы задача \mathbf{A}^t имела единственное решение для любого мультииндекса (n, \bar{m}) , необходимо и достаточно, чтобы система \mathbf{f}^t была слабо совершенной.

Доказательство. Для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}, \bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ следствие вытекает из теоремы 2.1, а для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}, \bar{m} = (0, \dots, 0)$ – из сделанного ранее замечания. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
2. *Mahler, K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I / K. Mahler // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1932. – Vol. 166, № 2. – P. 118–136.
3. *Mahler, K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II / K. Mahler // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1932. – Vol. 166, № 3. – P. 137–150.
4. *Mahler, K.* Perfect systems / K. Mahler // Compositio Mathematica. – 1968. – Vol. 19, № 2. – P. 95–166.

5. *Бейкер, Дж. мл.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.

6. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988. – 256 с.

7. *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, вып. 6 (402). – С. 37–122.

8. *Artekarev, A.I.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source, II / A.I. Artekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Communications in Mathematical Physics. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.

9. *Beckermann, V.* How well does the Hermite – Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? / V. Beckermann, V. Kalyagin, A.C. Matos, F. Wielonsky // Mathematics of Computation. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.

10. *Аптекарев, А.И.* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.

11. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, вып. 1 (343). – С. 45–142.

12. *Суетин, С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2015. – Т. 70, вып. 5 (425). – С. 121–174.

13. *Chudnovsky, G.* On the method of Thue-Siegel / G. Chudnovsky // Ann. of Math. – 1983. – Vol. 117, № 2. – P. 325–382.

14. *Старовойтов, А.П.* О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде второго рода / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Д.А. Волков // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2 (39). – С. 92–96.

15. *Старовойтов, А.П.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–36.

16. *Лабыч, Ю.А.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

Поступила в редакцию 22.01.2023.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Кечко Елена Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Оснач Татьяна Михайловна – аспирантка