МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_52
EDN: SDSTAN

О $\sigma_{\mathfrak{I}}$-НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

И.М. Дергачева[1], **И.П. Шабалина**[1], **Е.А. Задорожнюк**[1], **И.А. Соболь**[2]

[1]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

ON $\sigma_{\mathfrak{I}}$-NILPOTENT FINITE GROUPS

I.M. Dergacheva[1], **I.P. Shabalina**[1], **E.A. Zadorozhnyuk**[1], **I.A. Sobol**[2]

[1]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\mathfrak{I}$ – некоторый класс групп, замкнутый относительно расширений, гомоморфных образов и подгрупп. В данной работе $\sigma_{\mathfrak{I}} = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \sigma_0 \cup \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех индексов $i \neq j$ из $\{0\} \cup I$, для которого $\mathfrak{I}$ является классом σ_0-групп с $\pi(\mathfrak{I}) = \sigma_0$. Группа G называется: $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*примарной*, если G является либо $\mathfrak{I}$-группой, либо σ_i-группой для некоторого $i \neq 0$; $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*нильпотентной*, если G – прямое произведение некоторых $\sigma_{\mathfrak{I}}$-примарных групп. В данной работе мы даем характеризации конечных $\sigma_{\mathfrak{I}}$-нильпотентных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*субнормальная подгруппа*, $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*разрешимая группа*, $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*нильпотентная группа*, *холлова подгруппа*.

Для цитирования: *О* $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*нильпотентных конечных группах* / И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк, И.А. Соболь // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 52–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_52. – EDN: SDSTAN

Abstract. Throughout the article all groups are finite and G always denotes finite group; $\mathbb{P}$ is the set of all prime numbers and $\mathfrak{I}$ is some class of groups, closed under extensions, homomorphic images and subgroups. In this paper, $\sigma_{\mathfrak{I}} = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is a partition of the set $\mathbb{P}$, i. e. $\mathbb{P} = \sigma_0 \cup \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all indices $i \neq j$ from $\{0\} \cup I$, for which $\mathfrak{I}$ is a class of σ_0-groups with $\pi(\mathfrak{I}) = \sigma_0$. The group G is called: $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*primary* if G is either an $\mathfrak{I}$-group or a σ_i-group for some $i \neq 0$; $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*nilpotent* if G is the direct product of some $\sigma_{\mathfrak{I}}$-primary groups. Finite $\sigma_{\mathfrak{I}}$-nilpotent groups are characterized.

Keywords: *finite group*, $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*subnormal subgroup*, $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*soluble group*, $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*nilpotent group*, *Hall subgroup*.

For citation: *On* $\sigma_{\mathfrak{I}}$-*nilpotent finite groups* / I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk, I.A. Sobol // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 52–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_52 (in Russian). – EDN: SDSTAN

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\mathfrak{I}$ – некоторый класс групп, замкнутый относительно расширений, гомоморфных образов и подгрупп.

В дальнейшем, $\sigma_{\mathfrak{I}} = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е.

$$\mathbb{P} = \sigma_0 \cup \bigcup_{i \in I} \sigma_i$$

и

$$\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$$

для всех индексов $i \neq j$ из $\{0\} \cup I$, для которого $\mathfrak{I}$ – некоторый класс σ_0-групп с $\pi(\mathfrak{I}) = \sigma_0$. В случае, когда $\mathfrak{I}$ – класс всех σ_0-групп, мы пишем σ вместо $\sigma_{\mathfrak{I}}$ и мы будем в этом случае убирать символ $\mathfrak{I}$ во всех последующих определениях и обозначениях.

σ-*Свойством* группы [1]–[3] называют любое ее свойство, зависящее от выбора разбиения σ множества $\mathbb{P}$ и которое не предполагает каких либо ограничений на σ.

Напомним некоторые базисные понятия теории σ-свойств группы, восходящие к работам [1]–[9].

Группа G называется $\sigma_{\Im}$*-примарной* при условии, что G является либо $\Im$-группой, либо σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, где $i \neq 0$.

Пусть H/K – главный фактор группы G. Тогда мы говорим, что H/K является $\sigma_{\Im}$*-центральным* (в G), если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ $\sigma_{\Im}$-примарно.

Мы говорим, что группа G: $\sigma_{\Im}$*-разрешима*, если каждый главный фактор группы G является $\sigma_{\Im}$-примарным; $\sigma_{\Im}$*-нильпотентна*, если G – прямое произведение некоторых $\sigma_{\Im}$-примарных групп.

Ясно, что всякая $\sigma_{\Im}$-нильпотентная группа является $\sigma_{\Im}$-разрешимой.

Пусть теперь $\mathcal{H}$ – полное холлово σ-множество группы G. Тогда мы говорим, что $\mathcal{H}$ является полным холловым $\sigma_{\Im}$-множеством группы G, если элемент множества $\mathcal{H}$, являющийся σ_0-группой, принадлежит классу $\Im$.

***Определение* 0.1.** Мы говорим, следуя [4], что подгруппа A группы G является $\sigma_{\Im}$*-субнормальной* в G, если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо секция $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ $\sigma_{\Im}$-примарна для всех $i = 1, \ldots, t$.

Мы говорим, что G $\sigma_{\mathfrak{F}}$*-совершенна*, если $G = G^{\mathfrak{F}}$ и $O^{\sigma_i}(G) = G$ для всех $i \neq 0$.

В данной работе мы докажем следующие две новые теоремы σ-свойствах группы, первая их которых лежит в основе доказательства второй из них.

***Теорема* 0.2.** *Пусть A, K и N – подгруппы группы G. Предположим, что A $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G, а N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$A \cap K$ является $\sigma_{\Im}$-субнормальным в K.*

(2) *Если K является $\sigma_{\Im}$-субнормальной подгруппой группы A, то K является $\sigma_{\Im}$-субнормальной в G.*

(3) *Если $N \leq K$ и K/N $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G/N, то K $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G.*

(4) *Если $K \leq E \leq G$, где K является $\sigma_{\Im}$-субнормальным в E, то KN/N $\sigma_{\Im}$-субнормальна в NE/N.*

(5) *Если $K \leq A$ и A $\sigma_{\Im}$-примарна, то K σ-субнормальна в G.*

(6) *Если A $\sigma_{\Im}$-совершенна, то A субнормальна в G.*

Отметим, что теорема 0.2 обобщает многие известные свойства субнормальных подгрупп (см. главу А книги [10]).

(7) *Если A является холловой σ_i-подгруппой в G для некоторого i, то A нормальна в G.*

***Теорема* 0.3.** *Любые два из следующих условий эквивалентны*:

(i) *G $\sigma_{\Im}$-нильпотентна.*

(ii) *Каждый главный фактор G является $\sigma_{\Im}$-центральным в G.*

(iii) *G имеет полное холловское $\sigma_{\Im}$-множество $\mathcal{H}$ такое, что каждый член $\mathcal{H}$ является $\sigma_{\Im}$-субнормальной подгруппой в G.*

(iv) *Каждая подгруппа группы G $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G.*

(v) *Каждая максимальная подгруппа группы G $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G.*

Отметим, что следствиями теоремы 0.3 являются некоторые известные результаты о конечных нильпотентных группах.

1 Доказательство теоремы 0.2

Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка. По условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ $\sigma_{\Im}$-примарна для всех $i = 1, \ldots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $M \neq G$.

(1) Рассмотрим цепь подгрупп

$$K_0 = K \cap A_0 \leq K \cap A_1 \leq \cdots \leq K \cap A_r = K.$$

Если A_{i-1} нормальна в A_i, то, очевидно, $K \cap A_{i-1}$ нормальна в $K \cap A_i$. Предположим, что $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является $\Im$-группой. Тогда

$$(A_i \cap K)(A_{i-1})_{A_i}/(A_{i-1})_{A_i} \simeq A_i \cap K/(A_{i-1})_{A_i} \cap K$$

– $\Im$-группа, где $(A_{i-1})_{A_i} \cap K$ нормальна в $A_i \cap K$, поэтому $(A_{i-1})_{A_i} \cap K \leq (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$. Следовательно, $(K \cap A_i)/(K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ является $\Im$-группой. Наконец, если $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ_j-группой для некоторого $j \neq 0$, то аналогично получаем, что $(K \cap A_i)/(K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ является σ_j-группой. Следовательно, $A \cap K$ $\sigma_{\Im}$-субнормальна в K.

(2) Это утверждение очевидно.

(3) Пусть

$$K/N = K_0/N \leq K_1/N \leq \cdots \leq K_n/N = G/N$$

– цепь подгрупп такая, что либо K_{i-1}/N нормальна в K_i/N, либо $(K_i/N)/(K_{i-1}/N)_{K_i/N}$ является $\sigma_{\Im}$-примарной группой для всех $i=1,\ldots,n$. Предположим, что K_{i-1} не является нормальной в K_i. Тогда K_{i-1}/N не является нормальной в K_i/N, поэтому

$$(K_i/N)/(K_{i-1}/N)_{K_i/N}=$$
$$=(K_i/N)/((K_{i-1})_{K_i}/N)\simeq K_i/(K_{i-1})_{K_i}$$

является $\sigma_{\Im}$-примарной группой. Следовательно, K $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G.

(4) По условию существует цепь подгрупп

$$K=K_0\le K_1\le\cdots\le K_n=E$$

такая, что либо K_{i-1} нормальна в K_i, либо $K_i/(K_{i-1})_{K_i}$ является $\sigma_{\Im}$-примарной группой для всех $i=1,\ldots,n$.

Теперь рассмотрим цепь

$$KN/N=K_0N/N\le$$
$$\le K_1N/N\le\cdots\le K_nN/N=EN/N.$$

Предположим, что $K_{i-1}N/N$ не является нормальной в K_iN/N. Тогда $L=K_{i-1}$ не является нормальной в $T=K_i$ и поэтому T/L_T является $\sigma_{\Im}$-примарна. Тогда

$$(T/L_T)/(L_T(T\cap N)/L_T)=$$
$$=(T/L_T)/((T\cap NL_T)/L_T)\simeq$$
$$T/(T\cap NL_T)\simeq TN/L_TN\simeq(TN/N)/(L_TN/N)$$

является $\sigma_{\Im}$-примарной группой. Но

$$L_TN/N\le(LN/N)_{TN/N}.$$

Следовательно, $(TN/N)/(LN/N)_{TN/N}$ $\sigma_{\Im}$-примарна. Следовательно, подгруппа KN/N является $\sigma_{\Im}$-субнормальной в NE/N.

(5) Поскольку A $\sigma_{\Im}$-примарна, то каждая подгруппа группы A является $\sigma_{\Im}$-субнормальной в A. Таким образом, это утверждение является следствием утверждения (2).

(6) Сначала покажем, что $A\le M_G$. В самом деле, если M нормальна в G, то это очевидно. Теперь предположим, что G/M_G является $\Im$-группой. Тогда из изоморфизма

$$AM_G/M_G\simeq A/A\cap M_G$$

получаем, что $A=A^{\Im}\le A\cap M_G$, поэтому $A\le M_G$. Наконец, если G/M_G является σ_j-группой для некоторых $j\ne0$ и $\sigma_j\in\sigma$, то аналогичным образом получаем, что $A=O^{\sigma_j}(A)\le A\cap M_G$, поэтому $A\le M_G$.

Выбор G означает, что A субнормальна в M, поэтому A субнормальна в M_G в силу утверждения (1). Поэтому A субнормальна в G.

(7) Поскольку всякая $\sigma_{\Im}$-субнормальная подгруппа является σ-субнормальной в G, где $\sigma=\{\sigma_0\}\cup\{\sigma_i\mid i\in I\}$, то это утверждение является следствием леммы 2.6 (10) работы [5]. □

***Лемма* 1.1.** *Если группа G $\sigma_{\Im}$-разрешима, то G имеет полное холлово $\sigma_{\Im}$-множество.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Понятно, что G σ-разрешима, где

$$\sigma=\{\sigma_0\}\cup\{\sigma_i\mid i\in I\},$$

и поэтому G имеет полное холловское σ-множество $\mathcal{H}=\{H_0,H_1,\ldots,H_t\}$ ввиду теоремы B работы [11]. Не теряя общности, мы можем предполагать, что H_i – σ_i-группа для всех $i=0,1,\ldots,t$. Таким образом, нам необходимо лишь доказать, что $H_0\in\Im$.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и R является σ_k-группой. По теореме 0.2 (4) условие выполнено для G/R, поэтому

$$H_0R/R\simeq H_0/(H_0\cap R)\in\Im$$

и $H_0\cap R\ne1$ ввиду выбора группы G. Но главный фактор $R/1$ группы G является $\sigma_{\Im}$-примарным, поскольку G $\sigma_{\Im}$-разрешима. Значит, $R,H_0\cap R\in\Im$ и поэтому $H_0\in\Im$, так как класс $\Im$ наследственен и замкнут относительно расширений. □

2 Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3. Так как импликации (i) $\Rightarrow$ (iii) и (iv) $\Rightarrow$ (v) очевидны, то достаточно доказать импликации (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (v), (iii) $\Rightarrow$ (i), (i) $\Rightarrow$ (iv) и (v) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Для группы G имеет место разложение $G=H_0\times H_1\times\cdots\times H_t$, где H_i – $\sigma_{\Im}$-примарная группа для всех i.

Пусть H/K – произвольный главный фактор группы G, лежащий ниже подгруппы H_i. Тогда

$$H_0\times H_1\times\cdots\times H_{i-1}\times H_{i+1}\times\cdots\times H_t\le C_G(H/K)$$

и поэтому $G/C_G(H/K)$ является фактор группой группы H_i. Таким образом, группа $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ является $\sigma_{\Im}$-примарной. Теперь, применяя теорему 3.2 из [10, гл. A], мы получаем, что каждый главный фактор группы G является $\sigma_{\Im}$-центральным в G.

(ii) $\Rightarrow$ (v) Пусть M – максимальная подгруппа в G. Предположим, что $M_G\ne1$. Ясно, что условие (ii) верно для G/M_G, поэтому M/M_G $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G/M_G по индукции. Следовательно, M $\sigma_{\Im}$-субнормальна в G по теореме 0.2 (3).

Теперь предположим, что $M_G = 1$. Тогда, согласно [10, A, 15.2], либо G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу R, либо G имеет ровно две минимальные нормальные подгруппы R и N и выполняются следующие условия: R и N – изоморфные неабелевы группы, $R \cap M = 1 = N \cap M$ и $C_G(R) = N$. Пусть $C = C_G(R)$.

Предположим, что R – абелева группа. Тогда, ввиду [10, A, 15.2], $C = R$ и поэтому в этом случае группа

$$G \simeq G / M_G \simeq R \rtimes (G / C_G(R))$$

$\sigma_{\mathfrak{Z}}$-примарна. Следовательно, для некоторых $\sigma_i \in \sigma$, G является σ_i-группой и, кроме того, в случае $i = 0$ мы имеем $G \in \mathfrak{I}$. Но тогда M $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-субнормальна в G. Аналогично получаем, что M $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-субнормальна в G и в случае, когда $C = 1$. Наконец, если $C = N$, то

$$G / N \simeq M \simeq G / R$$

$\sigma_{\mathfrak{Z}}$-примарна. Отсюда следует, что M $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-субнормальна в G.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Это следует из теоремы 0.2 (7), поскольку каждый член множества $\mathcal{H}$ $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-субнормален G по условию.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Это следует из импликаций (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (v) и того очевидного факта, что каждая подгруппа $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-нильпотентной группы σ-нильпотентна.

(v) $\Rightarrow$ (i) Предположим, что это неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка.

Прежде всего заметим, что G $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-разрешима. Действительно, для любой максимальной подгруппы M группы G группа G / M_G является $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-примарной, а значит, G / M_G $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-разрешима. Но тогда $G / \Phi(G)$ является подпрямым произведением некоторых $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-разрешимых групп, откуда следует, что $G / \Phi(G)$ $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-разрешима. Следовательно, G – $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-разрешимая группа, и поэтому G – σ-разрешимая группа.

Ввиду леммы 1.1, G имеет полное холловское $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-множество $\mathcal{H} = \{H_0, H_1, \ldots, H_t\}$. Не теряя общности, мы можем предполагать, что H_i – σ_i-группа для всех $i = 0, 1, \ldots, t$.

Пусть $H = H_i$ и R – минимальная нормальная подгруппа группы G. Покажем, что H нормальна в G. Предположим, что это неверно. Тогда $H \neq 1$. По теореме 0.2(4) условие выполнено для G / R, поэтому HR / R нормальна в G / R в силу выбора G. Значит, можно считать, что $R \nleq H$, поэтому $R \cap H = 1$, так как G $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-разрешима. Если G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$, то, как и выше, получаем, что HN нормальна в G, а значит,

$$RH \cap NH = H(R \cap NH) = H(R \cap N) = H$$

нормальна в G. Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Более того, имеем $R \nleq \Phi(G)$, так как группа $HR / R \simeq H$ $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-нильпотентна и HR нормальна в G. Пусть M – максимальная подгруппа в G такая, что $G = RM$. Тогда $M_G = 1$. Но M $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-субнормальна в G по условию и поэтому $G \simeq G / M_G$ $\sigma_{\mathfrak{Z}}$-примарна, откуда следует, что $H = G$ поскольку $H \neq 1$. Это противоречие показывает, что (v) $\Rightarrow$ (i). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

2. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Вопросы физики, математики и техники. – 2015. – Т. 3, № 24. – P. 67–81.

3. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.

4. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

5. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

6. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

7. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

8. *G-covering subgroup systems for some classes of σ-soluble groups* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.

9. *A Robinson description of finite $P\sigma T$-groups* / Xin-Fang Zhang, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2023. – DOI: doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.04.023.

10. *Doerk*, *K. Finite Soluble Groups* / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

11. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2016. – Vol. 15, № 5. – DOI: 10.1142/S0219498816500857.

Поступила в редакцию 28.04.2023.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Соболь Ирина Александровна – ст. преподаватель