

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ σ -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова

INJECTORS OF FINITE σ -SOLUBLE GROUPS

N.T. Vorob'ev, E.D. Volkova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Аннотация. Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Конечная группа G называется σ -разрешимой, если каждый главный фактор H/K группы G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ называется σ -классом Хартли. В работе доказаны существование и сопряженность \mathfrak{F} -инъекторов в G и описана их характеристика в терминах радикалов.

Ключевые слова: σ -разрешимая группа, σ -класс Хартли, инъектор.

Для цитирования: Воробьев, Н.Т. Инъекторы конечных σ -разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75. – EDN: RSKBWR

Abstract. Let $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ be some partition of the set of all primes \mathbb{P} , i. e. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. Finite group G is σ -soluble, if every chief factor H/K of G is a σ_i -group for some $\sigma_i \in \sigma$. Fitting class $\mathfrak{F} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ is said to be σ -class Hartley. In this paper we prove the existence and conjugacy of \mathfrak{F} -injectors of G and describe their characterization in the terminal of the radicals.

Keywords: σ -soluble group, σ -class Hartley, injector.

For citation: Vorob'ev, N.T. Injectors of finite σ -soluble groups / N.T. Vorob'ev, E.D. Volkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75 (in Russian). – EDN: RSKBWR

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Классом групп называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Для многих исследований в теории групп и их классов основополагающими являются теоремы Силова [2] и Холла [3]. Изящное обобщение этих теорем в терминах классов Фиттинга было получено в работе Гащюца, Фишера и Хартли [4], где доказано, что для любого класса Фиттинга разрешимых групп \mathfrak{F} в каждой разрешимой группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется классом Фиттинга, если \mathfrak{F} замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. При этом подгруппу V группы G называют \mathfrak{F} -инъектором, если $V \cap N$ является

максимальной из подгрупп G , принадлежащих \mathfrak{F} , для любой субнормальной подгруппы N группы G . В последующем развитие методов локализации в теории групп привело к серии результатов [5]–[13], посвященных как обобщению теоремы Гащюца – Фишера – Хартли, так и нахождению характеристик инъекторов в терминах радикалов и холловых подгрупп.

В работах А.Н. Скибы [14]–[16] был предложен оригинальный метод исследования групп при помощи наличия у них σ -свойств, который состоит в следующем.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G . Пусть σ – некоторое разбиение \mathbb{P} , т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется σ -примарной,

если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ -примарных групп G_1, G_2, \dots, G_n ; σ -разрешимой, если каждый главный фактор G σ -примарен.

В настоящей работе мы применяем указанный метод Скибы для доказательства существования и сопряженности \mathfrak{H} -инъекторов и их характеристики в любой σ -разрешимой группе для случая, когда \mathfrak{H} – σ -класс Хартли. При этом, следуя [6], класс Фиттинга \mathfrak{H} вида

$$\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

будем называть σ -классом Хартли. Следствиями полученных результатов (теорема 4.3) являются, в частности, характеристики инъекторов разрешимых групп, полученные Фишером [5], Хартли [6], Го Вэньбином и Н.Т. Воробьевым [12], Наингом, Го Вэньбином и Н.Т. Воробьевым [13].

1 Предварительные сведения

Напомним, если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа, которую называют \mathfrak{F} -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов групп \mathfrak{F} и \mathfrak{H} называют класс групп $(G : \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{F} \text{ и } G/N \in \mathfrak{H})$; произведением $\mathfrak{F}\delta\mathfrak{H}$ классов Фиттинга \mathfrak{F} и \mathfrak{H} называют класс групп $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если \mathfrak{H} замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\delta\mathfrak{H}$ [1, с. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Лемма 1.1 [1, замечание IX.1.11]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\delta\mathfrak{H}$.

Класс групп \mathfrak{F} называется гомоморфом, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы N группы G . Если класс групп \mathfrak{F} является одновременно гомоморфом и классом Фиттинга, то его называют радикальным гомоморфом.

Лемма 1.2 [17, лемма 4]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые классы Фиттинга и \mathfrak{M} – радикальный гомоморф. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$.

Класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Если \mathfrak{F} – непустая формация, то любая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу, факторгруппа по которой принадлежит \mathfrak{F} . Ее называют \mathfrak{F} -кордикалом G и обозначают $G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – формации. Класс групп $\mathfrak{F}^\circ\mathfrak{H} = (G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называют *произведением формаций* \mathfrak{F} и \mathfrak{H} .

Лемма 1.3 [1, теорема IV.1.8 (a), (b)]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$ для всех групп G ;
- 2) $G^{\mathfrak{F}^\circ\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ для всех групп G .

Лемма 1.4 [1, IX.1.1 (a)]. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Если $N \trianglelefteq G$, то

$$N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}.$$

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Подгруппу V группы G называют:

(1) \mathfrak{F} -максимальной в G , если $H \in \mathfrak{F}$ и из условий $V \leq H \leq G$ и $H \in \mathfrak{F}$ следует, что $V = H$;

(2) \mathfrak{F} -инъектором G , если $V \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G .

Лемма 1.5 [1, IX.1.3]. Пусть G – группа и \mathfrak{F} – класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $K \trianglelefteq G$ и V – \mathfrak{F} -инъектор G , то $V \cap K$ – \mathfrak{F} -инъектор K ;

2) если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и V – \mathfrak{F} -инъектор G , то $G_{\mathfrak{F}} \leq V$ и V – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G ;

3) если V – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – \mathfrak{F} -инъектор для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G , то V – \mathfrak{F} -инъектор G ;

4) если V – \mathfrak{F} -инъектор G и $\alpha : G \rightarrow G\alpha$ – изоморфизм, то $V\alpha$ – \mathfrak{F} -инъектор $G\alpha$.

Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Тогда группу G называют \mathfrak{F} -скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. Известно, что если G разрешима, то группа G \mathfrak{N} -скована, т. е. $C_G(F(G)) \leq F(G)$, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга G . Произведение всех нормальных σ -нильпотентных подгрупп группы G называется σ -фиттинговой подгруппой G и обозначается через $F_{\sigma}(G)$ [16].

Лемма 1.6 [16, лемма 3.1]. Если группа G σ -разрешима, то $C_G(F_{\sigma}(G)) \leq F_{\sigma}(G)$, т. е. группа G является \mathfrak{N}_{σ} -скованной.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется *наследственным*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H группы G . Фиттинговой *формацией* называют класс групп, который одновременно является *формацией* и *классом Фиттинга* (см., например, [1, XI.1]).

Лемма 1.7 [14, лемма 2.1]. Пусть \mathfrak{S}_{σ} – класс всех σ -разрешимых групп. Тогда \mathfrak{S}_{σ} является наследственной фиттинговой *формацией*.

Лемма 1.8 [15, теорема 3.18]. Класс \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп является наследственным классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ – некоторые непустые классы групп, $t \geq 2$. Тогда класс групп $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_t$, состоящий из всех групп

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t,$$

где $G_i \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, называют прямым произведением (см. [18, определение 17.6]) классов $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$ и \mathfrak{F}_i – классы Фиттинга, то $\times_{i=1}^t \mathfrak{F}_i$ является классом Фиттинга [1, пример XI. (1.6)].

Лемма 1.9 [10]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_n$, где $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, $\cup_{i=1}^n \pi(\mathfrak{F}_i) = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^2$ – непустая насыщенная формация Фиттинга для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда каждая конечная группа обладает \mathfrak{F} -инъектором.

Лемма 1.10 [9, теорема 1]. Пусть

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_t,$$

где все \mathfrak{F}_i являются непустыми классами Фиттинга и $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть G – такая группа, что $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}_i = \times_{j \neq i} \mathfrak{F}_j$ и $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$. Для каждого i , $1 \leq i \leq t$ выберем \mathfrak{F}_i -подгруппу V_i в C_i , содержащую $G_{\mathfrak{F}_i}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $V_i \setminus V_j = 1$ для всех $i \neq j$;
- 2) $V_1 V_2 \dots V_t = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_t$ – \mathfrak{F} -подгруппа, содержащая $G_\mathfrak{F}$;
- 3) если V_i \mathfrak{F}_i -максимальна в C_i для любого i , то $V_1 V_2 \dots V_t$ \mathfrak{F} -максимальна в G ;
- 4) если для каждого i подгруппа V_i является \mathfrak{F}_i -инъектором в C_i , то $V_1 V_2 \dots V_t$ является \mathfrak{F} -инъектором в G ;
- 5) если S – \mathfrak{F} -инъектор группы G , то $S_{\mathfrak{F}_i}$ – \mathfrak{F}_i -инъектор в C_i для любого i ;
- 6) если для каждого i подгруппа V_i сопряжена в C_i с некоторой подгруппой U_i из C_i , то $U_1 U_2 \dots U_t$ является подгруппой, сопряженной с $V_1 V_2 \dots V_t$ в G .

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Натуральное число n называется Π -числом, если

$$\pi(n) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i.$$

Подгруппа H группы G называется Π -подгруппой G , если $|H|$ является Π -числом. Если $|H|$ – Π -число и индекс $|G:H|$ – Π' -число, то H называют холловой Π -подгруппой G [14].

Теорема Скибы [14, теорема В]. Группа G σ -разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\Pi \subseteq \sigma$ группа G содержит холлову Π -подгруппу E и каждая Π -подгруппа G содержится в некотором сопряжении подгруппы E .

Лемма 1.11 [19, теорема В (b)]. Если \mathfrak{F} – непустой неединичный класс Фиттинга и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то класс всех \mathfrak{F} -скованных групп является классом Фиттинга.

2 σ -Класс Хартли и его локальные задания

Пусть σ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} . Всякое отображение вида $h: \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется σ -функцией Хартли или просто H_σ -функцией [20]. Если H – H_σ -функция, то символом $Supp(h)$ обозначают носитель h , т. е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Следуя [20], пусть $LH_\sigma(h) = (G: G=1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$, где \mathfrak{E}_{σ_i} и \mathfrak{E}'_{σ_i} – классы всех σ_i -групп и всех σ'_i -групп соответственно.

Определение. Класс Фиттинга \mathfrak{H} назовем σ -классом Хартли, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ -функции h . В частности, если

$$\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\},$$

то \mathfrak{H} называют классом Хартли [3].

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ – σ -класс Хартли, определяемый H_σ -функцией h , и $\Pi = Supp(h)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$;
- 2) $G \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
- 3) $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i})$.

Доказательство. 1. Если $\sigma_i \in \Pi$, то $(1) \in h(\sigma_i)$ и для любой σ_i -группы G такой, что $G \neq 1$ имеем $\sigma(G) = \{\sigma_i\}$. Поскольку $G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, по утверждению 1) леммы 1.3 из $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}} \leq G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = 1$ следует $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}} = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}$ и по лемме 1.1

$$G \in (1) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}$$

для любого $\sigma_i \in \Pi$. По определению произведения классов Фиттинга $G/G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}$ и поэтому $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$. Ввиду определения $h(\sigma_i)$ -радикала, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ и $G \in \mathfrak{H}$. Значит, $\Pi \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

Если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, то для некоторой группы $G \in \mathfrak{H}$ имеем $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}'_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Значит,

$\sigma_i \in \Pi$ и $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \Pi$. Таким образом, $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$.

2. Если $\sigma_i \in \sigma(G)$ и G – \mathfrak{H} -группа, то $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Поскольку $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$ и произведение $\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация,

$$(G / G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}}) / (G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_i)}^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}}) \cong G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Следовательно, $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Обратно, если для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$ и, следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Значит, $G \in \mathfrak{H}$.

3. Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $|G|$ – $\sigma(\mathfrak{H})$ -число. Ввиду утверждения 1) $\sigma(\mathfrak{H}) = \Pi$ и поэтому $|G|$ – Π -число, то есть G – Π -группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_{\Pi}$. Кроме того, из $G \in \mathfrak{H}$ по утверждению 2) следует $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если $\sigma \in \Pi \setminus \sigma(G)$, то

$$G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Таким образом, $G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i})$ и

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}).$$

Докажем обратное включение. Действительно, если $G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i})$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, по утверждению 2) леммы $G \in \mathfrak{H}$ и

$$\mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) \subseteq \mathfrak{H}. \quad \square$$

Многие известные классы групп являются σ -классами Хартли, что подтверждают следующие

Примеры 2.2. 1. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$ – класс всех σ -нильпотентных групп, в частности, всех нильпотентных групп, h – H_{σ} -функция такая, что $h(\sigma_i) = (1)$ – класс единичных групп для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$\begin{aligned} LH_{\sigma}(h) &= \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} (1) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \\ &= (1) (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_{\sigma}. \end{aligned}$$

2. Пусть \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{H} = \mathfrak{X} \mathfrak{N}_{\sigma}$, h – H_{σ} -функция такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$LH_{\sigma}(h) = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{X} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{X} (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \mathfrak{X} \mathfrak{N}_{\sigma}.$$

3. Напомним, что через \mathfrak{N}_{σ}^k обозначают произведение $\mathfrak{N}_{\sigma} \dots \mathfrak{N}_{\sigma}$, состоящей из k сомножителей \mathfrak{N}_{σ} , где $k \in \mathbb{N}$; \mathfrak{N}_{σ}^0 является классом групп порядка 1 по определению. Наименьшее n такое, что $G \in \mathfrak{N}_{\sigma}^n$ называется σ -нильпотентной длиной группы G [21, с. 959].

Если $k \in \mathbb{N}$, то \mathfrak{N}_{σ}^k – класс всех групп σ -нильпотентной длины не превосходящей k . Пусть $k \geq 1$ и H_{σ} -функция h такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда с учетом примера (2) получаем, что $LH_{\sigma}(h) = \mathfrak{N}_{\sigma}^k$ является σ -классом Хартли.

4. Пусть $\Pi \subseteq \sigma$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\Pi}$ и h – H_{σ} -функция такая, что

$$h(\sigma_i) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \sigma_i \in \Pi', \\ \mathfrak{E}_{\Pi}, & \text{если } \sigma_i \in \Pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } LH_{\sigma}(h) &= \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \\ &= \mathfrak{E}_{\Pi} \cap \mathfrak{E}_{\Pi} (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \mathfrak{E}_{\Pi}. \end{aligned}$$

Следуя [20], [22], произведем классификацию H_{σ} -функций σ -класса Хартли.

Пусть h – H_{σ} -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} . Тогда h назовем:

(1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$;

(2) *устойчивой* [22], если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для всех $i \neq j$;

(3) *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной H_{σ} -функцией.

Лемма 2.3. *Каждый σ -класс Хартли \mathfrak{H} определяется приведенной H_{σ} -функцией.*

Доказательство. Поскольку \mathfrak{H} – σ -класс Хартли, определяемый H_{σ} -функцией h , по утверждению 3) леммы 2.1

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}),$$

где $\Pi = \text{Supp}(h)$. Определим H_{σ} -функцию φ такую, что $\varphi(\sigma_i) = h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$. Очевидно, $\varphi(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. По лемме 1.2 $\varphi(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $LH_{\sigma}(\varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Обратно, пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда по утверждению 2) леммы 2.1 $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. По определению произведения классов Фиттинга $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Так как $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G$, то $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{H}$. Получаем $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H} = \varphi(\sigma_i)$. Значит, $G \in \varphi(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и

$$G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \varphi(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = LH_{\sigma}(\varphi).$$

Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq LH_{\sigma}(\varphi)$ и $\mathfrak{H} = LH_{\sigma}(\varphi)$. \square

Напомним, что если \mathfrak{X} – некоторый класс групп, то символом $Fit \mathfrak{X}$ будем обозначать класс Фиттинга, порожденный \mathfrak{X} , т. е. пересечение всех классов Фиттинга, содержащих \mathfrak{X} .

Лемма 2.4. *Каждый σ -класс Хартли \mathfrak{H} определяется устойчивой приведенной H_σ -функцией.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{H} – σ -класс Хартли. По лемме 2.3 $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h_1)$ для некоторой приведенной H_σ -функции h_1 . Пусть $\Pi = \text{Supp}(h)$. Определим класс групп следующим образом:

$$\psi(\sigma_i) = (G : G \cong H^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \text{ для некоторой группы } H \in h_1(\sigma_i))$$

для всех $i \in I$.

Пусть группа $X \in \psi(\sigma_i)$. Тогда $X \cong Y^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ для некоторой группы $Y \in h_1(\sigma_i)$. Ввиду замкнутости классов Фиттинга относительно взятия нормальных подгрупп, $Y^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h_1(\sigma_i)$. Значит, $X \in h_1(\sigma_i)$ и $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$ для всех $i \in I$. Следовательно, по лемме 1.2 $\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$.

Если $Y_1 \in h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $Y_1 / (Y_1)_{h_1(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq (Y_1)_{h_1(\sigma_i)}$. Следовательно, $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h_1(\sigma_i)$.

Поскольку $((Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}})^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = (Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$, имеем $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \psi(\sigma_i)$. Значит, по определению произведения классов групп $Y_1 \in \psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}. \quad (2.1)$$

Пусть h – H_σ -функция такая, что $h(\sigma_i) = \text{Fit}(\psi(\sigma_i))$ для каждого $i \in I$. Докажем, что $LH_\sigma(h) = \mathfrak{H}$. Поскольку $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$, имеем

$$h(\sigma_i) = \text{Fit}(\psi(\sigma_i)) \subseteq \text{Fit}(h_1(\sigma_i)) = h_1(\sigma_i).$$

Следовательно, по лемме 1.2

$$h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

для всех $i \in I$ и поэтому $LH_\sigma(h) \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем обратное включение. Ввиду равенства (2.1)

$$\text{Fit}(h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}) = h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \text{Fit}(\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}).$$

Так как $\psi(\sigma_i) \subseteq \text{Fit}(\psi(\sigma_i))$, то по лемме 1.2

$$\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \text{Fit}(\psi(\sigma_i))\mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} &= \text{Fit}(\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}) \subseteq \\ &\subseteq \text{Fit}(\psi(\sigma_i))\mathfrak{E}_{\sigma_i} = h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда по лемме 1.2 $h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$.

Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq LH_\sigma(h)$ и $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$.

Так как $h(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и h_1 является приведенной H_σ -функцией \mathfrak{H} , то $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$ и h – приведенная H_σ -функция.

Покажем, что для любой H_σ -функции h справедливо включение $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для

всех $i \neq j$. Пусть группа $L \in h_1(\sigma_i)$ и $i \neq j$. Поскольку $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$, имеем $\mathfrak{E}_{\sigma_j} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Ввиду утверждения 1) леммы 1.3 $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$. Так как h_1 – приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} и $L \in h_1(\sigma_i)$, то $L \in \mathfrak{H}$. По условию 2) леммы 2.1 $L \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Значит, $L / L_{h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \leq L_{h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$. Тогда $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$.

Таким образом, мы получаем, что для всех групп $G \in h_1(\sigma_i)$ \mathfrak{E}_{σ_i} -корадикал G содержится в $h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, если $R \in \psi(\sigma_i)$, то $R \cong V^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ для некоторой группы $V \in h_1(\sigma_i)$ и $R \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Значит, $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= \text{Fit}(\psi(\sigma_i)) \subseteq \text{Fit}(h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}) = \\ &= h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j} = h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j} \end{aligned}$$

для всех $i \neq j$. □

3 h_σ -Радикалы для σ -класса Хартли

Пусть G – группа и h – H_σ -функция с носителем Π . Подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in \Pi} G_{h(\sigma_i)}$ назовем

h_σ -радикалом G .

Свойства h_σ -радикала для σ -класса Хартли \mathfrak{H} вида $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ с устойчивой H_σ -функцией h описывают следующие три леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией h . Если H – подгруппа группы G такая, что $H / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$, то $H \in \mathfrak{H}$.*

Доказательство. По условию подгруппа G_h нормальна в H . Следовательно, по лемме 1.4

$$G_{h(\sigma_j)} = (G_h)_{h(\sigma_j)} = G_h \cap H_{h(\sigma_j)} \leq H_{h(\sigma_j)}$$

для всех $\sigma_j \in \sigma$. Мы вначале покажем, что $G_h / (G_h)_{h(\sigma_j)}$ – σ'_j -группа для всех $\sigma_j \in \sigma$. Заметим,

$$\begin{aligned} G_{h(\sigma_j)}G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)} &\cong G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ &= G_{h(\sigma_j)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \end{aligned}$$

для всех $i \neq j$. По лемме 2.4 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$.

Значит, $G_{h(\sigma_i)} \in h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно,

$$G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j} \text{ и } G_{h(\sigma_i)}G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$$

для всех $i \neq j$. Тогда $G_h / G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и ввиду изоморфизмов

$$H_{h(\sigma_j)}G_h / H_{h(\sigma_j)} \cong G_h / G_h \cap H_{h(\sigma_j)} \cong$$

$\cong (G_h / G_{h(\sigma_j)}) / ((G_h \cap H_{h(\sigma_j)}) / G_{h(\sigma_j)})$,
 заключаем, что $H_{h(\sigma_j)} G_h / H_{h(\sigma_j)}$ – σ'_j -группа.

Поскольку группа H / G_h σ -нильпотентна,

$$H / G_h \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}.$$

Следовательно, ввиду изоморфизма

$$H / H_{h(\sigma_j)} G_h \cong (H / G_h) / (H_{h(\sigma_j)} G_h / G_h),$$

$$H / H_{h(\sigma_j)} G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$$

для всех $\sigma_j \in \sigma$. Поскольку $G_h \leq H_{h(\sigma_j)}$ по условию, $H_{h(\sigma_j)} G_h = H_{h(\sigma_j)}$ и $H / H_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, $H \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $H \in \mathfrak{H}$. \square

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией h . Тогда для любой σ -разрешимой группы G справедливо равенство

$$G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_\sigma(G / G_h).$$

Доказательство. Пусть $F_\sigma(G / G_h) = R / G_h$.

Поскольку H_σ -функция h является приведенной для σ -класса Хартли \mathfrak{H} , то

$$(G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = G_{\mathfrak{H}} \cap G_{h(\sigma_i)} = G_{h(\sigma_i)}.$$

Ввиду $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H} = \cap_{i \in I} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, следует $G_{\mathfrak{H}} \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Значит,

$$G_{\mathfrak{H}} / (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Так как класс $\mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация, то

$$(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)}) / (G_h / G_{h(\sigma_i)}) \cong G_{\mathfrak{H}} / G_h$$

и $G_{\mathfrak{H}} / G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Следовательно, $G_{\mathfrak{H}} / G_h$ – σ -нильпотентная подгруппа группы G / G_h . Таким образом, $G_{\mathfrak{H}} / G_h \leq F_\sigma(G / G_h)$ и $G_{\mathfrak{H}} \leq R$.

Докажем обратное включение. Так как подгруппа R / G_h σ -нильпотентна, то по лемме 3.1 $R \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $R \leq G_{\mathfrak{H}}$ и

$$F_\sigma(G / G_h) = G_{\mathfrak{H}} / G_h. \quad \square$$

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией h и G – σ -разрешимая группа. Если H – \mathfrak{H} -подгруппа группы G такова, что $G_{\mathfrak{H}} \leq H \leq G$, то $H / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$.

Доказательство. Так как $G_{\mathfrak{H}} \trianglelefteq H$ и H_σ -функция h является приведенной, то по лемме 1.4 $G_{h(\sigma_i)} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $[H_{h(\sigma_i)}, G_{\mathfrak{H}}] \leq H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = G_{h(\sigma_i)}$ и

$$H_{h(\sigma_i)} \leq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)}) \leq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_h).$$

Поскольку по лемме 1.7 группа G / G_h σ -разрешима, то из леммы 1.6 следует, что

G / G_h \mathfrak{N}_σ -скована. Кроме того, по лемме 3.2 $G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_\sigma(G / G_h)$. Следовательно,

$$C_{G/G_h}(G_{\mathfrak{H}} / G_h) \leq G_{\mathfrak{H}} / G_h$$

и поэтому $C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_h) \leq G_{\mathfrak{H}}$. Тогда $H_{h(\sigma_i)} \leq G_{\mathfrak{H}}$, что влечет $G_{h(\sigma_i)} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = H_{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$ и поэтому $G_h = H_h$. Следовательно, $H / G_h = H / H_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для каждого $\sigma_i \in \sigma$ и H / G_h – σ -нильпотентная группа. \square

Ввиду лемм 3.1 и 3.3 получаем

Следствие 3.4. Пусть h – устойчивая приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли

$$\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i},$$

G – σ -разрешимая группа и ее подгруппа H такова, что $G_{\mathfrak{H}} \leq H \leq G$. Тогда $H \in \mathfrak{H}$ в том и только том случае, если H / G_h – σ -нильпотентная группа.

4 О существовании и сопряженности \mathfrak{H} -инъекторов в σ -разрешимой группе

В данном разделе мы решаем задачу существования и сопряженности инъекторов в σ -разрешимых группах для σ -классов Хартли. Ключевым моментом в реализации такой задачи являются результаты о существовании и сопряженности инъекторов, полученные Л.А. Шеметковым в работах [9] и [10] (см. леммы 1.9 и 1.10). Возможность применения указанных результатов для σ -нильпотентных инъекторов представляют следующие две леммы.

Лемма 4.1. В любой группе существуют σ -нильпотентные инъекторы.

Доказательство. Пусть σ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} . Заметим, что группа G σ -нильпотентна, если $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t$ для некоторых σ -примарных групп. Тогда класс всех σ -нильпотентных групп представим в виде

$$\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{E}_{\sigma_1} \times \mathfrak{E}_{\sigma_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{\sigma_t},$$

где \mathfrak{E}_{σ_i} – класс Фиттинга всех σ_i -групп для каждого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Кроме того, $\mathfrak{E}_{\sigma_i} = (\mathfrak{E}_{\sigma_i})^2$ и \mathfrak{E}_{σ_i} – насыщенная фиттингова формация. Итак, для класса Фиттинга \mathfrak{N}_σ все условия леммы 1.9 выполняются и поэтому в каждой группе существуют σ -нильпотентные инъекторы. \square

Лемма 4.2. Пусть G – σ -разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) в G существуют σ -нильпотентные инъекторы и любые два из них сопряжены;

2) подгруппа V группы G является σ -нильпотентным инъектором G тогда и только тогда, когда $F_\sigma(G) \leq V$ и V – \mathfrak{N}_σ -максимальная подгруппа группы G .

Доказательство. 1) Существование σ -нильпотентных инъекторов группы G следует по лемме 4.1. Для доказательства их сопряженности проверим выполнимость условий леммы 1.10. Заметим, что класс \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп является классом Фиттинга по лемме 1.8 и прямым произведением классов Фиттинга

$$\mathfrak{E}_{\sigma_1}, \mathfrak{E}_{\sigma_2}, \dots, \mathfrak{E}_{\sigma_t},$$

где все \mathfrak{E}_{σ_i} – непустые классы Фиттинга, и $\pi(\sigma_i) \cap \pi(\sigma_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Кроме того, поскольку группа G σ -разрешима, по лемме 1.6 $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$. Теперь будем использовать обозначения, введенные в лемме 1.10. Пусть $\mathfrak{H}_i = \times_{j \neq i} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$. Поскольку группа G σ -разрешима, то по лемме 1.7 ее подгруппа C_i является σ -разрешимой. Следовательно, по теореме Скибы для каждого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ в группе C_i существует холлова σ_i -подгруппа V_i , которая является \mathfrak{E}_{σ_i} -инъектором в C_i . Тогда по утверждению 4) леммы 1.10 подгруппа

$$H = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_t$$

является σ -нильпотентным инъектором группы G и по утверждению 5) леммы 1.10 каждый σ -нильпотентный инъектор строится таким образом. Сопряженность σ -нильпотентных инъекторов в группе G следует по утверждению 6) леммы 1.10, поскольку по теореме Скибы любые два σ -нильпотентных инъектора сопряжены в C_i . Утверждение 1) леммы доказано.

2) Пусть M – максимальная из σ -нильпотентных подгрупп группы G , содержащая ее σ -нильпотентный радикал $F_\sigma(G)$, и $U_i = U_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. По теореме Скибы каждая σ_i -подгруппа содержится в некоторой холловой σ_i -подгруппе, т. е. для любого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ существует такой элемент $x_i \in C_i$, что $U_i^{x_i} \leq V_i$. Тогда по утверждению 6) леммы 1.10 $U_1^{x_1} U_2^{x_2} \dots U_t^{x_t}$ является \mathfrak{N}_σ -подгруппой, сопряженной с $M = U_1 U_2 \dots U_t$. Следовательно, $M^x \subseteq H$ для некоторого $x \in G$. Но H – σ -нильпотентный инъектор и поэтому по утверждению 3) леммы 1.5 H – максимальная из σ -нильпотентных подгрупп G . Следовательно, $M^x = H$. \square

Напомним, что если h – некоторая H_σ -функция, то подгруппа $G_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} G_{h(\sigma_i)}$ – h_σ -радикал группы G .

Теорема 4.3. Пусть σ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} и $\mathfrak{H} = \bigcap_{i \in I} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией

h . Тогда для любой σ -разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа V группы G является \mathfrak{H} -инъектором G в том и только том случае, если V / G_h является σ -нильпотентным инъектором G / G_h ;

2) в G существуют \mathfrak{H} -инъекторы и любые два из них сопряжены;

3) множество всех \mathfrak{H} -инъекторов группы G – это в точности множество всех \mathfrak{H} -максимальных подгрупп G , содержащих \mathfrak{H} -радикал G .

Доказательство. 1. Поскольку группа G σ -разрешима, то по лемме 1.7 фактор G / G_h σ -разрешим. Следовательно, в G / G_h по утверждению 1) леммы 3.2 существует σ -нильпотентный инъектор V / G_h . Докажем, что подгруппа V является \mathfrak{H} -инъектором группы G . Для этого будем использовать индукцию по порядку группы G . Если G – единичная группа, то утверждение очевидно. Пусть $G \neq 1$ – контрпример минимального порядка и M – произвольная максимальная подгруппа G . Пусть $M_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} M_{h(\sigma_i)}$ –

h_σ -радикал M . Покажем вначале, что $M_h = M \cap G_h$. Для этого установим, что $G_h / G_{h(\sigma_j)}$ является σ'_j -группой для всех $\sigma_j \in \sigma$. Так как по условию h – устойчивая приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} , то по лемме 2.4 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для всех $i \neq j$. Тогда ввиду изоморфизма

$$G_{h(\sigma_j)} G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)} \cong G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)} = G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)}$$

следует, что $G_{h(\sigma_j)} G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)}$ является σ'_j -группой. Следовательно, по определению класса Фиттинга $G_h / G_{h(\sigma_j)}$ также является σ'_j -группой. Далее, используя лемму 1.4 и изоморфизм

$$(G_h \cap M) G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_j)} \cong (G_h \cap M) / (G_h \cap M) \cap G_{h(\sigma_j)} = (G_h \cap M) / G_{h(\sigma_j)} \cap M = (G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)},$$

получаем, что $(G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)}$ является σ'_j -группой для любого $\sigma_j \in \sigma$. Поскольку

$$(G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)} / M_h / M_{h(\sigma_j)} \cong (G_h \cap M) / M_h,$$

то $(G_h \cap M) / M_h \in \bigcap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j}$. Кроме того, очевидно $\bigcap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j} = \mathfrak{E}_{\bigcap_{\sigma_j \in \sigma} \sigma'_j} = \mathfrak{E}_{(\cup_{\sigma_j \in \sigma} \sigma_j)'} = (1)$.

Следовательно, справедливо равенство

$$G_h \cap M = M_h.$$

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $G_h \leq M$. Тогда $G_h = M_h$. Поскольку G – σ -разрешимая группа, по лемме 1.7 фактор G / G_h

σ -разрешим. Значит, по лемме 1.6 группа G/G_h \mathfrak{N}_σ -скована. Поскольку класс \mathfrak{N} всех нильпотентных групп является подклассом Фиттинга \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп, то по лемме 1.11 класс всех \mathfrak{N}_σ -скованных групп является классом Фиттинга. Тогда из

$$M/M_h = M/G_h \leq G/G_h$$

следует, что группа M/M_h является \mathfrak{N}_σ -скованной. Поскольку V/G_h – σ -нильпотентный инъектор G/G_h , то по утверждению 1) леммы 1.5 подгруппа $(V \cap M)/G_h$ является σ -нильпотентным инъектором группы M/G_h . Тогда ввиду равенства $G_h = M_h$, Подгруппа $(V \cap M)/M_h$ – σ -нильпотентный инъектор группы M/M_h . Следовательно, по индукции $V \cap M$ является \mathfrak{H} -инъектором M . Теперь, чтобы показать, что подгруппа V является \mathfrak{H} -инъектором G , достаточно выяснить, учитывая утверждение 3) леммы 1.5, \mathfrak{H} -максимальность V в G . Так как $V/G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$, то по лемме 2.5 V является \mathfrak{H} -подгруппой G . Предположим, $V < V_1$, где V_1 – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа G . Тогда

$$V \cap M = V_1 \cap M,$$

так как в противном случае мы получили бы противоречие с тем, что подгруппа $V \cap M$ \mathfrak{H} -максимальна в M . Итак, в данном случае подгруппа V_1 – \mathfrak{H} -максимальна в G и $V_1 \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G . Следовательно, по утверждению 3) леммы 1.5 V_1 – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Тогда $G_{\mathfrak{H}} \leq V_1$ и по следствию 3.4 V_1/G_h – σ -нильпотентная подгруппа G/G_h . Ввиду утверждения 2) леммы 1.5 получаем противоречие с тем, что подгруппа V/G_h – \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . Следовательно, $V/G_h = V_1/G_h$ и $V = V_1$.

Остается принять случай, когда $G_h \not\leq M$. В этом случае ввиду максимальной нормальной подгруппы M , $G = G_h M$. Следовательно, по лемме 1.7 ввиду σ -разрешимости группы G/G_h и изоморфизма $G_h M/G_h \cong M/M \cap G_h = M/M_h$, по лемме 1.6 подгруппа M/M_h \mathfrak{N}_σ -скована. Учитывая изоморфизм $G/G_h \cong M/M_h$ по утверждению 4) леммы 1.5 следует, что $(V \cap M)/M_h$ является σ -нильпотентным инъектором группы M/M_h . Теперь, применяя индукцию, получаем, что $V \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M . По лемме 3.1 V – \mathfrak{H} -подгруппа G . Если $V < F_1$, где F_1 –

\mathfrak{H} -максимальная подгруппа G , то $V \cap M = F_1 \cap M$.

Так как $G_{\mathfrak{H}} \leq V$, то $VM = G$. Следовательно,

$$F_1 = F_1 \cap VM = V(F_1 \cap M) = V(V \cap M) = V$$

и V является \mathfrak{H} -максимальной подгруппой G . Значит, ввиду произвольности выбора максимальной нормальной подгруппы M группы G , по утверждению 3) леммы 1.5 V – \mathfrak{H} -инъектор G .

Докажем обратное утверждение. Пусть V – \mathfrak{H} -инъектор G . Покажем, что V/G_h – \mathfrak{N}_σ -инъектор G/G_h . По утверждению 2) леммы 1.5 $G_{\mathfrak{H}} \leq V$ и подгруппа V \mathfrak{H} -максимальна в G . Следовательно, по лемме 3.3 V/G_h – σ -нильпотентная группа. Покажем, что подгруппа V/G_h \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . Предположим, что $V/G_h < V_1/G_h$ и V_1/G_h \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . Поскольку $V_1/G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$ и $V_1 \geq G_{\mathfrak{H}}$ по следствию 3.4 $V_1 \in \mathfrak{H}$. Но подгруппа V \mathfrak{H} -максимальна в G . Следовательно, $V = V_1$ и V/G_h – \mathfrak{N}_σ -максимальная подгруппа в G/G_h .

2) Существование \mathfrak{H} -инъекторов следует из утверждения 1) теоремы ввиду существования σ -нильпотентных инъекторов в группе G/G_h . Докажем сопряженность \mathfrak{H} -инъекторов группы G . Пусть F/G_h и V/G_h – σ -нильпотентные инъекторы G/G_h . Тогда по утверждению 1) леммы 4.2 подгруппы F/G_h и V/G_h сопряжены в G/G_h . Следовательно, F и V сопряжены в G .

3) Если V – \mathfrak{H} -инъектор группы G , то по утверждению 2) леммы 1.5 V \mathfrak{H} -максимален в G и $V \geq G_{\mathfrak{H}}$. Обратно, пусть V – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа G , содержащая \mathfrak{H} -радикал $G_{\mathfrak{H}}$. Так как h – приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} , то $G_h \leq G_{\mathfrak{H}}$ и, следовательно, $G_h \leq V$. Тогда по лемме 3.3 группа V/G_h σ -нильпотентна. Ввиду \mathfrak{H} -максимальности V в G , V/G_h – \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . По лемме 3.2

$$F_\sigma(G/G_h) \leq V/G_h.$$

Следовательно, по утверждению 2) леммы 4.2 V/G_h – \mathfrak{N}_σ -инъектор G/G_h . Теперь, используя утверждение 1) теоремы, мы получаем, что V – \mathfrak{H} -инъектор G . \square

5 Приложения

Приведем применение теоремы 4.3 для описания инъекторов в некоторых известных классах групп.

Следствие 5.1. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_\sigma$, где \mathfrak{X} – любой непустой класс Фиттинга и \mathfrak{N}_σ – класс всех σ -нильпотентных групп. Тогда подгруппа V

σ -разрешимой группы G является \mathfrak{H} -инъектором G в том и только том случае, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – σ -нильпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из утверждения 1) теоремы 4.3, поскольку ввиду примера 2.2(2) \mathfrak{H} является σ -классом Хартли, который определяется устойчивой приведенной H_{σ} -функцией h такой, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для каждого $\sigma_i \in \sigma$.

Группа G называется *мета- σ -нильпотентной*, если G содержит нормальную подгруппу N такую, что N и G/N σ -нильпотентны.

В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_{\sigma}$, получаем

Следствие 5.2. Подгруппа V σ -разрешимой группы G является мета- σ -нильпотентным инъектором G в том и только том случае, если $V/F_{\sigma}(G)$ – σ -нильпотентный инъектор $G/F_{\sigma}(G)$.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ – минимальное разбиение множества \mathbb{P} , получаем описание \mathfrak{XN} -инъекторов, полученное Хартли [6].

Следствие 5.3 [6, с. 206]. Пусть \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга, \mathfrak{N} – класс всех nilпотентных групп и $\mathfrak{H} = \mathfrak{XN}$. Тогда подгруппа V разрешимой группы G является \mathfrak{H} -инъектором G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – nilпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Если $\sigma = \sigma^1$ и \mathfrak{H} – класс Хартли с H -функцией h такой, что $h(p) = (1)$ для всех $p \in \mathbb{P}$ ((1) – класс всех единичных групп), то из теоремы 4.3 вытекает результат Фишера [5], описывающий множество всех nilпотентных инъекторов. Его представляет

Следствие 5.4. Множество всех nilпотентных инъекторов разрешимой группы – это множество всех nilпотентных максимальных подгрупп этой группы, содержащих ее радикал Фиттинга.

Следствие 5.5. Пусть \mathfrak{N}_{σ}^k – класс Фиттинга всех групп σ -нильпотентной длины, не превышающей k ($k \geq 1$) и G – σ -разрешимая группа. Тогда множество всех \mathfrak{N}_{σ}^k -инъекторов G в точности совпадает с множеством всех подгрупп V из G таких, что подгруппа $V/G_{\mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}}$ является σ -нильпотентным инъектором группы $G/G_{\mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}}$.

Доказательство. Ввиду примера 2.3(3) \mathfrak{N}_{σ}^k является σ -классом Хартли с устойчивой приведенной H_{σ} -функцией h такой, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}$ для всех $i \in I$. Так как G σ -разрешима, то по лемме 1.6 G/G_h является \mathfrak{N}_{σ} -скованной и утверждение следует из теоремы 4.3.

Заключение

В настоящей работе нами доказано существование и сопряженность \mathfrak{H} -инъекторов и найдена их характеристика в терминах радикалов для любой σ -разрешимой группы и σ -класса Хартли \mathfrak{H} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Sylow, M.L. Theoremes sur les groupes de substitutions / M.L. Sylow // Math. Ann. – 1872. – Vol. 5. – P. 584–594.
3. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.
4. Fisher, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
5. Fisher, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fisher. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.
6. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
7. Bessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Hauptfaktoren einfach sind / D. Bessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56, № 3. – P. 516–532.
8. Шеметков, Л.А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков; в кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.
9. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.
10. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomeľ'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebrы. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.
11. Liu, Y.F. Description of \mathfrak{F} -injectors of finite soluble groups / Y.F. Liu, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.
12. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
13. Yang, N. On \mathcal{F} -injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
14. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
15. Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics,

Mathematics and Technics. – 2015. – № 3 (24). – P. 70–83.

16. Чжан Чи. О Σ_i^σ -замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.

17. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

18. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

19. Iranzo, M.J. \mathfrak{F} -constraint with respect to a Fitting class / M.J. Iranzo, P. Monasor // Arch. Math. – 1986. – Vol. 46, № 5. – P. 205–210.

20. Guo, W. On σ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

21. Zhang Chi. On n-multiply σ -local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

22. Воробьев, Н.Т. Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н.Т. Воробьев, Т.Б. Караулова // Математические заметки. – 2019. – Vol. 105, № 2. – С. 214–227.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» и при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф21М-030).

Поступила в редакцию 28.01.2023.

Информация об авторах

Воробьев Николай Тимофеевич – д.ф.-м.н., профессор
Волкова Екатерина Дмитриевна – аспирантка