УДК 539.4
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_43
EDN: MJNIAY

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕДИНИЧНОЙ МАРТЕНСИТНОЙ ПРОСЛОЙКИ В ФЕРРОМАГНИТНОМ МОНОКРИСТАЛЛЕ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ, НАХОДЯЩЕМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ

В.О. Остриков[1], **О.М. Остриков**[2]

[1]*Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*

A STATIC AND DYNAMIC PROBLEM FOR A SINGLE MARTENSITIC LAYER IN A FERROMAGNETIC SINGLE CRYSTAL WITH A SHAPE MEMORY EFFECT IN A MAGNETIC FIELD IN A RIGID EMBODIMENT

V.O. Ostrikov[1], **O.M. Ostrikov**[2]

[1]*Sukhoi State Technical University of Gomel*
[2]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*

Аннотация. Решена статическая и динамическая задача для границ мартенситной прослойки в находящемся в магнитном поле механически не нагруженном ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, закрепленном в жесткой заделке. Показано, что для обеспечения статического равновесия необходимо наличие на границах раздела компенсационных сил, уравновешивающих действие магнитного поля.

Ключевые слова: *мартенситная прослойка*, *ферромагнитный монокристалл с памятью формы*, *межфазная граница раздела*.

Для цитирования: *Остриков*, *В.О.* Статическая и динамическая задача для единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В.О. Остриков, О.М. Остриков // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_43. – EDN: MJNIAY

Abstract. A static and dynamic problem is solved for the boundaries of a martensitic layer in a mechanically unloaded ferromagnetic single crystal with a shape memory effect located in a magnetic field and fixed in a rigid embodiment. It is shown that to ensure static equilibrium, it is necessary to have compensatory at the interfaces that balance the action of the magnetic field.

Keywords: *martensitic layer*, *ferromagnetic single crystal with shape memory*, *interface.*

For citation: *Ostrikov*, *V.O.* A static and dynamic problem for a single martensite layer in a ferromagnetic single crystal with a shape memory effect in a magnetic field in a rigid embodiment / V.O. Ostrikov, O.M. Ostrikov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_43 (in Russian). – EDN: MJNIAY

Введение

Интерес к активным исследованиям ферромагнитных материалов с эффектом запоминания формы вызван перспективами практического применения данных материалов в электротехнических системах нового поколения [1]–[8]. При этом растет актуальность разработки и применения инженерных расчетов для технических задач, связанных с уникальными физико-механическими свойствами материалов с памятью формы, восстанавливающих ее под действием магнитного поля [2].

Целью данной работы стало решение статической и динамической задачи для мартенситной прослойки, находящейся в призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке.

1 Постановка задачи

На рисунке 1.1 схематически представлен призматический монокристаллический ферромагнитный образец с памятью формы, находящийся в жесткой заделке. Пусть в монокристалле имеется единичная мартенситная прослойка длиной l_m. Длины аустенитных частей кристалла обозначим l_{a1} и l_{a2} (рисунок 1.1). Величины l_m, l_{a1} и l_{a2} примем за известные параметры.

В общем случае магнитное поле, в которое помещен кристалл, будем считать неоднородным, а силовое воздействие данного поля на границах раздела аустенит/мартенсит будем рассматривать посредством сил $\vec{F}_{Bmag}$ и $\vec{F}_{Cmag}$. В общем случае *неоднородного* магнитного поля

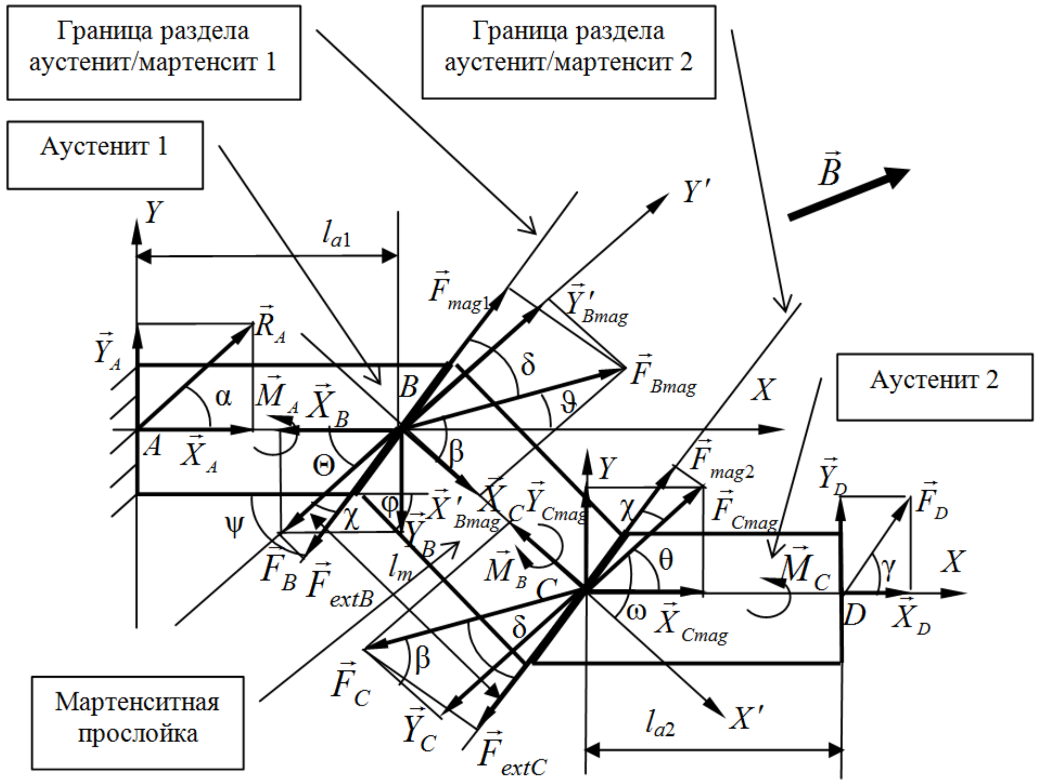

Рисунок 1.1 – Ферромагнитный призматический монокристаллический образец
с эффектом памяти формы с мартенситной прослойкой,
находящийся в жесткой заделке в магнитном поле

$\vec{B}$ данные силы не параллельны и величины этих сил не равны друг другу (т. е. $F_{Bmag} \neq F_{Cmag}$). Силы $\vec{F}_{Bmag}$ и $\vec{F}_{Cmag}$ будем считать заданными.

Действие магнитного поля на ферромагнитный призматический монокристалл с памятью формы смоделируем действующей на свободном торце образца силой $\vec{F}_D$ (рисунок 1.1). Величину этой силы и ее направление нужно определить.

Также необходимо рассчитать все моменты сил, действующие на мартенситный и аустенитные объемы ферромагнитного призматического монокристалла с памятью формы, и величину и направление реакции $\vec{R}_A$ заделки.

2 Решение статической задачи

1. Решение статической задачи удобно начинать с рассмотрения сил, действующих на второй аустенитный объем (рисунок 1.1), для которого в состоянии равновесия будем иметь:

$$\sum_i F_{iX} = X_D + F_{Cmag}\cos\theta - F_C\cos\vartheta = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_D + F_{Cmag}\sin\theta - F_C\sin\vartheta = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum_i M_C\left(F_i\right) = F_D l_{a2}\sin\gamma + M_C = 0, \quad (2.3)$$

где выполнена замена

$$X_D = F_D\cos\gamma, \;\; Y_D = F_D\sin\gamma. \quad (2.4)$$

В (2.1)–(2.4) γ, θ и ϑ – углы, показанные на рисунке 1.1; сила $\vec{F}_D$ уравновешивает действие силы $\vec{F}_{Cmag}$, инициированной магнитным полем; сила $\vec{F}_C$ уравновешивает действие силы $\vec{F}_{Bmag}$, также возникшую при включении магнитного поля; M_C – момент сил (рисунок 1.1). Предполагалось, что $\vec{F}_{Bmag}$ параллельна $\vec{F}_C$.

Тогда в условии статического равновесия из (2.1)–(2.3) получим

$$X_D = F_C\cos\vartheta - F_{Cmag}\cos\theta, \quad (2.5)$$

$$Y_D = F_C\sin\vartheta - F_{Cmag}\sin\theta, \quad (2.6)$$

$$M_C = -F_D l_{a2}\sin\gamma.$$

Следует учесть, что

$$\vec{F}_D = X_D\vec{i} + Y_D\vec{j}; \;\; F_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2};$$

$$\mathrm{tg}\gamma = Y_D / X_D. \quad (2.7)$$

2. Рассмотрение равновесия мартенситного объема приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{iX'} = F_{Cmag}\cos\omega - F_C\cos\beta + \\ + F_{Bmag}\cos\beta - F_B\cos\omega = 0,\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\sum_i F_{iY'} = F_{Cmag}\sin\omega - F_C\sin\beta + \\ + F_{Bmag}\sin\beta - F_B\sin\omega = 0,\end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\sum_i M_B(F_i) = F_{Cmag} l_m \sin\omega - -F_C l_m \sin\beta - M_B + M_C = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_i M_C(F_i) = -F_{Bmag} l_m \sin\beta + +F_B l_m \sin\omega + M_B - M_C = 0. \quad (2.11)$$

Здесь β и ω – углы, показанные на рисунке 1.1; $\vec{F}_B$ – сила, действующая на границе раздела аустенит/мартенсит и уравновешивающая действие силы $\vec{F}_{Cmag}$ на другой границе мартенситного объема; M_B – момент сил.

Из (2.10) и (2.11) получаем:

$$\left(F_{Cmag} + F_B\right)\sin\omega = \left(F_{Bmag} + F_C\right)\sin\beta. \quad (2.12)$$

3. Для первого аустенитного объема (рисунок 1.1) получим:

$$\sum_i F_{iX} = F_{Bmag}\cos\vartheta - F_B\cos\theta + X_A = 0,$$

$$\sum_i F_{iY} = F_{Bmag}\sin\vartheta - F_B\sin\theta + Y_A = 0,$$

$$\sum_i M_A(F_i) = F_{Bmag} l_{a1}\sin\vartheta - -F_B l_{a1}\sin\theta + M_A - M_B + M_C = 0.$$

Отсюда

$$X_A = F_B\cos\theta - F_{Bmag}\cos\vartheta,$$

$$Y_A = F_B\sin\theta - F_{Bmag}\sin\vartheta,$$

$$M_A = -F_{Bmag} l_{a1}\sin\vartheta + F_B l_{a1}\sin\theta + +F_{Cmag} l_m\sin\omega - F_C l_m \sin\beta.$$

Причем

$$\vec{R}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j};\ \ R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2};\ \ \mathrm{tg}\alpha = Y_A / X_A.$$

4. В приведенных выше системах уравнений число неизвестных превышает число уравнений. Поэтому перейдем к частному случаю и примем допущение:

$$F_{Bmag} = F_{Cmag}. \quad (2.13)$$

Правомерность такого допущения обусловлена тем, что величина l_m, как правило, достаточно мала, чтобы в рассматриваемой области мартенситной прослойки магнитное поле с высокой степенью точности можно считать *однородным*. Тогда из (2.8) получим

$$F_B\cos\omega = F_{Cmag}\left(\cos\omega + \cos\beta\right) - F_C\cos\beta, \quad (2.14)$$

а из (2.9) –

$$F_B\sin\omega = F_{Cmag}\left(\sin\omega + \sin\beta\right) - F_C\sin\beta. \quad (2.15)$$

Поделив (2.15) на (2.14), получим

$$\mathrm{tg}\omega = \frac{F_{Cmag}\left(\sin\omega + \sin\beta\right) - F_C\sin\beta}{F_{Cmag}\left(\cos\omega + \cos\beta\right) - F_C\cos\beta}. \quad (2.16)$$

Далее, преобразовывая (2.16) в

$$F_{Cmag}\mathrm{tg}\omega\left(\cos\omega + \cos\beta\right) - F_C\cos\beta\,\mathrm{tg}\omega = = F_{Cmag}\left(\sin\omega + \sin\beta\right) - F_C\sin\beta,$$

окончательно получим

$$F_C = F_{Cmag}\frac{\sin\omega + \sin\beta - \mathrm{tg}\omega\left(\cos\omega + \cos\beta\right)}{\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\omega}. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.5) и (2.6) будем иметь:

$$X_D = F_{Cmag} \times \left(\frac{\sin\omega + \sin\beta - \mathrm{tg}\omega\left(\cos\omega + \cos\beta\right)}{\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\omega}\cos\vartheta - \cos\theta\right), \quad (2.18)$$

$$Y_D = F_{Cmag} \times \left(\frac{\sin\omega + \sin\beta - \mathrm{tg}\omega\left(\cos\omega + \cos\beta\right)}{\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\omega}\sin\vartheta - \sin\theta\right). \quad (2.19)$$

Ввиду параллельности векторов и $\vec{F}_{Bmag}$ и $\vec{F}_{Cmag}$ в однородном магнитном поле из данных рисунка 1.1 будем иметь: $\vartheta = \theta$ и $\beta = \omega$. Это позволяет (2.18) и (2.19) преобразить к виду:

$$X_D = F_{Cmag}\cos\theta, \quad (2.20)$$

$$Y_D = F_{Cmag}\sin\theta. \quad (2.21)$$

Подстановка (2.20) и (2.21) в (2.7) дает:

$$F_D = \left|F_{Cmag}\right|;\ \ \gamma = \theta. \quad (2.22)$$

5. Учитывая (2.13) и то, что в *однородном* магнитном поле $\beta = \omega$, из (2.8) и (2.9) получим

$$2F_{Cmag} - F_C - F_B = 0, \quad (2.23)$$

а из (2.12) –

$$F_B = F_C. \quad (2.24)$$

Тогда из (2.23) и (2.24) следует

$$F_{Cmag} = F_C. \quad (2.25)$$

А из (2.13), (2.22), (2.24) и (2.25) получаем:

$$F_{Bmag} = F_{Cmag} = F_B = F_C = \left|F_D\right|.$$

Следует отметить, что для обеспечения статического равновесия рассматриваемого механически ненагруженного ферромагнитного монокристалла с мартенситной прослойкой, находящегося в магнитном поле (рисунок 1.1), необходимо наличие сил $\vec{F}_B$ и $\vec{F}_C$, обеспечивающих это равновесие. Эти силы впервые были обнаружены и описаны в работе [9], где были названы *компенсационными* силами.

3 Решение динамической задачи

Для решения динамической задачи воспользуемся уравнением типа, приведенного в [3]:

$$\frac{\rho A_0}{k_0}\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 + \frac{m_0 + \rho A_0\left(L - L_0\right)}{k_0}\frac{d^2L}{dt^2} = \Delta F_{ext}, \quad (3.1)$$

где ρ – объемная массовая плотность материала; A_0 – площадь поперечного сечения призматического образца; k_0 – коэффициент, связывающий скорость движения границы раздела аустенит / мартенсит (V_b) со скоростью плоскопараллельного перемещения мартенситной части монокристалла (V_m), причем $k_0 = V_b / V_m$ [27]; m_0 – начальная масса мартенситной части образца;

L_0 – начальное положение границы раздела аустенит/мартенсит; L – текущее положение границы; ΔF_{ext} – разность сил на границе раздела аустенит/мартенсит.

Как было показано в [2], решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$L(t) = \frac{1}{a}\left(\frac{D_1 t - 1}{D_2} \pm \sqrt{a\Delta F_{ext}}\, t - b\right). \qquad (3.2)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{\pm\sqrt{a\Delta F_{ext}} - aV_b}{aL_0 + b}, \quad D_2 = -\frac{1}{aL_0 + b}, \quad a = \frac{\rho A_0}{k_0},$$

$$b = \frac{m_0}{k_0} - aL_0.$$

Не трудно показать, что из (3.2) следует

$$\frac{dL(t)}{dt} = V_b = \frac{1}{a}\left(\frac{D_1}{D_2} \pm \sqrt{a\Delta F_{ext}}\right), \qquad (3.3)$$

а из (3.2) и (3.3) – $L(t) = V_b t + L_0$.

Отсюда для границ мартенситной прослойки очевидно следует

$$L_1(t) = V_{b1} t + L_{01}, \qquad (3.4)$$

$$L_2(t) = V_{b2} t + L_{02}, \qquad (3.5)$$

где индексы 1 и 2 указывают соответственно на первую или вторую границу мартенситной прослойки. Тогда из (3.4) и (3.5) получим

$$l_m(t) = L_2(t) - L_1(t).$$

Следует отметить, что для каждой из границ справедливо

$$\Delta F_{ext1} = F_{mag1} - F_{extB}, \qquad (3.6)$$

$$\Delta F_{ext2} = F_{mag2} - F_{extC}. \qquad (3.7)$$

Это указывает на то, что с точки зрения механики движущей силой бездиффузионных фазовых превращений в ферромагнитном монокристалле с памятью формы является разница в действии сил, инициированных на границах раздела аустенит / мартенсит, магнитным полем и компенсационных сил. Согласно (3.3), чем больше эта разница, тем выше скорость перемещения межфазных границ.

Следует отметить, что в (3.6) и (3.7)

$$F_{mag1} = F_{Bmag}\cos\delta, \quad F_{extB} = F_B\cos\chi,$$

$$F_{mag2} = F_{Cmag}\cos\chi, \quad F_{extC} = F_C\cos\delta.$$

Заключение

Таким образом, предложены варианты решения статической и динамической задачи для единичной мартенситной прослойки, находящейся в механически не нагруженном ферромагнитном материале с памятью формы, закрепленном в жесткой заделке. Показано, что для нахождения ферромагнитного образца в статическом равновесии в магнитном поле на межфазных границах должны действовать силы, компенсирующие воздействие магнитного поля. Скорость перемещения границ раздела определяется разницей сил, действующих со стороны магнитного поля, и компенсационных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laitinen*, *V.* Giant 5.8% magnetic-field-induced strain in additive manufactured Ni-Mn-Ga magnetic shape memory alloy / V. Laitinen, A. Saren, A. Sozinov, K. Ullakko // Scripta Materialia. – 2022. – Vol. 208. – P. 114324.

2. *Остриков*, *В.О.* Статика и динамика границы раздела аустенит / мартенсит в нагруженном призматическом монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / В.О. Остриков, О.М. Остриков // Машиностроение: республиканский межведомственный сборник научных трудов / Белорусский национальный технический университет; гл. ред. В.К. Шелег. – Минск: БНТУ, 2021. – Вып. 33. – С. 139–147.

3. *Saren*, *A.* Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni-Mn-Ga / A. Saren, K. Ullakko // Scripta Materialia. – 2017. – Vol. 139. – P. 126–129.

4. *Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials* / R.C. O'Handley, S.J. Murrey, M. Marioni, H. Nembach, S.M. Allen // J. Appl. Phys. – 2000. – Vol. 87. – P. 4712–4717.

5. 6% *magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic* Ni-Mn-Ga / S.J. Murrey, M. Marioni, S.M. Allen, R.C. O'Handley // Appl. Phys. Lett. – 2000. – Vol. 77. – P. 886–888.

6. *Ullakko*, *K.* Magnetically controlled shape memory alloys: a new class of actuator materials / K. Ullakko // J. Mater. Eng. Perform. – 1996. – Vol. 5. – P. 405–409.

7. *James*, *R.D.* Large field-induced strains in ferromagnetic shape memory materials / R.D. James, R. Tickle, M. Wuttig // Mater. Sci. Eng. – 1999. – Vol. A273–275. – P. 320–325.

8. *Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system* / R. Tickle, R.D. James, T. Shield, M. Wuttig, V.V. Kokorin // IEEE Trans. Magn. – 1999. – Vol. 35. – P. 4301–4310.

9. *Остриков*, *В.О.* Компенсационные силы на границах раздела аустенит / мартенсит единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В.О. Остриков, О.М. Остриков // Актуальные про-блемы прочности: сборник тезисов LXIV Международной конференции (Екатеринбург, 4 апреля 2022 г.). – Екатеринбург, 2022. – С. 366–367.

Поступила в редакцию 04.11.2022.

Информация об авторах

Остриков Владимир Олегович – магистрант

Остриков Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент