

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ЦИРКУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ КУММЕРА КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ. II. НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ENERGY PROPERTIES OF THE VECTOR CIRCULAR KUMMER BEAMS WITH TERMINATING POWER. II. THE NONHOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girdel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных циркулярных 3D световых пучков Куммера с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). При определенных ограничениях на свободные параметры такие пучки Куммера переносят конечную мощность. Вычислены и графически исследуются картины интенсивности и поперечные потоки энергии таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные циркулярные пучки, пучки Куммера, неоднородная поляризация, ТМ-моды.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_20. – EDN: DVBYBL

Abstract. The analytical expressions in the closed form for vector circular 3D light Kummer beams with nonhomogeneous polarization (TM-modes) are offered and investigated. At certain restrictions on free parameters such Kummer beams transfer terminating power. The pictures of intensity and crossflows of energy of such beams are calculated and are graphically investigated.

Keywords: paraxial beams, vector circular beams, Kummer beams, nonhomogeneous polarization, TM-modes.

For citation: Girdel, S.S. Energy properties of the vector circular Kummer beams with terminating power. II. The nonhomogeneous polarization / S.S. Girdel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_20 (in Russian). – EDN: DVBYBL

Введение

Чтобы охарактеризовать параксиальные световые пучки, как правило, [1]–[3] применяют аподизацию соответствующей амплитуды пучка функцией Гаусса. Тогда амплитудная функция, описывающая такой пучок, будет квадратично интегрируемой и поэтому такой параксиальный пучок будет обладать конечной мощностью. Таковы, например, хорошо изученные пучки Гаусса, Бесселя – Гаусса, Эрмита – Гаусса, Лагерра – Гаусса и т. д. Однако наличие гауссиана в комплексной амплитуде параксиального пучка совсем не обязательно. Нами в работе [4] было найдено новое решение параксиального волнового уравнения в декартовой системе координат. Это решение содержит функцию Куммера и не имеет гауссиана. Однако такие декартовы пучки Куммера обладают конечной переносимой мощностью при определенных найденных ограничениях, накладываемых на их свободные параметры. В [5] этот формализм был распространен на скалярные решения 3D параксиального волнового

уравнения в цилиндрических координатах и получены решения, описывающие скалярные циркулярные пучки Куммера. Установлены также условия их физической реализуемости. В [6] этот подход был распространен на векторные пучки Куммера в декартовой системе координат.

В настоящей работе этот формализм распространяется на новые векторные решения параболического уравнения в цилиндрической системе координат. Получены выражения, описывающие векторные циркулярные, неоднородно поляризованные 3D световые пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν и конечной мощностью. Обсуждаются поляризационные и энергетические свойства таких пучков.

1 Циркулярные 3D пучки Куммера

Возьмем скалярное параксиальное уравнение

$$\left(\partial_{RR}^2 + \frac{1}{R} \partial_R + \frac{1}{R^2} \partial_{\varphi\varphi}^2 + 4i \partial_Z \right) f(R, \varphi, Z) = 0, \quad (1.1)$$

записанное в безразмерной форме в цилиндрической

системе координат (R, φ, Z) . Решения (1.1) описывают парааксиальные циркулярные световые пучки, см., например [7]. Пусть функция f – некоторое решение параболического уравнения (1.1), которое возьмем в безразмерном виде [8]

$$f = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^v M \left(-v, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) \cdot f_2(\varphi) = \tag{1.2}$$

$$= f_1(R) \cdot f_2(\varphi).$$

Здесь $\varphi = \text{arctg}(Y/X)$, $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$. x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные размеры пучка в направлениях вдоль осей OX и OY соответственно. M – функция Куммера. Q – безразмерный комплексный параметр пучка: $Q = Z - Q_0$, причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Азимутальную функцию $f_2(\varphi)$ возьмем в форме $f_2(\varphi) = \cos(m\varphi) + ib \sin(m\varphi)$, где m – параметр азимутальной модуляции; $b \in [-1, 1]$.

Функция f характеризует скалярные пучки Куммера. В [8] обсуждались векторные циркулярные пучки Куммера с однородной поляризацией. Чтобы перейти к неоднородно поляризованным пучкам Куммера, достаточно выбрать поперечную часть E_{\perp} векторной амплитуды $E = E_{\perp} + E_z e_z$ электрического поля светового пучка в виде $E_{\perp} = \nabla_{\perp} f$, где $\nabla_{\perp} = +\partial_R e_R + \frac{1}{R} \partial_{\varphi} e_{\varphi}$ – поперечный оператор набла.

Учитывая (1.2) находим выражения для поперечных и продольных частей векторных амплитуд циркулярного пучка Куммера с неоднородной поляризацией (для ТМ-мод)

$$E_{\perp} = f_2 \partial_R f_1 \cdot e_R + \frac{f_1}{R} \partial_{\varphi} f_2 \cdot e_{\varphi};$$

$$E_z = i\theta \left(\partial_{RR}^2 f_1 + \frac{\partial_R f_1}{R} - \frac{m^2 f_1}{R^2} \right) f_2;$$

$$H = \frac{\varepsilon}{n} \left(f_2 \partial_R f_1 \cdot e_{\varphi} - \frac{f_1}{R} \partial_{\varphi} f_2 \cdot e_R \right).$$

Здесь $\theta = 1/(kx_0) \cong 10^{-4}$ – безразмерный параметр парааксиальности пучка.

$$\partial_R f_1 = \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^v \cdot \left(m M \left(-v, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) - \frac{2ivR^2}{(m+1)Q} M \left(1-v, m+2; i \frac{R^2}{Q} \right) \right) R^{m-1};$$

$$\dots$$

$$\partial_{RR}^2 f_1 = \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^v \cdot \left(m(m-1) M \left(-v, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) - \frac{2iv(2m+1)R^2}{Q(m+1)} M \left(1-v, m+2; i \frac{R^2}{Q} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4v(1-v)R^4}{(m+1)(m+2)Q^2} M \left(2-v, m+3; i \frac{R^2}{Q} \right) \right) R^{m-2}.$$

Эти ТМ-моды зависят от комплексных параметров v, Q_0 и вещественного параметра m .

Чтобы векторные циркулярные пучки Куммера (ТЕ-моды) (1.2) переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для векторной амплитуды E_{\perp} выполнялись условия её квадратичной интегрируемости (КИ). Несложно показать, что кратко условия КИ для ТМ-мод следующие: $Q''_0 > 0 \cup v' < -m/2$, где $v' = \text{Re}(v)$ – вещественная часть свободного комплексного параметра $v = v' + iv''$. Они, как видим, отличаются от условий КИ для циркулярных пучков Куммера с однородной поляризацией [8].

Таблица 1.1 – Условия КИ для 3D векторных циркулярных световых пучков Куммера (ТМ-моды) с непрерывным комплексным индексом v .

№	Ограничения на индекс $v = v' + iv''$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $Q''_0 > 0$);	Предел $ E_{\perp} $ при $R \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$v' = (1-m)/2$	$ E_{\perp} \rightarrow \text{const}$	нет
2	$-m/2 \leq v' < (1-m)/2$	$ E_{\perp} \rightarrow 0$	нет
3	$v' < -m/2$	$ E_{\perp} \rightarrow 0$	да

2 Вычисление характеристик

Для вычисления характеристик поляризации векторных циркулярных ТМ-мод Куммера введем отношение

$$\eta_c = E_{\varphi} / E_R = \text{tg}(\psi'_c + i\psi''_c) = \frac{f_1 \partial_{\varphi} f_2}{R f_2 \cdot \partial_R f_1},$$

тогда азимут главной оси эллипса поляризации световой волны равен

$$\varphi + \psi'_c = \varphi + \text{Re}(\text{arctg}(\eta_c)),$$

а ее эллиптичность γ будет

$$\gamma = \text{th} \psi''_c = \text{th}(\text{Im}(\text{arctg}(\eta_c))).$$

Усредненные по времени плотности энергии w и продольного S_z потоков энергии светового поля для векторных пучков Куммера с неоднородной поляризацией можно представить как [8]:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(|f_2 \partial_R f_1|^2 + \frac{1}{R^2} |f_1 \partial_{\varphi} f_2|^2 \right); S_z = \frac{c}{n} w;$$

Плотность поперечного (по отношению к оси парааксиального пучка) потока энергии можно записать в виде [9]

$$S_{\perp} = -\frac{c}{8\pi n} \text{Re}(\varepsilon E_{\perp}^* \cdot E_z + \mu H_{\perp}^* \cdot H_z).$$

Для ТМ-мод $H_z = 0$ и поэтому

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \theta \operatorname{Im} \left\{ \left(|f_2|^2 \partial_R f_1^* \cdot \mathbf{e}_R + \frac{f_2 f_1^*}{R} \partial_\varphi f_2^* \cdot \mathbf{e}_\varphi \right) \times \left(\partial_{RR}^2 f_1 + \frac{\partial_R f_1}{R} - \frac{m^2 f_1}{R^2} \right) \right\}.$$

Для функций Куммера M при расчетах использовались преобразования Куммера [10]

$$\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u).$$

Следуя схеме Берри и Бекшаева [11]–[13], в выражении для $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$ выделим явно плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии. После несложных, но громоздких преобразований находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_o &= \frac{c\varepsilon}{8\pi n R^3} \theta \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{e}_R \cdot R \partial_R f_1^* \left(|f_2|^2 R^2 \partial_{RR}^2 f_1 - f_1 |\partial_\varphi f_2|^2 \right) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{e}_\varphi f_2 \partial_\varphi f_2^* \left(2f_1 R \partial_R f_1^* - m^2 |f_1|^2 - |R \partial_R f_1|^2 \right) \right\}; \\ \mathbf{S}_s &= \frac{c\varepsilon}{8\pi n R^3} \theta \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{e}_R \cdot f_1 R \partial_R f_1^* \left(|\partial_\varphi f_2|^2 - m^2 |f_2|^2 \right) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{e}_\varphi \cdot f_2 \partial_\varphi f_2^* \left(f_1^* \cdot \partial_{RR}^2 f + |R \partial_R f_1|^2 - f_1^* R \partial_R f_1 \right) \right\}; \end{aligned}$$

Как видим, орбитальный и спиновый потоки энергии имеют, в общем случае, радиальные и азимутальные компоненты.

Физические свойства векторных циркулярных ТМ пучков Куммера в значительной степени зависят от азимутальной функции $f_2(\varphi)$.

А) Пусть $f_2(\varphi) = \exp(im\varphi)$. Тогда плотности энергии w , плотности поперечного потока энергии \mathbf{S}_\perp не зависят от азимута φ , поэтому для исследования интенсивности пучка Куммера можно ограничиться продольным сечением пучка. Картины интенсивности будут представлять собой гауссовоподобные пики и/или кольца.

Сначала обсудим поляризацию. Неоднородная поляризация и поперечные потоки энергии для гауссовых ТМ мод обсуждались в [14]. В общем случае поляризация циркулярных ТМ пучков Куммера является эллиптической. На оси пучка поляризация – строго циркулярная (рисунок 2.1). Затем при возрастании R эллиптичность у эллипсов поляризации быстро уменьшается до нуля. При дальнейшем увеличении R направления вращения у эллипсов поляризации постепенно изменяются на противоположные (при переходе через линейную азимутальную поляризацию). Потом снова поляризация постепенно становится круговой. После этого главные оси эллипсов поляризации поворачиваются на 90° . При дальнейшем возрастании расстояния R от оси пучка эллиптическая поляризация постепенно

стремится к линейной радиальной (рисунок 2.1). Итак, при возрастании расстояния R от оси пучка неоднородная поляризация ТМ пучков Куммера претерпевает следующую трансформацию: поляризация круговая – линейная азимутальная – круговая – линейная радиальная.

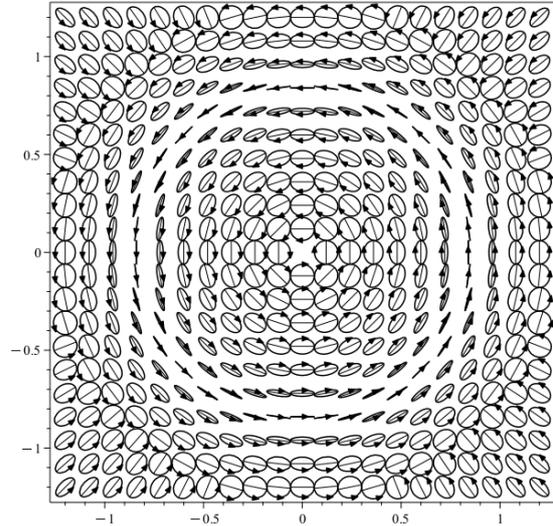


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации векторных ТМ-мод Куммера. Параметры пучка: $\nu' = -1,5$; $\nu'' = 0$; $m = 1$; $Q_0 = 1$; $Z = 1$

Таким образом, при $R \rightarrow 0$ поляризация стремится к циркулярной, при $R \rightarrow \infty$ поляризация стремится к линейной радиальной. При $m = 0$ почти везде имеем строго линейную радиальную поляризацию. Так как параметр η_c не зависит от азимута φ , то главные оси эллипсов поляризации располагаются вдоль спиральных кривых относительно оси Z . Направления эллипсов поляризации образуют спирали. Эти спирали постепенно, с увеличением расстояния Z , раскручиваются. Ранее возможность спиральной поляризации обсуждал Гори [3]. Здесь – более общий случай. В пучках Куммера (ТМ-моды) вдоль спиральных кривых ориентируются не линии, а главные оси эллипсов поляризации.

Спиральные поперечные потоки энергии для векторных пучков Лапласа – Гаусса обсуждались в [15]. Для циркулярных ТМ мод Куммера общие поперечные потоки энергии \mathbf{S}_\perp также сначала направлены вдоль спиралей, которые постепенно раскручиваются. Поэтому векторные циркулярные пучки Куммера – это спиральные пучки по интенсивности. При малых значениях параметра Q_0'' четко видно множество колец интенсивности.

Направления потоков энергии зависят только от R и не зависят от азимута φ . Проанализируем характерные особенности поперечных потоков энергии циркулярных пучков Куммера

(ТМ-моды) от свободных параметров Z , Q_0'' , m , ν' , ν'' . Эти зависимости являются нелинейными и достаточно сложными.

С возрастанием расстояния Z поперечные потоки энергии расширяются и качественно спирали изменяются.

С увеличением параметра Q_0'' спирали поперечных потоков энергии постепенно раскручиваются.

При изменении параметра ν'' условия КИ не изменяются и картины качественно изменяются слабо.

При $m = 0$ имеем строго радиальные потоки. С увеличением m радиальные потоки постепенно превращаются в спиральные, так что вблизи оси пучка $S_{\perp} \propto e_{\varphi}$, т. е. поперечные потоки энергии становятся строго азимутальными.

При убывании параметра ν' азимутальный поток энергии постепенно превращается в

радиальный. При этом спирали поперечного потока энергии постепенно раскручиваются. Область азимутального характера потоков энергии постепенно возрастает, а сам процесс перехода от азимутальным к радиальным потокам энергии происходит более плавно.

Б) Пусть имеем явную азимутальную зависимость пучка в форме $f_2 = \cos(m\varphi)$. Тогда картины интенсивности и потоков энергии модулируются функцией $f_2 = \cos(m\varphi)$ и являются более сложными.

Нами проводилось аналитическое и графическое исследование поперечных S_{\perp} потоков энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды). Во всех случаях $\nu'' = 0$. Взяв, для простоты, азимутальный параметр модуляции $b = 1$. На всех рисунках масштаб интенсивности условный.

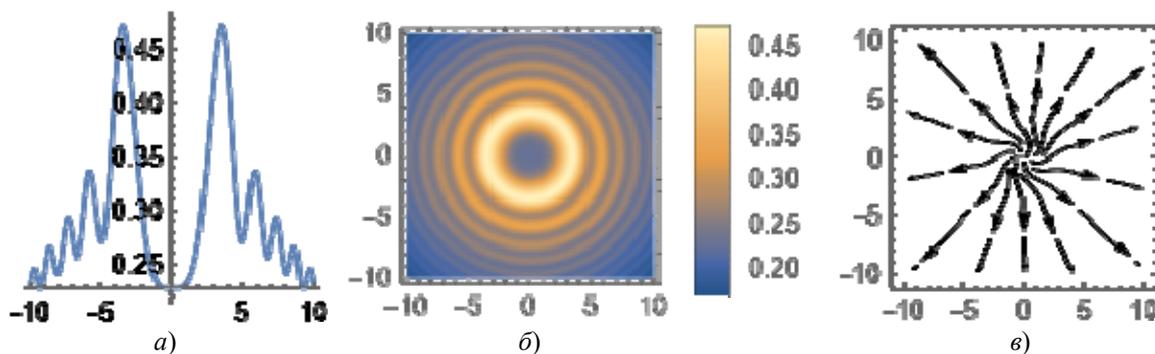


Рисунок 2.2 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$:

- а) интенсивность в продольном сечении XOZ ;
- б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; линии потока вместе с его интенсивностью;
- в) линии поперечного потока. Используемые параметры: $\nu' = -0,94$; $m = 1$; $Q_0 = 0,01$; $Z = 3,18$

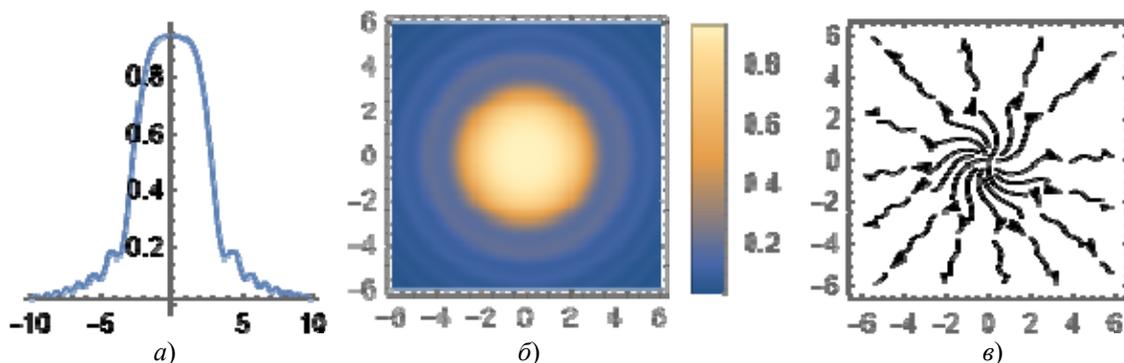


Рисунок 2.3 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$:

- а) интенсивность в продольном сечении XOZ ;
- б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; линии потока вместе с его интенсивностью;
- в) линии поперечного потока.

Используемые параметры: $\nu' = -0,6$; $m = 1$; $Q_0 = 0,01$; $Z = 1,88$

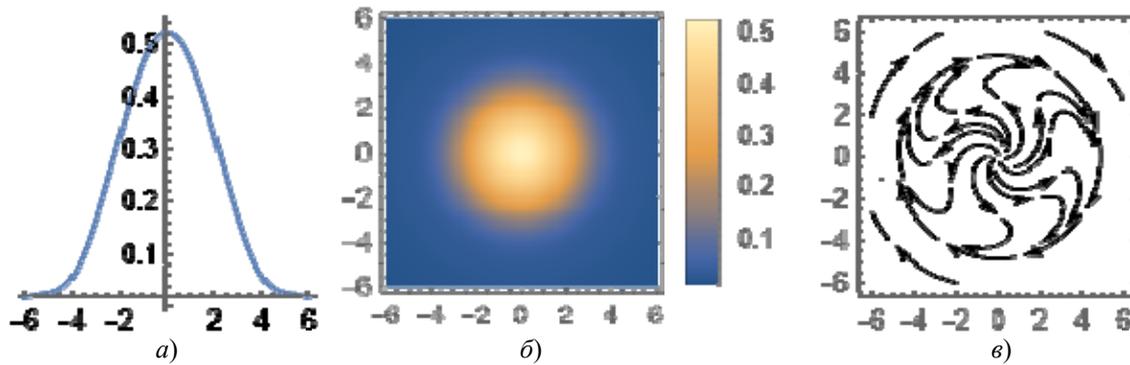


Рисунок 2.4 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$: а) интенсивность в продольном сечении XOZ ; б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; линии потока вместе с его интенсивностью; в) линии поперечного потока. Используемые параметры: $\nu' = -0,6$; $m = 1$; $Q_0 = 0,9$; $Z = 2,93$

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие новые типы пучков – векторные параксиальные циркулярные световые ТМ пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν , переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются четырьмя свободными параметрами: двумя вещественными – (b , m) и двумя комплексными параметрами (Q_0 , ν). Найдены явные выражения для плотностей орбитального S_o и спинового S_s потоков энергии.

Сформулированы условия физической реализуемости циркулярных векторных ТМ пучков Куммера с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим следствиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников // Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
3. Gori, F. Bessel – Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
4. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.
5. Гиргель, С.С. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (52). – С. 18–21.

6. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–16.

7. Bandres, Miguel A. Circular beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

8. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера с переносимой конечной мощностью. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20.

9. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 1. – С. 49–52.

10. Справочник по специальным функциям; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

11. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

12. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

13. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

14. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация // С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

15. Гиргель, С.С. Энергетические свойства векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 13–17.

Поступила в редакцию 05.10.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор