МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_85
EDN: TFEBFR

О ЕДИНИЦАХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

ON IDENTITIES AND THEIR GENERALIZATIONS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение единиц и их обобщений в полиадических группоидах специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арный группоид*, *единица*, *подстановка.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 85–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_85. – EDN: TFEBFR

Abstract. The study on the identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form is carried on.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary groupoid*, *identity*, *substitution.*

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* On identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 85–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_85 (in Russian). – EDN: TFEBFR

Введение

Данная статья, посвящённая изучению единиц и их обобщений в полиадических группоидах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в новой статье.

4 Основные результаты

Отсутствие *n*-полуединиц в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. В следующей теореме указано условие, гарантирующее отсутствие n-полуединиц в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Теорема* 4.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{i(n-1)}$ *не является тождественной. Тогда в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет n-полуединиц.*

Доказательство. Так как $\sigma^{i(n-1)}$ – нетождественная подстановка, то

$$\sigma^{i(n-1)}(j) = t \neq j \tag{4.1}$$

для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ – n-полуединица в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ и для любого $a \in A$ положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \ldots, a_{j-1} = e_{j-1},$$
$$a_j = a, a_{j+1} = e_{j+1}, \ldots, a_k = e_k).$$

Так как $\mathbf{e}$ – n-полуединица в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, то

$$\mathbf{e} = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l}),$$

откуда, применив к правой части записанного равенства равенство (1, 2), получим

$$e_j = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \ldots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}$$
$$\eta(\ldots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \tag{4.2}$$

Так как $\mathbf{e}$ – n-полуединица в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1}}_{i} \mathbf{a} \underbrace{\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1}}_{s-i}) = \mathbf{a},$$

откуда, введя обозначение

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1}}_{i} \mathbf{a} \underbrace{\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1}}_{s-i}) =$$
$$= (v_1, \ldots, v_k), \tag{4.3}$$

получим

$$v_j = a_j = a. \tag{4.4}$$

Применив к левой части равенства (4.3) равенство (1, 2), а также условие (4.1), получим

$$v_j = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \ldots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\ldots$$
$$\ldots \eta(e_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \ldots e_{\sigma^{i(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(e_{\sigma^{i(n-1)+1}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)}e_{\sigma^{i(n-1)+1}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(e_{\sigma^{(i+1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+2)(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)})\ldots))))\ldots))) =$$

$$= \eta(e_je_{\sigma(j)}\ldots e_{\sigma^{n-2}(j)}\,\eta(e_{\sigma^{n-1}(j)}\ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{i(n-1)-1}(j)}\,\eta(a_t e_{\sigma^{i(n-1)+1}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(e_{\sigma^{(i+1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+2)(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)})\ldots))))\ldots))) =$$

$$= \eta(e_je_{\sigma(j)}\ldots e_{\sigma^{n-2}(j)}\,\eta(e_{\sigma^{n-1}(j)}\ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{i(n-1)-1}(j)}\,\eta(e_t e_{\sigma^{i(n-1)+1}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(e_{\sigma^{(i+1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+2)(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)})\ldots))))\ldots))) =$$

$$= \eta(e_je_{\sigma(j)}\ldots e_{\sigma^{n-2}(j)}\,\eta(e_{\sigma^{n-1}(j)}\ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{i(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(e_{\sigma^{i(n-1)}(j)}e_{\sigma^{i(n-1)+1}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(e_{\sigma^{(i+1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{(i+2)(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$

$$\ldots\eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)})\ldots))))\ldots))),$$

то есть

$$v_j = \eta(e_je_{\sigma(j)}\ldots e_{\sigma^{n-2}(j)}\eta(e_{\sigma^{n-1}(j)}\ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(\ldots\eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)})\ \ldots))),$$

откуда и из (4.4) следует

$$a = \eta(e_je_{\sigma(j)}\ldots e_{\sigma^{n-2}(j)}\eta(e_{\sigma^{n-1}(j)}\ldots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}$$

$$\eta(\ldots\eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\ldots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)})\ \ldots))).$$

Из полученного равенства и из (4.2) вытекает $a = e_j$ для любого a из A, что возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от e_j. □

Следующая теорема получается из теорем 4.1, если в ней положить $i = 1$.

***Теорема* 4.2.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет n-полуединиц.*

***Замечание* 4.1.** Теперь мы видим, что отсутствие 3-полуединиц в 7-арной группе $<A^3, \eta_{3,(123),3}>$ из примера 2.2 является следствием теоремы 4.2.

***Замечание* 4.2.** В связи с теоремой 4.2 возникает естественный вопрос; *возможно ли в случае тождественности подстановки* σ^{n-1} *наличие в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *n-полуединиц при отсутствии единиц*. Пример 2.1 даёт положительный ответ на этот вопрос.

***Замечание* 4.3.** Так как из нетождественности подстановки $\sigma^{i(n-1)}$ для некоторого $i = 1, \ldots, s$ следует нетождественность подстановки σ^{n-1}, то теорему 4.1 можно рассматривать как следствия теоремы 4.2, то есть обе эти теоремы являются равносильными утверждениями.

Так как из неравенства $\sigma^{i(n-1)} \neq \sigma^{(i-1)(n-1)}$ следует нетождественность подстановки σ^{n-1} (верно и обратное), то следующая теорема равносильна теоремам 4.1 и 4.2.

***Теорема* 4.3.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, s$ *подстановки* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *и* $\sigma^{i(n-1)}$ *не совпадают. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет n-полуединиц.*

Следующее следствие получается из теоремы 4.1, если в ней положить $i = s$.

***Следствие* 4.1.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{s(n-1)}$ *не является тождественной. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет n-полуединиц.*

Согласно замечанию 4.1, следствие 4.1 можно рассматривать как следствие теоремы 4.2.

Если в каждой из теорем 4.1–4.3 и следствии 4.1 положить $s = 1$, то получим одно и то же

***Следствие* 4.2.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной. Тогда в n-арном группоиде* $<A^k, \eta_{1,\sigma,k}>$ *нет n-полуединиц.*

Отсутствие единиц в $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$. Так как единицы l-арного группоида являются и его n-полуединицами, то из теорем 4.1–4.3 и следствия 4.1 вытекают следующие четыре следствия.

***Следствие* 4.3.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{i(n-1)}$ *не является тождественной. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет единиц.*

***Следствие* 4.4.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет единиц.*

***Следствие* 4.5.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, s$ *подстановки* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *и* $\sigma^{i(n-1)}$ *не совпадают. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет единиц.*

***Следствие* 4.6.** *Пусть* $<A, \eta>$ *– неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{s(n-1)}$ *не является тождественной. Тогда в l-арном группоиде* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *нет единиц.*

Из теоремы 4.2 при $n = 2$ вытекает теорема 9 из [2] об отсутствии единиц в l-арном группоиде $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$.

Отсутствие *m*-полуединиц в $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$. Предложение 2.2 позволяет для каждой из теорем 4.1–4.3 и следствия 4.1 сформулировать формально более общие результаты.

Теорема 4.4. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{i(n-1)}$ *не является тождественной,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Теорема 4.5. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Теорема 4.6. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, s$ *подстановки* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *и* $\sigma^{i(n-1)}$ *не совпадают,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Следствие 4.7. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементный n-арный группоид, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{s(n-1)}$ *не является тождественной,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Случай *n*-арной полугруппы (*n*-арной группы). Утверждения 1) и 2) из раздела 1 позволяют для каждой из теорем 4.1–4.6, а также следствий из них сформулировать их аналоги для полиадических полугрупп (полиадических групп). Ограничимся теоремами 4.1 и 4.2.

Теорема 4.7. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная полугруппа (n-арная группа), для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{s(n-1)}$ *является тождественной, а для некоторого* $i = 1, \ldots, s - 1$ *подстановка* $\sigma^{i(n-1)}$ *не является тождественной. Тогда в l-арной полугруппе (l-арной группе)* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет n-полуединиц.*

Теорема 4.8. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная полугруппа (n-арная группа), для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* $\sigma^{s(n-1)}$ *является тождественной, а подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной. Тогда в l-арной полугруппе (l-арной группе)* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет n-полуединиц.*

Отсутствие *m*-полуединиц в неассоциативных полиадических группоидах специального вида. В [3, теорема 3.2] доказано, что *если* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью;* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$*, удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$*, то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *l-арного группоида* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.* Это утверждение и теорема 4.4 при $i = s$ (следствие 4.7) позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 4.9. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная полугруппа, обладающая левой нейтральной последовательностью; для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{l-1} *не является тождественной,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является l-арной полугруппой и в нём нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Следствие 4.8. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная полугруппа с левой единицей, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{l-1} *не является тождественной,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является l-арной полугруппой и в нём нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Так как полиадические группы обладают нейтральными последовательностями, то теореме 4.9 соответствует следующий результат.

Теорема 4.10. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная группа, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{l-1} *не является тождественной,* $m - 1$ *делит* $n - 1$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является l-арной полугруппой и в нём нет m-полуединиц, в частности единиц.*

Полагая в последних трёх утверждениях $m = n$, получим ещё три следствия.

Следствие 4.9. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная полугруппа, обладающая левой нейтральной последовательностью; для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{l-1} *не является тождественной. Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является l-арной полугруппой и в нём нет n-полуединиц, в частности единиц.*

Следствие 4.10. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная полугруппа с левой единицей, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{l-1} *не является тождественной. Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является l-арной полугруппой и в нём нет n-полуединиц, в частности единиц.*

Следствие 4.11. *Пусть* $< A, \eta >$ – *неодноэлементная n-арная группа, для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{l-1} *не является тождественной. Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является l-арной полугруппой и в нём нет n-полуединиц, в частности единиц.*

Критерий существования *m*-полуединиц в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Полученные результаты позволяют сформулировать критерий существования *m*-полуединиц в полиадических группоидах специального вида.

Теорема 4.11. *Если неодноэлементный n-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает m-полуединицами, то в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет m-полуединиц тогда и только тогда, когда подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в *l*-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ нет *m*-полуединиц, и предположим, что подстановка σ^{n-1} является тождественной. Так как в $< A, \eta >$ имеются *m*-полуединицы, то по теореме 3.2 *l*-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ также обладает m-полуединицами, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Так как n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает m-полуединицами, то $m - 1$ делит $n - 1$. Далее применяется теорема 4.2. □

Из теоремы 4.11 при $n = 2$ вытекает

***Следствие* 4.12.** *Если неодноэлементный группоид* $< A, \eta >$ *обладает единицами, то в* $(s + 1)$*-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *нет единиц тогда и только тогда, когда подстановка* σ *не является тождественной*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 76–81.

2. *Гальмак*, *А.М.* Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

3. *Русаков*, *А.Д.* О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 68–72.

Поступила в редакцию 26.01.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор