

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ, ГЕНЕРИРУЕМОГО В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦАХ БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ

А.И. Толкачёв, А.А. Шамына, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ANALYSIS OF ENERGY CHARACTERISTICS OF THE SECOND-HARMONIC GENERATION IN LONG CYLINDRICAL DIELECTRIC PARTICLES

A.I. Talkachov, A.A. Shamyna, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определены явный вид плотности мощности, полной мощности генерируемого излучения второй гармоники и условия их максимума в тонком цилиндрическом слое большой высоты и малого радиуса. Исследовано пространственное распределение генерируемого излучения для различных случаев тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости. Произведена численная максимизация интенсивности второй гармоники для диапазона радиусов оснований частицы от нанометров до микрометров. Найдено распределение излучения, генерируемого от линейной структуры из цилиндрических частиц. Установлены условия, при которых генерация излучения максимальна и условия, при которых генерация не происходит.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, диэлектрическая цилиндрическая частица, тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка, оптимизация, мощность излучения, диаграмма направленности, линейная структура.

Для цитирования: Толкачёв, А.И. Анализ энергетических характеристик излучения второй гармоники, генерируемого в диэлектрических цилиндрических частицах большой высоты / А.И. Толкачёв, А.А. Шамына, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 53–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_53. – EDN: PMWHFF

Abstract. The explicit forms of the power density, the total radiation power of the second-harmonic generation in a long thin cylindrical layer of a small radius, and the conditions for their maximum are found. The spatial distribution of the generated radiation is examined for special cases of the nonlinear dielectric susceptibility tensor. A numerical maximization of the intensity of the second-harmonic is carried out for the range of the particle base radius from nanometers to micrometers. The distribution of the generated radiation from a linear structure of cylindrical particles is determined. The conditions at which the generated radiation is maximal and the conditions at which there occurs no generation are found.

Keywords: second harmonic generation, cylindrical dielectric particle, second-order nonlinear dielectric susceptibility tensor, optimization, radiation power, directivity pattern, linear structure.

For citation: Talkachov, A.I. Analysis of energy characteristics of the second-harmonic generation in long cylindrical dielectric particles / A.I. Talkachov, A.A. Shamyna, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 53–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_53 (in Russian). – EDN: PMWHFF

Введение

Нелинейные оптические эффекты, такие как генерация второй гармоники и генерация суммарной частоты, являются избирательными методами исследования поверхностей центросимметричных микро- и наночастиц [1], [2], [3]. Они позволяют определять поверхностную концентрацию молекул [4], их ориентацию, поверхностную плотность заряда поверхности [5]. Существует точная теория Ми, основанная на непосредственном решении уравнений Максвелла, которая позволяет найти генерируемые поля от сферической и бесконечной цилиндрической частиц [6], [7]. Ее недостатком является, то, что

решение записывается в виде бесконечного ряда, поэтому его анализ затруднен. Использование приближенных моделей, основанных на приближениях Рэлея – Ганса – Дебая [2], [8], [9] и Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна [2], [9], [10], позволяет найти аналитические выражения для напряженности генерируемого поля, которые справедливы для оптически «мягких» частиц.

Данная работа посвящена исследованию пространственного распределения генерируемого излучения второй гармоники от длинных цилиндров. В области малых значений радиусов анализ проводится аналитически, для больших радиусов – численными методами. Во втором разделе

рассматривается нелинейная генерация от линейной структуры из параллельных цилиндров, аналитически находятся оптимальные сочетания параметров для достижения максимальной интенсивности второй гармоники.

1 Генерация второй гармоники от боковой поверхности длинного цилиндра

1.1 Постановка и решение задачи

Пусть цилиндрическая частица радиусом основания a и высотой h ($a \ll h$) покрыта слоем оптически нелинейного вещества толщины d_0 ($d_0 \ll a$). Расположим её так, чтобы ось цилиндра совпадала с осью Oz декартовой и цилиндрической систем координат, а геометрический центр находился в начале координат (рисунок 1.1, а).

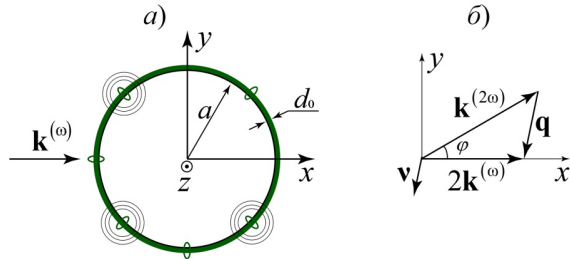


Рисунок 1.1 – (а) Схема задачи о ГВГ от поверхности цилиндрической частицы большой высоты, (б) схема используемых векторов

Рассмотрим нормальное к оси симметрии падение на боковую поверхность цилиндрической частицы плоской электромагнитной волны, вектор напряженности электрического поля которой определим следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(\omega)}(\mathbf{x}, t) = E_0 \mathbf{e}^{(\omega)} \exp(i\mathbf{k}^{(\omega)} \mathbf{x} - i\omega t). \quad (1.1)$$

Здесь E_0 – ее комплексная амплитуда, $\mathbf{e}^{(\omega)}$ – единичный комплексный вектор поляризации, $\mathbf{k}^{(\omega)}$ – волновой вектор (рисунок 1.1, а).

ГВГ обусловлена нелинейным слагаемым вектора поляризации среды

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(\omega)} E_k^{(\omega)}, \quad (1.2)$$

где $\chi_{ijk}^{(2)}$ – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости нелинейного вещества, который можно представить в виде

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ik} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} + n_j \varepsilon_{ikm}). \quad (1.3)$$

Здесь n_i – компоненты вектора нормали \mathbf{n} к поверхности, δ_{ij} – дельта-символ Кронекера, ε_{ijk} – символ Леви – Чивита. В дальнейшем под типом анизотропии $\chi_i^{(2)}$ подразумеваются значения независимых компонент тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$

$$\chi_i^{(2)} = 1, \chi_j^{(2)} \Big|_{j \neq i} = 0.$$

В пределе большой высоты цилиндрической частицы по сравнению с ее радиусом генерацией от торцов можно пренебречь, также в работе [8] было показано, что для используемой нами схемы задачи (рисунок 1.1, а) излучение генерируется преимущественно в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. В связи с этим выражение для вектора напряженности электрического поля удвоенной частоты в дальней зоне удобно представлять в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = 2\pi \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} d_0 a h E_0^2 \times \times (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \mathbf{f}^{(2\omega)} \frac{\exp(ik_{2\omega} \rho)}{\rho}, \quad (1.4)$$

где $k_{2\omega} = |\mathbf{k}^{(2\omega)}|$ – модуль волнового вектора генерируемой волны, $\mathbf{f}^{(2\omega)}$ – вектор, характеризующий пространственное распределение генерируемого излучения. Он имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)} = & i\chi_1^{(2)} \left\{ -J_3(qa) \mathbf{v}(\mathbf{ve}^{(\omega)})^2 + \right. \\ & + \frac{1}{4} (J_1(qa) + J_3(qa)) \left[\mathbf{v} \left((\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}^{(\omega)}) - (\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}_z)^2 \right) + \right. \\ & \left. \left. + 2(\mathbf{ve}^{(\omega)}) (\mathbf{e}^{(\omega)} - \mathbf{e}_z (\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}_z)) \right] \right\} + \\ & + iJ_1(qa) \left(\chi_2^{(2)} \mathbf{v}(\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}^{(\omega)}) + 2\chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(\omega)} (\mathbf{ve}^{(\omega)}) \right) - \\ & - \chi_4^{(2)} (J_0(qa) + J_2(qa)) \left[\mathbf{e}^{(\omega)} \times \mathbf{e}_z \right] (\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}_z) - \\ & - 2\chi_4^{(2)} J_2(qa) \left[\mathbf{e}^{(\omega)} \times \mathbf{v} \right] (\mathbf{ve}^{(\omega)}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}$ – вектор рассеяния (он находится в плоскости Oxy , рисунок 1.1, б), $q = |\mathbf{q}|$, \mathbf{v} – единичный вектор вдоль \mathbf{q} (рисунок 1.1, б), $J_m(qa)$ – цилиндрические функции Бесселя.

Экспериментально измеряемыми величинами являются плотность генерируемой мощности

$$S^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \frac{c}{8\pi \mu_{2\omega}} |\mathbf{E}^{(2\omega)}|^2 = S_0 \cdot \left| (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\varphi) \right|^2, \quad (1.6)$$

и полная генерируемая мощность

$$\begin{aligned} W^{(2\omega)} = & \int_{-\pi}^{\pi} S^{(2\omega)}(\mathbf{x}) \cdot \rho h d\varphi = \\ = & S_0 \rho h \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\varphi) \right|^2 d\varphi, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где введена вспомогательная величина

$$S_0 = 8\pi c \frac{\mu_{2\omega} n_{2\omega}}{n_\omega^4} \frac{d_0^2}{\rho^2} (k_\omega a)^2 (k_\omega h)^2 E_0^4, \quad k_\omega = |\mathbf{k}^{(\omega)}|.$$

1.2 Явный вид векторов

Не нарушая общности, будем считать, что волновой вектор исходной электромагнитной волны направлен вдоль оси Ox (рисунок 1.1, а). Схема векторов в задаче представлена на рисунке 1.1, б. Волновые векторы исходной и гене-

рируемой волн, комплексный вектор поляризации исходной волны в декартовой системе координат имеют аналогично [11] вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(0)} &= k_0 \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{k}^{(2\omega)} &= 2k_0 \xi (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}^{(0)} &= \frac{\sin \varphi_{in} - i\sigma \cos \varphi_{in}}{\sqrt{1+\sigma^2}} \mathbf{e}_y + \\ &+ \frac{\cos \varphi_{in} + i\sigma \sin \varphi_{in}}{\sqrt{1+\sigma^2}} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где ξ – показатель дисперсии, определяемый соотношением

$$\xi = \frac{|\mathbf{k}^{(2\omega)}|}{2k_0} = \frac{n_{2\omega}}{n_0}, \quad (1.9)$$

φ_{in} – азимут поляризации исходной волны (угол между большой полуосью эллипса поляризации и осью Oz), σ – величина, характеризующая эллиптичность падающей волны. Полярный угол наблюдения φ может принимать любые значения в области $(-\pi; \pi]$.

Вектор рассеяния \mathbf{q} и его модуль q соответственно равны

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -2k_0 ((\xi \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_x + \xi \sin \varphi \mathbf{e}_y), \\ q &= 2k_0 \sqrt{1 - 2\xi \cos \varphi + \xi^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Используя приведенные выше выражения для векторов, можно определить явный вид интенсивности и полной генерируемой мощности излучения удвоенной частоты. Так, ранее в работе [12] было показано, что генерация второй гармоники не происходит в направлениях $\varphi = 0, \pi$ для рассматриваемой здесь схемы задачи, при произвольных параметрах задачи и типах тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$. Далее в этом разделе указанные глобальные минимумы интенсивности обсуждаться не будут.

1.3 Анализ энергетических характеристик для малого радиуса основания частицы

Точное выражение для генерируемой плотности мощности второй гармоники (1.6) содержит цилиндрические функции Бесселя, ввиду чего анализ данного выражения затруднен. В пределе малого аргумента функции Бесселя можно разложить в ряд:

$$J_m(z) \approx \frac{z^m}{2^m m!} - \frac{z^{m+2}}{2^{m+2} (m+1)!}. \quad (1.11)$$

Так, для цилиндрической частицы малого радиуса основания по сравнению с длиной волны падающего излучения данное приближенное выражение может быть использовано во всем возможном диапазоне полярного угла φ . Диапазон применимости приближенных формул с отклонением результата не более 5% от точного указан в таблице 1.1. Используя приведенные данные, можно наложить ограничение на параметры задачи в виде

$$2k_0(1+\xi)a \leq z_{\max}, \quad (1.12)$$

где z_{\max} – верхняя граница области применимости приближенных выражений из таблицы 1.1.

Таблица 1.1 – Области применимости приближенных выражений для цилиндрических функций Бесселя

Функция Бесселя	Приближение	Область применимости
$J_0(z)$	1	$0 \leq z \leq 0,439$
	$1 - z^2/4$	$0 \leq z \leq 1,219$
$J_1(z)$	$z/2$	$0 \leq z \leq 0,622$
	$z/2 - z^3/16$	$0 \leq z \leq 1,633$
$J_2(z)$	$z^2/8$	$0 \leq z \leq 0,763$
$J_3(z)$	$z^3/48$	$0 \leq z \leq 0,881$

Далее мы будем рассматривать частные случаи тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$, соответствующие отдельным типам анизотропии, с целью нахождения явного вида интенсивности и полной мощности генерируемого излучения и аналитического поиска максимума данных выражений.

1.3.1 Приближенное решение для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$

Для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$ используем разложение функций Бесселя в формуле (1.5), пренебрегая слагаемыми выше первого порядка по qa . Для этого воспользуемся первым типом разложения цилиндрической функции Бесселя первого порядка из таблицы 1.1, что справедливо в области $2k_0 a(1+\xi) \leq 0,622$. Тогда плотность генерируемой мощности (1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} S^{(2\omega)} &= S_0 \cdot \left(\frac{1}{4} k_0 a \chi_1^{(2)} \right)^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi_{in} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{in}}{1 + \sigma^2} \right)^2 \times \\ &\times (1 + 2\xi \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь вспомогательная величина S_0 не содержит полярного угла φ , σ и φ_{in} . Приравняв производную интенсивности (1.13) по углу φ к нулю, найдем оптимальный угол наблюдения и максимальную по направлению наблюдения плотность мощности:

$$\begin{aligned} \varphi_{\max} &= \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + 32\xi^2} - 1}{8\xi} \right), \\ S_{\max}^{(2\omega)} &= S_0 \cdot \left(\frac{1}{4} k_0 a \chi_1^{(2)} \right)^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi_{in} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{in}}{1 + \sigma^2} \right)^2 \times \\ &\times \frac{(\sqrt{1 + 32\xi^2} + 3)^3 (\sqrt{1 + 32\xi^2} - 1)}{1024\xi^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В области $\xi \geq 0,5$ выражение (1.13) имеет также локальный максимум, соответствующий углам

$$\varphi = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{1 + 32\xi^2} + 1}{8\xi} \right),$$

и глобальный минимум ($S^{(2\omega)} = 0$) в направлениях $\varphi = \pm \arccos(-1/2\xi)$.

Теперь можно определить максимальную плотность генерируемой мощности при возможности варьирования параметров σ и φ_{in} , связанных с исходным излучением. Максимум достигается при использовании линейно поляризованной волны ($\sigma_{max} = 0$) с плоскостью поляризации перпендикулярно оси цилиндра ($\varphi_{in max} = \pi / 2$) и равен

$$S_{max}^{(2\omega)} = S_0 \cdot \left(\frac{1}{128\xi} k_{\omega} a \chi_1^{(2)} \right)^2 \times \left(\sqrt{1+32\xi^2} + 3 \right)^3 \left(\sqrt{1+32\xi^2} - 1 \right). \quad (1.15)$$

Используя определение (1.7) можно определить полную генерируемую мощность:

$$W^{(2\omega)} = S_0 \rho h \cdot \left(\frac{1}{4} k_{\omega} a \chi_1^{(2)} \right)^2 \times \left(\frac{\sin^2 \varphi_{in} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{in}}{1 + \sigma^2} \right)^2 \pi (1 + \xi^2). \quad (1.16)$$

Данное выражение максимально при условиях аналогичных максимуму интенсивности ($\sigma_{max} = 0$, $\varphi_{in max} = \pi / 2$). Вспомогательная величина $S_0 \propto \rho^2$, поэтому полная генерируемая мощность зависит от расстояния до цилиндрической частицы как $W^{(2\omega)} \propto \rho^{-1}$.

1.3.2 Приближенное решение для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$

Разложение плотности генерируемой мощности до первого порядка по qa для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ приводит к результату

$$S^{(2\omega)} = S_0 \cdot \left(k_{\omega} a \chi_2^{(2)} \right)^2 \left(\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 \sin^2 \varphi, \quad (1.17)$$

который справедлив для параметров задачи, удовлетворяющих условию $2k_{\omega} a (1 + \xi) \leq 0,622$. Отметим, что интенсивность не зависит от азимута поляризации исходной волны. Очевидно, что максимум (1.17) достигается при $\varphi_{max} = \pm \pi / 2$ и использовании линейно поляризованного излучения и равен

$$S_{max}^{(2\omega)} = S_0 \cdot \left(k_{\omega} a \chi_2^{(2)} \right)^2. \quad (1.18)$$

Полная генерируемая мощность может быть представлена в виде

$$W^{(2\omega)} = S_0 \rho h \cdot \left(k_{\omega} a \chi_2^{(2)} \right)^2 \left(\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 \pi. \quad (1.19)$$

Она также не зависит от азимута поляризации исходной волны и максимальна при $\sigma_{max} = 0$.

Для данного типа анизотропии генерация второй гармоники не происходит при использовании циркулярно поляризованного излучения ($\sigma = \pm 1$) [12], что можно видеть из выражений (1.17) и (1.19).

В данном случае тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ можно продолжить разложение плотности мощности (1.6) до третьего порядка по qa с возможностью аналитического нахождения максимума. В данном случае область применимости расширяется до $2k_{\omega} a (1 + \xi) \leq 1,633$, но распределение генерируемого излучения теперь зависит от радиуса частицы:

$$S^{(2\omega)} = S_0 \cdot \left(\frac{1}{2} k_{\omega} a \chi_2^{(2)} \right)^2 \left(\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 \times \left(2 - (k_{\omega} a)^2 (1 + \xi^2) + 2(k_{\omega} a)^2 \xi \cos \varphi \right)^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.20)$$

Для удобства можно считать, что в области $k_{\omega} a (1 + \xi) \leq 0,311$ с отклонением не более 5% справедливо выражение для плотности мощности (1.17), а в области $0,622 \leq 2k_{\omega} a (1 + \xi) \leq 1,633$ необходимо пользоваться приближенным соотношением (1.20).

Выражение для интенсивности (1.20) достигает максимума при

$$\varphi_{max} = \pm \arccos \left(\left(\sqrt{32(k_{\omega} a)^4 \xi^2 + (2 - (k_{\omega} a)^2 - (k_{\omega} a)^2 \xi^2)^2} - 2 + (k_{\omega} a)^2 + (k_{\omega} a)^2 \xi^2 \right) / (8(k_{\omega} a)^2 \xi) \right), \quad (1.21)$$

которое в пределе $k_{\omega} a \rightarrow 0$ приводит к результату $\varphi_{max} = \pm \pi / 2$, полученному ранее. Явный вид максимальной плотности мощности довольно громоздкий, поэтому здесь мы его не приводим. Как и ранее, наибольшая генерация происходит при использовании линейно поляризованного излучения, что справедливо и для полной генерируемой мощности, которая имеет вид

$$W^{(2\omega)} = S_0 \rho h \cdot \left(k_{\omega} a \chi_2^{(2)} \right)^2 \left(\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 \pi \times \left(1 - (k_{\omega} a)^2 (1 + \xi^2) + \frac{1}{4} (k_{\omega} a)^4 (1 + 3\xi^2 + \xi^4) \right). \quad (1.22)$$

1.3.3 Приближенное решение для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$

Интенсивность генерируемого излучения второй гармоники в области $2k_{\omega} a (1 + \xi) \leq 0,622$ приближенно описывается выражением

$$S^{(2\omega)} = 2S_0 \cdot \left(k_{\omega} a \chi_3^{(2)} \right)^2 \frac{\sin^2 \varphi_{in} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{in}}{(1 + \sigma^2)^2} \times \sin^2 \varphi \left(2 + 2\sigma^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_{in} - (1 - 2\sigma^2 - \cos 2\varphi) \sin^2 \varphi_{in} \right). \quad (1.23)$$

Максимум данного выражения по направлению наблюдения φ регистрируется при

$$\varphi_{max} = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ если } \varphi_{in} \in [0; \pi / 4];$$

$$\varphi_{max} = \pm \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{-(1 - \sigma^2) \cos 2\varphi_{in}}{1 + \sigma^2 - (1 - \sigma^2) \cos 2\varphi_{in}}} \right), \quad (1.24)$$

если $\varphi_{in} \in (\pi / 4; \pi / 2]$

и равен

$$S_{\max}^{(2\omega)} = 2S_0 \cdot (k_{\omega} a \xi \chi_3^{(2)})^2 \frac{\sin^2 \varphi_{\text{in}} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{\text{in}}}{(1 + \sigma^2)^2} \times \begin{cases} 2 - 2(1 - \sigma^2) \sin^2 \varphi_{\text{in}}, & \varphi_{\text{in}} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \\ \frac{(1 + \sigma^2)^2}{2(\sin^2 \varphi_{\text{in}} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{\text{in}})}, & \varphi_{\text{in}} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \quad (1.25)$$

Найдем максимум плотности генерируемой мощности при возможности варьирования параметров σ и φ_{in} :

$$S_{\max}^{(2\omega)} = S_0 \cdot (k_{\omega} a \xi \chi_3^{(2)})^2. \quad (1.26)$$

Данное значение достигается в областях $\forall \sigma$, $\varphi_{\text{in}} \in [\pi/4; \pi/2]$ и $\sigma = \pm 1$, $\forall \varphi_{\text{in}}$.

Полная генерируемая мощность задается выражением

$$W^{(2\omega)} = 2S_0 \rho h \cdot (k_{\omega} a \xi \chi_3^{(2)})^2 \times \frac{\sin^2 \varphi_{\text{in}} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{\text{in}}}{(1 + \sigma^2)^2} \pi \times (1 + 4\sigma^2 + 3(1 - \sigma^2) \cos^2 \varphi_{\text{in}}). \quad (1.27)$$

Она достигает максимума

$$W_{\max}^{(2\omega)} = S_0 \rho h \cdot (k_{\omega} a \xi \chi_3^{(2)})^2 \frac{8}{3} \pi \quad (1.28)$$

при $|\sigma_{\max}| \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varphi_{\text{in max}} = \arccos\left(\pm \frac{1 - 2\sigma^2}{3(1 - \sigma^2)}\right)$.

1.3.4 Приближенное решение для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$

Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ выражение для плотности мощности (1.6) содержит цилиндрическую функцию Бесселя нулевого порядка, поэтому в качестве первого приближения можно записать

$$S^{(2\omega)} = S_0 \cdot (\chi_4^{(2)})^2 \frac{4\sigma^2 + (1 - \sigma^2)^2 \sin^2 2\varphi_{\text{in}}}{4(1 + \sigma^2)^2} \sin^2 \varphi, \quad (1.29)$$

что справедливо для $2k_{\omega} a(1 + \xi) \leq 0,439$. Максимальная по направлению наблюдения плотность мощности достигается при $\varphi_{\max} = \pm \pi/2$ и равна

$$S_{\max}^{(2\omega)} = S_0 \cdot (\chi_4^{(2)})^2 \frac{4\sigma^2 + (1 - \sigma^2)^2 \sin^2 2\varphi_{\text{in}}}{4(1 + \sigma^2)^2}. \quad (1.30)$$

При возможности варьирования параметров σ и φ_{in} максимальная интенсивность оказывается равной

$$S_{\max}^{(2\omega)} = S_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \chi_4^{(2)}\right)^2 \quad (1.31)$$

при $\forall \sigma_{\max}$, $\varphi_{\text{in max}} = \pi/4$ и $\sigma_{\max} = \pm 1$, $\forall \varphi_{\text{in max}}$.

Полная генерируемая мощность имеет вид

$$W^{(2\omega)} = S_0 \rho h \cdot (\chi_4^{(2)})^2 \frac{4\sigma^2 + (1 - \sigma^2)^2 \sin^2 2\varphi_{\text{in}}}{4(1 + \sigma^2)^2} \pi. \quad (1.32)$$

Она достигает максимальных значений для параметров, указанных выше для оптимальной плотности мощности.

Из формул (1.29) и (1.32) можно видеть, что для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ генерация второй гармоники не происходит при $\sigma = 0$, $\varphi_{\text{in}} = \pi/2$, однако этот вывод справедлив в рамках первого приближения. Если учесть следующий ненулевой порядок в разложении по qa , то интенсивность в области $2k_{\omega} a(1 + \xi) \leq 0,763$ определяется как

$$S^{(2\omega)} = S_0 \cdot (\chi_4^{(2)})^2 \frac{\sin^2 \varphi}{4(1 + \sigma^2)^2} \times \left(4(k_{\omega} a)^4 \xi^2 (1 - \xi \cos \varphi)^2 (\sin^2 \varphi_{\text{in}} + \sigma^2 \cos^2 \varphi_{\text{in}})^2 + (2 - (k_{\omega} a)^2 (1 + 3\xi^2 - 4\xi \cos \varphi))^2 \times \left(\sigma^2 + \frac{1}{4}(1 - \sigma^2)^2 \sin^2 2\varphi_{\text{in}}\right)\right). \quad (1.33)$$

Аналитический поиск максимума данного выражения затруднен, однако численный анализ показывает, что значения оптимальных параметров изменяются незначительно от найденных ранее в рамках первого приближения.

Выражение (1.33) записано с целью того, чтобы показать, что при падении линейно поляризованной волны с плоскостью поляризации перпендикулярно оси цилиндрической частицы генерация второй гармоники происходит. Вблизи точки $\sigma = 0$, $\varphi_{\text{in}} = \pi/2$ второе слагаемое в скобках стремится к нулю, а первое слагаемое, содержащее множитель $(k_{\omega} a)^4$, отлично от нуля. Оно и будет отвечать за генерацию в данном случае. Однако для остальных значений параметров σ и φ_{in} , где наблюдается на порядки большая интенсивность, им можно пренебречь по сравнению со вторым слагаемым ввиду четвертой степени $k_{\omega} a$:

$$S^{(2\omega)} = S_0 \cdot (\chi_4^{(2)})^2 \frac{4\sigma^2 + (1 - \sigma^2)^2 \sin^2 2\varphi_{\text{in}}}{16(1 + \sigma^2)^2} \times \left(2 - (k_{\omega} a)^2 (1 + 3\xi^2 - 4\xi \cos \varphi)\right)^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.34)$$

Максимум данного выражения по углу наблюдения φ наблюдается для

$$\varphi_{\max} = \pm \arccos\left(\frac{(k_{\omega} a)^2 (1 + 3\xi^2) - 2}{16(k_{\omega} a)^2 \xi} + \frac{\sqrt{128(k_{\omega} a)^4 \xi^2 + (2 - (k_{\omega} a)^2 (1 + 3\xi^2))^2}}{16(k_{\omega} a)^2 \xi}\right). \quad (1.35)$$

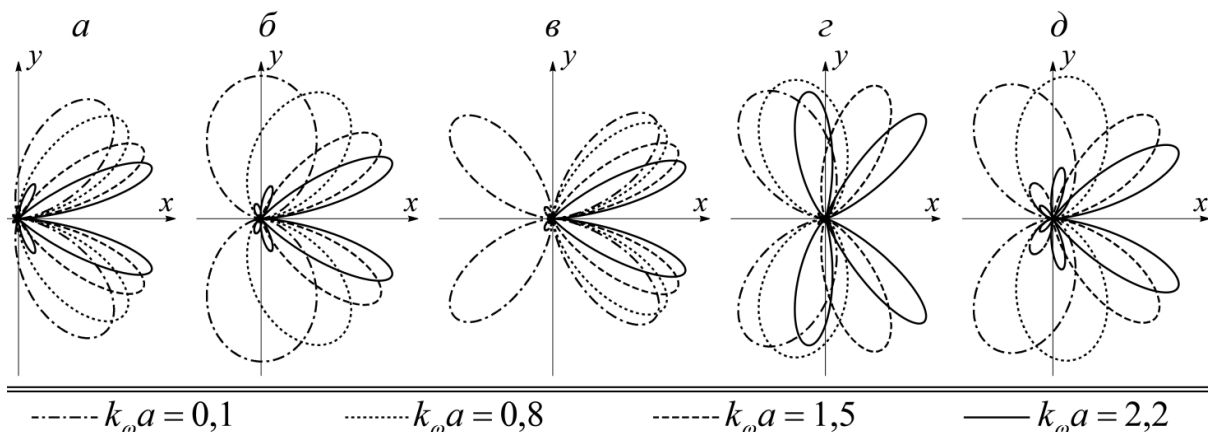


Рисунок 1.2 – Диаграммы направленности для следующих случаев тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$:

(а) тип анизотропии $\chi_1^{(2)}$, (б) тип анизотропии $\chi_2^{(2)}$, (в) тип анизотропии $\chi_3^{(2)}$,

(г) тип анизотропии $\chi_4^{(2)}$, (д) малахитовый зеленый

В пределе $k_{\omega}a \rightarrow 0$ оптимальный угол наблюдения $\varphi_{\max} = \pm\pi / 2$, что согласуется с результатами первого приближения.

1.4 Анализ диаграмм направленности генерируемого излучения

В данном подразделе мы исследуем влияние радиуса основания частицы на форму диаграмм направленности генерируемого излучения. Диаграмма направленности – график, характеризующий пространственное распределение плотности генерируемой мощности. В данном случае генерация происходит в плоскости Oxy , поэтому диаграммы направленности будут представлены в полярных координатах, где начало координат соответствует положению оси цилиндрической частицы. На рисунке 1.2 представлены нормированные диаграммы направленности генерируемого излучения для четырех радиусов оснований цилиндрической частицы и пяти случаев тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$, соответствующих типам анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$ и малахитовому зеленому (МЗ): $\chi_1^{(2)} = -0,627$, $\chi_2^{(2)} = 0,778$, $\chi_3^{(2)} = -0,021$, $\chi_4^{(2)} = 0$ [7], [13]. Построения проведены при использовании линейно поляризованного излучения ($\sigma = 0$) с плоскостью поляризации перпендикулярной оси цилиндра ($\varphi_{in} = \pi / 2$) и показателя дисперсии $\xi = 1,34/1,33$, соответствующего воде на длинах волн 400 и 800 нм в вакууме [14].

Для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}, \chi_2^{(2)}, \chi_4^{(2)}$ и малахитового зеленого в диапазоне $k_{\omega}a \in [0,01; 1]$ происходит трансформация формы диаграммы направленности без изменения количества лепестков. Для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ увеличение радиуса основания в указанном выше диапазоне приводит к изменению формы распределения генерируемого излучения и уменьшению количества лепестков с 4 до 2. Для всех рассмотренных

типов тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ увеличение радиуса основания в области $k_{\omega}a > 1$ приводит к возрастанию количества лепестков диаграммы направленности, а также их сужению. Так, для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}, \chi_2^{(2)}, \chi_3^{(2)}$ и малахитового зеленого в области больших радиусов оснований можно выделить два главных лепестка вблизи положительного направления оси Ox , в направлении которых генерируется наибольшая плотность мощности, и множество побочных лепестков, в направлении которых генерируется гораздо меньшая интенсивность. Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ в области больших значений параметра $k_{\omega}a$ наблюдается большое количество лепестков сравнимых размеров, т. е. интенсивность генерируемого излучения в данных направлениях имеет одинаковый порядок.

1.5 Численная оптимизация плотности генерируемой мощности

В данном подразделе рассмотрим результаты численной максимизации плотности мощности второй гармоники по параметрам φ , σ и φ_{in} для различных радиусов цилиндрической частицы большой высоты. Фиксированными параметрами являются высота частицы h и показатель дисперсии ($\xi = 1,34 / 1,33$).

В общем случае увеличение радиуса основания цилиндрической частицы приводит к возрастанию максимальной по направлению φ плотности мощности. Введем вспомогательную плотность мощности

$$s^{(2\omega)} = \frac{S^{(2\omega)}}{S_0} = \left| (1 - \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_p) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\varphi) \right|^2. \quad (1.36)$$

Она характеризует интенсивность и распределение генерируемого излучения. Напомним, что вспомогательная величина $S_0 \propto (k_{\omega}a)^2$, поэтому если вспомогательная плотность мощности

возрастает при увеличении радиуса основания цилиндрической частицы, то плотность мощности $S^{(2\omega)}$ возрастает быстрее, чем $(k_\omega a)^2$, и наоборот. Если вспомогательная плотность мощности остается постоянной, то плотность мощности $S^{(2\omega)} \propto (k_\omega a)^2$.

Проведем численную максимизацию вспомогательной плотности мощности по параметрам φ , σ и φ_{in} для различных фиксированных радиусов оснований в диапазоне $0,01 \leq k_\omega a \leq 20$, что соответствует радиусам оснований от нескольких нанометров до нескольких микрометров для выбранных ранее фиксированных параметров среды и исходного излучения. Варьируемые параметры φ , σ и φ_{in} лежат в следующих пределах:

$$-\pi < \varphi \leq \pi, \quad -1 \leq \sigma \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_{in} \leq \pi. \quad (1.37)$$

Также ввиду свойств замены

$$\begin{aligned} S^{(2\omega)}(-\varphi, \sigma, \varphi_{in}) &= S^{(2\omega)}(\varphi, \sigma, \varphi_{in}), \\ S^{(2\omega)}(\varphi, -\sigma, \varphi_{in}) &= S^{(2\omega)}(\varphi, \sigma, \varphi_{in}), \\ S^{(2\omega)}(\varphi, \sigma, \pi - \varphi_{in}) &= S^{(2\omega)}(\varphi, \sigma, \varphi_{in}), \end{aligned} \quad (1.38)$$

которые справедливы и для вспомогательной плотности мощности, результаты оптимизации могут быть множественными. Далее будут представлены результаты только для неотрицательных значений параметров φ , σ и значений $0 \leq \varphi_{in} \leq \pi/2$ с точностью до трех знаков после десятичного знака. Отметим, что второе свойство замены (1.38) справедливо лишь для типов тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ с компонентами $\chi_{1-3}^{(2)} \neq 0$, $\chi_4^{(2)} = 0$ и $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\chi_4^{(2)} \neq 0$. Максимизацию будем проводить для типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$, введенных ранее, и малахитового зеленого.

Общим свойством для всех рассмотренных типов тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ является то, что максимум плотности мощности достигается при использовании линейно поляризованного излучения. Для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_3^{(2)}$ плоскость поляризации должна быть перпендикулярна оси цилиндра ($\varphi_{in \max} = \pi/2$), для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ – может быть произвольной ($\forall \varphi_{in \max}$ в пределах, указанных в (1.37)). Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ в области малых радиусов оснований ($k_\omega a \leq 0,30$) максимум интенсивности наблюдается при $\varphi_{in \max} = \pi/4$ и произвольной эллиптичности падающей волны. В области $0,30 < k_\omega a \leq 0,57$ необходимо использовать линейно поляризованное излучение с азимутом поляризации $\varphi_{in \max}$, зависимость которого от $k_\omega a$ представлена на рисунке 1.3. В области $k_\omega a > 0,57$ оптимальным является использование линейно поляризованной волны с положением плоскости поляризации, когда она перпендикулярна оси частицы ($\varphi_{in \max} = \pi/2$). Для малахитового зеленого оптимальными параметрами всегда являются падение линейно

поляризованной волны с плоскостью поляризации проходящей через ось цилиндрической частицы ($\varphi_{in \max} = 0$).

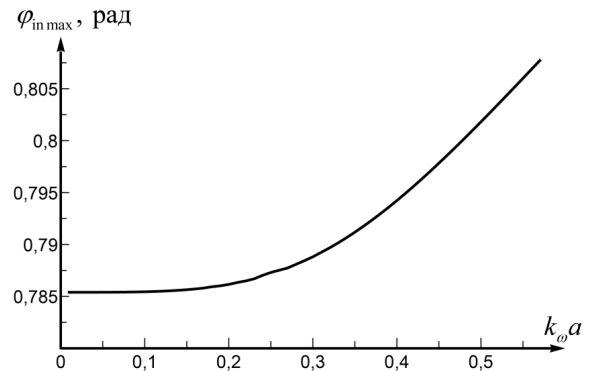


Рисунок 1.3 – Зависимость оптимального азимута поляризации от радиуса основания цилиндрической частицы для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$

В области малых значений параметра $k_\omega a$ результаты оптимизации находятся в соответствии с оптимальными параметрами, найденными аналитически в подразделе 1.3. В данной области максимальная плотность мощности для типов анизотропии $\chi_3^{(2)}$ и $\chi_4^{(2)}$ достигается не для одной пары значений $\varphi_{in \max}$, σ_{\max} (что наблюдается для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}$, $\chi_2^{(2)}$ и малахитового зеленого), а для областей сочетаний данных параметров указанных в подразделах 1.3.3 и 1.3.4 соответственно. Отметим особенность, что на границе применимости приближенных формул, полученных в предыдущем разделе, отклонение приближенных выражений для цилиндрических функций Бесселя составляет 5%, для максимальной по направлению наблюдения φ плотности мощности порядка 1–6%, а для значений оптимальных углов наблюдения φ_{\max} не более 2% для всех рассмотренных типов анизотропии.

Максимальные значения вспомогательной плотности мощности во всей рассматриваемой области изменения радиуса основания цилиндра удобно обозначить как

$$s_i = \max_{k_\omega a, \varphi, \sigma, \varphi_{in}} [S^{(2\omega)}], \quad (1.39)$$

где индекс i принимает значения $\chi_1^{(2)}$, $\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}$, $\chi_4^{(2)}$ или МЗ. Эти величины и значения оптимального радиуса основания частицы, при которых достигается максимум вспомогательной плотности мощности, приведены в таблице 1.2. Как видно, максимальное значение для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ больше максимальных значений для остальных рассмотренных типов тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ на порядок. Чтобы сравнить поведение зависимостей оптимальных плотностей мощности от

радиуса основания частицы, построим графики нормированных вспомогательных плотностей мощности от радиуса (рисунок 1.4, а), которые отдельно для каждого из типов тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ определим как

$$s_{\text{norm max}}^{(2\omega)} = \max_{\varphi, \sigma, \varphi_{\text{in}}} [s^{(2\omega)}] / s_i. \quad (1.40)$$

Таблица 1.2 – Максимальные значения вспомогательной плотности мощности s_i и соответствующие им оптимальные значения радиуса частицы

Параметр	Значения параметра				
Тип анизотропии (i)	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	МЗ
s_i	0,168	0,333	1,342	0,250	0,202
$k_{\omega}a$	11,346	7,493	11,190	0,01	7,493

На данных графиках видно, что поведение кривых для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ и малахитового зеленого идентично, так как линии совпадают в пределах выбранной точности результатов. Такого рода совпадение также наблюдается на зависимости оптимального угла наблюдения от радиуса основания частицы (рисунок 1.4, б). Аналитически можно показать, что при выбранной в данной работе схеме задачи, падении плоско

поляризованной волны с азимутом поляризации $\varphi_{\text{in}} = 0$ (эти параметры являются оптимальными для малахитового зеленого), за генерацию второй гармоники отвечает только компонента $\chi_2^{(2)}$ тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости [12]. Как следствие, графики на рисунок 1.4 для малахитового зеленого и типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ совпадают. Отметим, что пространственное распределение излучения в общем случае параметров σ и φ_{in} для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ и малахитового зеленого не совпадает, что, например, можно видеть на диаграммах направленности на рисунке 1.2, б и рисунке 1.2, д. Для данных типов тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ максимальная вспомогательная плотность мощности практически не изменяется в области $k_{\omega}a > 4$, это означает, что максимальная плотность мощности $S^{(2\omega)}$ пропорциональна $(k_{\omega}a)^2$.

Для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_3^{(2)}$ поведение максимальной вспомогательной плотности мощности подобно поведению, описанному выше для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$, но приблизительно стационарные значения достигаются в области $k_{\omega}a > 6$.

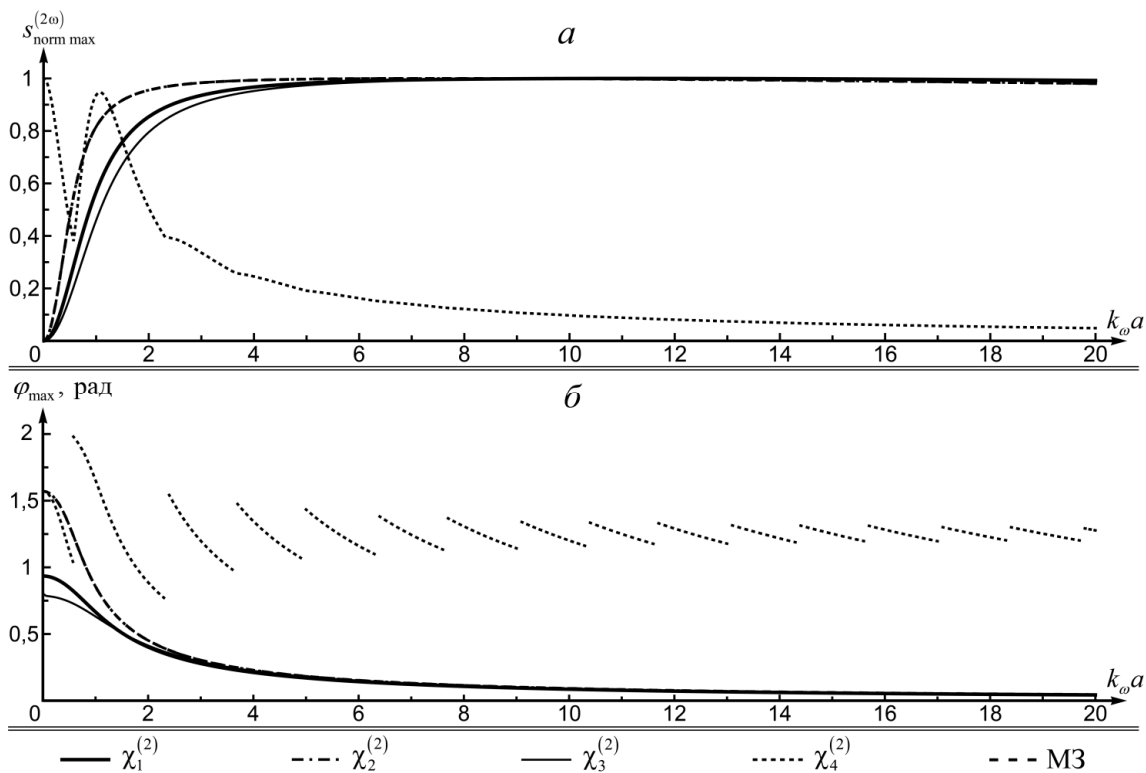


Рисунок 1.4 – (а) Зависимости нормированной максимальной вспомогательной плотности мощности от радиуса основания цилиндрической частицы для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}$, $\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}$, $\chi_4^{(2)}$ и малахитового зеленого, (б) зависимости оптимального угла наблюдения от радиуса основания частицы

Увеличение радиуса основания цилиндрической частицы для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}$, $\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}$ и малахитового зеленого приводит к плавному уменьшению оптимального угла наблюдения φ_{\max} (рисунок 1.4, б). На диаграммах направленности (рисунок 1.2) это проявляется в виде двух главных симметричных лепестков, которые приближаются к оси Ox по мере увеличения параметра k_0a .

Для типов анизотропии $\chi_2^{(2)}$ и $\chi_3^{(2)}$ вектор $\mathbf{f}^{(2\omega)}$ (1.5) содержит только по одному слагаемому, включающему только цилиндрическую функцию Бесселя первого порядка от аргумента qa . Эта функция Бесселя обладает глобальным максимумом в точке $qa = 1,841$. Если предположить, что плотность генерируемой мощности достигает своего максимума, когда функция Бесселя максимальна, то можно определить выражение для оптимального угла наблюдения по формуле

$$\varphi_{\max} = \pm \arccos \left(\frac{4(1 + \xi^2) - 1,841^2 (k_0a)^{-2}}{8\xi} \right), \quad (1.41)$$

которая определена для $k_0a \geq 0,921 / (1 + \xi)$. Данное выражение справедливо с отклонением менее 1% от численно найденных оптимальных углов φ_{\max} для типов анизотропии $\chi_2^{(2)}$ и $\chi_3^{(2)}$ в областях $k_0a \geq 3$ и $k_0a \geq 6,4$ соответственно.

Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ поведение максимальной вспомогательной плотности мощности $S^{(2\omega)}$ кардинально отличается: функция является убывающей в областях $k_0a \in [0,01; 0,57) \cup (1,08; 20]$, а возрастает в области $k_0a \in (0,57; 1,08)$. Если говорить о максимальной плотности мощности $S^{(2\omega)}$, то она возрастает во всей рассматриваемой области радиусов оснований. В области $k_0a > 5$ максимальная вспомогательная плотность мощности обратно пропорциональна k_0a , поэтому максимальная плотность мощности линейно возрастает при увеличении радиуса основания цилиндрической частицы. На графике зависимости оптимального угла наблюдения от радиуса частицы (рисунок 1.4, б) для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ можно видеть множество резких изменений оптимального угла. Это связано с тем, что для больших радиусов оснований диаграммы направленности имеют большое количество лепестков сравнимых размеров (рисунок 1.2), и максимальному значению плотности генерируемой мощности соответствуют различные лепестки для разных значений параметра k_0a .

2 Генерация второй гармоники от линейной структуры из параллельных цилиндров

Рассмотрим падение электромагнитной волны на линейную структуру из периодически

расположенных параллельных цилиндров (рисунок 2.1). Волновой вектор исходной волны направлен вдоль оси Ox и перпендикулярен плоскости, в которой расположены оси цилиндров. Расстояние между осями – d , количество цилиндров в линейной структуре – N . Целью данного раздела является нахождение распределения генерируемого излучения от такой структуры и анализ энергетических характеристик. Генерация второй гармоники от каждого из цилиндров для такой схемы задачи происходит в плоскости Oxy [8], поэтому и для структуры из цилиндров справедлив аналогичный вывод.

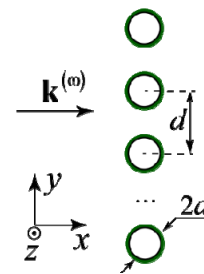


Рисунок 2.1 – Схема задачи о ГВГ от линейной структуры из цилиндрических частиц большой высоты

2.1 Решение задачи

Напряженность электрического поля от линейной структуры может быть определена с использованием принципа суперпозиции полей от отдельных цилиндров:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_N^{(2\omega)} &= 2\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} d_0 a h E_0^2 \times \\ &\times \sum_{j=1}^N \frac{\exp(ik_{2\omega}\rho_j)}{\rho_j} (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\varphi) = \\ &= 2\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} d_0 a h E_0^2 (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\varphi) \times \\ &\times \sum_{n=1-N/2}^{N/2} \frac{\exp(ik_{2\omega}(\rho + \frac{d}{2} \sin \varphi - nd \sin \varphi))}{\rho + \frac{d}{2} \sin \varphi - nd \sin \varphi}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ρ – расстояние от центра структуры до точки наблюдения, вспомогательный вектор $\mathbf{f}^{(2\omega)}$ определяется выражением (1.5).

В дальней зоне сумму в формуле (2.1) можно упростить:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1-N/2}^{N/2} \frac{\exp(ik_{2\omega}(\rho + \frac{d}{2} \sin \varphi - nd \sin \varphi))}{\rho + \frac{d}{2} \sin \varphi - nd \sin \varphi} \approx \\ &\approx \frac{\exp(ik_{2\omega}\rho)}{\rho} \sum_{n=1-N/2}^{N/2} \exp(i(\frac{1}{2} - n)\Phi) = \\ &= \frac{\exp(ik_{2\omega}\rho)}{\rho} \frac{\sin(\frac{1}{2}N\Phi)}{\sin(\frac{1}{2}\Phi)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введено обозначение $\Phi = k_{2\omega} d \sin \varphi = 2\xi k_0 d \sin \varphi$. Численный критерий дальней зоны, где справедливо упрощение выше, следующий:

$\rho \gg Nd$. Теперь напряженность электрического поля генерируемого излучения от линейной структуры можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_N^{(2\omega)} &= 2\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} d_0 ah E_0^2 (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) \times \\ &\times \mathbf{f}^{(2\omega)}(\varphi) \frac{\exp(ik_{2\omega}\rho) \sin(\frac{1}{2}N\Phi)}{\rho \sin(\frac{1}{2}\Phi)} = \\ &= \mathbf{E}^{(2\omega)} \frac{\sin(\frac{1}{2}N\Phi)}{\sin(\frac{1}{2}\Phi)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\mathbf{E}^{(2\omega)}$ – вектор напряженности электрического поля второй гармоники от одного цилиндра, определяемая выражением (1.4). Тогда плотность генерируемой мощности от линейной структуры определяется через интенсивность генерируемого излучения от одного цилиндра $S^{(2\omega)}$ (1.6) как

$$S_N^{(2\omega)} = S^{(2\omega)} \cdot \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N\Phi)}{\sin^2(\frac{1}{2}\Phi)}. \quad (2.4)$$

При описании явления дифракции на периодической решетке появляется аналогичный множитель, связанный с интерференцией волн от каждого из отверстий [15].

2.2 Анализ экстремумов плотности генерируемой мощности

В данном подразделе мы проанализируем выражение (2.4) для общего случая тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости и радиуса основания частиц.

Плотность генерируемой мощности от линейной структуры является произведением двух функций: плотности мощности от одного цилиндра и функции

$$f_{\text{структ}}(N, \Phi) = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N\Phi)}{\sin^2(\frac{1}{2}\Phi)}. \quad (2.5)$$

Последняя обладает глобальными максимумами, равными N^2 при

$$\frac{1}{2}\Phi = \xi k_\omega d \sin \varphi = m\pi, \quad (2.6)$$

где $m \in \mathbb{Z}$ и глобальными минимумами, равными нулю при

$$\frac{1}{2}N\Phi = N\xi k_\omega d \sin \varphi = m'\pi, \quad (2.7)$$

где m' принимает значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (исключая $\pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$). Между минимумами расположены локальные максимумы, значения которых при больших N пренебрежимо малы по сравнению с глобальными максимумами (составляют не более 5% [15]).

Интенсивность генерируемого излучения от линейной структуры из цилиндров достигает максимума в случае совпадения направлений наблюдения максимума интенсивности от одного цилиндра φ_{\max} и интерференционного максимума (2.6). Это условие можно представить следующим образом:

$$\xi k_\omega d \sin \varphi_{\max} = \pm m\pi, \quad (2.8)$$

где $m \in \mathbb{N}$. Здесь исключено значение $m = 0$, так как для выполнения условия (2.8) необходимо

иметь оптимальный угол наблюдения $\varphi_{\max} = 0, \pi$, а в данных направлениях генерация второй гармоники от цилиндрической частицы не происходит [12]. Значение интенсивности в данном оптимальном направлении в N^2 раз больше максимальной интенсивности при использовании одного цилиндра. В формуле (2.8) варьируемым параметром является расстояние между осями цилиндров $k_\omega d$, поэтому именно оно подбирается таким образом, чтобы выполнялось соотношение (2.8) совместно с условием $k_\omega d > 2k_\omega a$.

Плотность генерируемой мощности от линейной структуры обращается в нуль, когда не происходит генерация от одного цилиндра $S^{(2\omega)} = 0$ или при выполнении условия (2.7). Исходя из этого, можно заключить, что количество лепестков в распределении генерируемого излучения для линейной структуры больше, чем количество лепестков при генерации от одного цилиндра. Увеличение количества цилиндров в структуре приводит к увеличению количества лепестков и их сужению по аналогии с дифракционной решеткой.

Заключение

В данной работе аналитически найдены распределение плотности мощности излучения удвоенной частоты, направления наблюдения φ_{\max} ее максимума и выражения для полной генерируемой мощности в тонком цилиндрическом слое оптически нелинейного вещества большой высоты и малого радиуса. Для всех рассмотренных типов тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости, соответствующих типам анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$, максимум энергетических характеристик наблюдается при использовании линейно поляризованного исходного излучения, но для типов анизотропии $\chi_3^{(2)}$ и $\chi_4^{(2)}$ существуют области сочетаний эллиптичности и азимута поляризации, когда генерируется максимальная интенсивность. При изучении пространственного распределения плотности генерируемой мощности обнаружено, что увеличение радиуса основания приводит к увеличению количества лепестков на диаграммах направленности. Для типов анизотропии $\chi_{1-3}^{(2)}$ и малахитового зеленого есть два главных лепестка, которые приближаются к оси Ox , а для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ есть большее количество лепестков сравнимых интенсивностей.

Проведена численная оптимизация плотности генерируемой мощности для различных радиусов оснований цилиндрической частицы, в результате чего обнаружено, что для малахитового зеленого в диапазоне радиусов оснований от нанометров до микрометров необходимо использовать линейно поляризованное излучение с плоскостью поляризации, проходящей через ось

цилиндрической частицы, для генерации максимальной интенсивности. Найдено приближенное аналитическое выражение для оптимального угла наблюдения максимальной интенсивности для типов анизотропии $\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}$ и малахитового зеленого в области больших радиусов оснований. Решена задача о генерации второй гармоники от линейной структуры из параллельных цилиндров большой высоты. Найдены условия, при которых интенсивность максимальна, показано, что она пропорциональна квадрату числа частиц в структуре. Найдены направления наблюдения, в которых генерация второй гармоники от структуры не происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shen, Y.R.* Optical Second Harmonic Generation at Interfaces / Y.R. Shen // *Annu. Rev. Phys. Chem.* – 1989. – Vol. 40. – P. 327–350.
2. *Size Dependence of Second-Harmonic Generation at the Surface of Microspheres* / S. Viarbitskaya [et al.] // *Phys. Rev. A.* – 2010. – Vol. 81, № 5. – P. 053850.
3. *Yang, N.* Angle-resolved second-harmonic light scattering from colloidal particles / N. Yang, W.E. Angerer, A.G. Yodh // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87, № 10. – P. 103902.
4. *Second Harmonic Generation from the Surface of Centrosymmetric Particles in Bulk Solution* / H. Wang [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 1996. – Vol. 259, № 1–2. – P. 15–20.
5. *Yan, E.C.Y.* New Method for Determination of Surface Potential by Second Harmonic Generation / E.C.Y. Yan, Y. Liu, K.B. Eisenthal // *J. Phys. Chem. B.* – 1998. – Vol. 102, № 33. – P. 6331–6336.
6. *Mie, G.* Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen / G. Mie // *Annalen der Physik.* – 1908. – Vol. 330, № 3. – P. 377–445.
7. *Molecular Mie Model for Second Harmonic Generation and Sum Frequency Generation* / S. Wunderlich [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2011. – Vol. 84, № 23. – P. 235403.
8. *Шамына, А.А.* Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. I. Аналитическое решение / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 724–731.
9. *Roke, S.* Nonlinear optical scattering: The concept of effective susceptibility / S. Roke, M. Bonn, A.V. Petukhov // *Phys. Rev. B.* – 2004. – Vol. 70, № 11. – P. 115106.
10. *Капшай, В.Н.* Генерация волн суммарной частоты в поверхностном слое сферической частицы / В.Н. Капшай, Е.Д. Головин, А.А. Шамына // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2022. – № 3 (52). – С. 22–27.
11. *Капшай, В.Н.* Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. II. Анализ решения / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Оптика и спектроскопия.* – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 732–739.
12. *Шамына, А.А.* Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. III. Условия отсутствия генерации / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 740–747.
13. *Толкачёв, А.И.* Генерация второй гармоники – суммарной частоты в тонком сферическом слое. IV. Оптимизационный анализ / А.И. Толкачёв, А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2021. – Т. 129, № 12. – С. 1568–1582.
14. *Daimon, M.* Measurement of the Refractive Index of Distilled Water from the Near-Infrared Region to the Ultraviolet Region / M. Daimon, A. Masumura // *Applied Optics.* – 2007. – Vol. 46, № 18. – P. 3811–3820.
15. *Иродов, И.Е.* Волновые процессы. Основные законы / И.Е. Иродов. – 7-е изд. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2001. – 265 с.

Поступила в редакцию 24.10.2022.

Информация об авторах

Толкачёв Антон Игоревич – аспирант

Шамына Антон Александрович – к.ф.-м.н.

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент