МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_80
EDN: VRLSRJ

КВАЗИОБРАТИМОСТЬ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕСТАНДАРТНЫМИ ГРУППОВЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ЗАЯВОК

Ю.В. Малинковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

QUASIREVERSIBILITY OF QUEUING SYSTEMS WITH NONSTANDARD BATCH CUSTOMER MOTION

Yu.V. Malinkovskii

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Установлено полезное условие для квазиобратимости систем массового обслуживания.

Ключевые слова: *цепь Маркова*, *система массового обслуживания*, *квазиобратимость*, *групповое поступление и обслуживание*, *производящие функции.*

Для цитирования: *Малинковский*, *Ю.В.* Квазиобратимость систем обслуживания с нестандартными групповыми перемещениями заявок / Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 80–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_80. – EDN: VRLSRJ

Abstract. A useful condition for the quasireversibility of queuing systems is established.

Keywords: *Markov chain*, *queuing system*, *quasireversibility*, *batch arrival and batch service*, *generating functions*.

For citation: *Malinkovskii*, *Yu.V.* Quasireversibility of queuing systems with nonstandard batch customer motion / Yu.V. Malinkovskii // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 80–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_80 (in Russian). – EDN: VRLSRJ

Введение

В [1] введена ассамблейно-трансферная (assemble-transfer) дисциплина перемещения запросов и при наличии дополнительного простейшего входящего потока, когда нет запросов, проведена характеризация стационарного распределения в форме произведения геометрических распределений. В [2] удалось провести характеризацию в форме произведения смещенных геометрических распределений без дополнительного потока. Для решения подобных проблем в случае других распределений можно по каждой из схем [1] или [2] использовать результат приводимой ниже теоремы.

1 Постановка задачи и основной результат

В систему массового обслуживания, в которой содержится единственный экспоненциальный прибор с интенсивностью обслуживания μ, поступает стационарный поток без последействия (вообще говоря, неординарный). Наступление событий потока происходит с интенсивностью λ, при этом в момент осуществления n-го события потока поступает случайное число запросов X_{n+1} с распределением вероятностей

$$a(k) = P\{X_n = k\}\ (n, k = 1, 2, \ldots)$$

и конечным средним $m_A = \sum_{k=1}^{\infty} ka(k).$ Запросы обслуживаются группами случайного размера Y_n для n-й группы с распределением $b(k) = P\{Y_n = k\}$ и конечным математическим ожиданием $m_B = \sum_{k=1}^{\infty} kb(k).$ Если в момент окончания обслуживания очередной группы разыгранное значение выбираемой на обслуживание группы превосходит число ожидающих в очереди заявок, то на обслуживание берется неполная группа из всех оставшихся в очереди запросов. Предполагается, что $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ – последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин, которые не зависят друг от друга и не зависят от процессов поступления и обслуживания. Число запросов в системе в момент времени t, обозначаемое $n(t)$, – цепь Маркова с непрерывным временем и фазовым пространством $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Интенсивности ее перехода

$$q(n, n+k) = \lambda a(k),\ k \ge 1, n \ge 0, \qquad (1.1)$$

$$q(n, n-k) = \mu b(k),\ 1 \le k \le n-1, n \ge 2, \qquad (1.2)$$

$$q(n, 0) = \mu \overline{B}(n),\ n \ge 1, \qquad (1.3)$$

где $\overline{B}(n) = b(n) + b(n+1) + \ldots = P\{X_l \ge n\}$.

Известно, что условие

$$\lambda m_A < \mu m_B \tag{1.4}$$

является необходимым и достаточным для эргодичности цепи $n(t)$.

Пусть выполнено (1.4), тогда при любом начальном распределении цепи существуют не зависящие от него финальные вероятности

$$p(n) = \lim_{t\to\infty} P\{n(t) = n\} > 0, \ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.5}$$

образующие единственное стационарное распределение процесса $n(t)$. При этом они удовлетворяют системе уравнений равновесия

$$(\lambda+\mu)p(n) =$$
$$= \lambda\sum_{k=0}^{n-1} p(k)a(n-k) + \mu\sum_{k=n+1}^{\infty} p(k)b(k-n), \ n \ge 1,$$
$$\lambda p(0) = \mu\sum_{k=1}^{\infty} p(k)\overline{B}(k). \tag{1.6}$$

Стандартные условия квазиобратимости (по отношению к естественному набору) марковского процесса $n(t)$ имеют форму

$$\mu p(n) = \lambda\sum_{k=0}^{n-1} p(k)a(n-k), n \ge 1, \tag{1.7}$$

$$\lambda p(n) = \mu\sum_{k=n+1}^{\infty} p(k)b(k-n), n \ge 1, \tag{1.8}$$

$$\lambda p(0) = \mu\sum_{k=1}^{\infty} p(k)\overline{B}(k). \tag{1.9}$$

Введем соответственно производящие функции стационарного распределения, распределения размеров поступающих групп и распределения размеров выбираемых на обслуживание групп как

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n,$$

$$\breve{A}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)z^k, \ \breve{B}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b(k)z^k.$$

Очевидно (1.7) эквивалентно равенству

$$\mu(P(z) - P(0)) = \lambda\breve{A}(z)P(z). \tag{1.10}$$

Обозначим $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Поскольку $P(1) = \breve{A}(1) = 1$, то полагая в (1.10) $z = 1$, получим $p(0) = P(0) = 1-\rho$. Значит, для квазиобратимости $n(t)$ необходимо, чтобы $\rho < 1$ и $p(0) = 1-\rho$. Следовательно, (1.10) можно переписать как

$$P(z) - 1 + \rho = \rho\breve{A}(z)P(z). \tag{1.11}$$

Дифференцируя (1.11), получим

$$P'(z) = \rho\breve{A}'(z)P(z) + \rho\breve{A}(z)P'(z), \tag{1.12}$$

так как $P^{(n)}(z) = \rho\sum_{k=0}^{n} C_n^k \breve{A}^{(k)}(z)P^{(n-k)}(z), n \ge 1,$ (1.13)

откуда

$$P^{(n)}(z) = \frac{\rho}{1-\rho\breve{A}(z)}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \breve{A}^{(k)}(z)P^{(n-k)}(z), \quad n \ge 1. \tag{1.14}$$

Напомним, что функция называется абсолютно монотонной на (0, 1), если она бесконечно дифференцируема на (0, 1), а все ее производные, включая нулевую (т. е. саму функцию), неотрицательны на (0, 1). Пусть $\breve{A}(z)$ – производящая функция вероятностного распределения на $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, для чего, как известно [3], необходимо и достаточно, чтобы $\breve{A}(z)$ была абсолютно монотонной в (0, 1) и $\breve{A}(0) = 0$. $\breve{A}(1) = 1$. Перепишем (1.11) в виде

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho\breve{A}(z)}, \rho < 1. \tag{1.15}$$

Пусть $\breve{A}(z)$ – производящая функция распределения вероятностей на $\mathbb{N}$, а функция $P(z)$ определена равенством (1.15). В этом случае из (1.15) и того, что $\breve{A}(0) = 0, \breve{A}(1) = 1$ следует, что $P(0) = 1-\rho, P(1) = 1$. Кроме того, из (1.15) для $z \in (0,1)$ из того, что $\rho < 1, \breve{A}(z) \le 1$, вытекает $P(z) \ge 0$, а из (1.14) индукцией по $n \in \mathbb{N}$ следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $P^{(n)}(z) \ge 0$. Итак, $P(z)$ абсолютно монотонна на (0, 1) и $P(1) = 1$. Значит [3], $P(z)$ – производящая функция распределения вероятностей на $\mathbb{Z}_+$. Таким образом, справедлива следующая

Основная теорема. *Пусть* $\breve{A}(z)$ *– производящая функция распределения вероятностей на* $\mathbb{N}$, *а функция* $P(z)$ *определена равенством* (1.15). *Тогда* $P(z)$ *– производящая функция распределения вероятностей на* $\mathbb{Z}_+$.

Обратное, вообще говоря, неверно, что показывает следующий пример. Из равенства (1.15) следует, что

$$\breve{A}(z) = \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{1-\rho}{P(z)}\right]. \tag{1.16}$$

Пусть стационарное распределение совпадает с распределением Пуассона:

$$p(k) = \frac{c^k}{k!}e^{-c}, \ k = 0, 1, \ldots,$$

где $c = -\ln(1-\rho)$. Тогда из (1.16), учитывая, что $P(z) = e^{c(z-1)} = (1-\rho)e^{cz}$, получим

$$\breve{A}(z) = \frac{1}{\rho}(1 - e^{-cz}).$$

Эта функция не может быть производящей функцией распределения вероятностей, так как, например, ее вторая производная отрицательна на (0, 1). Таким образом, для установления необходимых условий квазиобратимости разумнее задавать производящую функцию размеров поступающих групп, а потом с помощью (1.15) находить производящую функцию стационарного распределения. Задание последней функции и применение (1.16) не гарантирует, что получающаяся при этом функция будет производящей функцией некоторого распределения вероятностей.

2 Примеры применения основной теоремы

1. Если входящий поток ординарный, т. е. $\breve{A}(z) = z$, то (1.15) превращается в производящую функцию геометрического распределения:

$$p(n) = \rho^n (1-\rho), \ n = 0,1,2,\ldots.$$

2. Если размеры поступающих групп имеют геометрическое распределение с параметром a $(0 < a < 1)$:

$$a(k) = a^{k-1}(1-a), k = 1,2,\ldots,$$

т. е.

$$\breve{A}(z) = \frac{(1-a)z}{1-az},$$

то из (1.15)

$$P(z) = \frac{1-\rho-az+a\rho z}{1-(a+\rho-a\rho)z} = 1-\rho+\rho\frac{[1-(a+\rho-a\rho)]z}{1-(a+\rho-a\rho)z}. \quad (2.1)$$

Производящая функция смещенного геометрического распределения с параметрами (p_0, c) $(p_0, c \in (0,1))$,

$$p(0) = p_0, \ p(n) = (1-p_0)(1-c)c^{n-1}, n = 1,2,\ldots,$$

имеет форму

$$P(z) = p_0 + (1-p_0)\frac{(1-c)z}{1-cz}.$$

Из (2.1) следует, что для квазиобратимости $n(t)$ необходимо, чтобы в стационарном режиме $n(t)$ имел смещенное геометрическое распределение с параметрами $(1-\rho, a+\rho-a\rho)$. При этом в силу $0 < a < 1, 0 < \rho < 1$ оба параметра находятся в (0, 1).

3. Пусть параметры поступающих групп имеют распределение Пуассона:

$$a(k) = \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}e^{-a}, k = 1,2,\ldots.$$

Тогда $\breve{A}(z) = ze^{a(z-1)}$. Поэтому из (1.15)

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z e^{a(z-1)}} = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}(\rho z)^k e^{ka(z-1)} = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}(\rho e^{-a})^k e^{kaz} z^k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}(\rho e^{-a})^k z^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ka)^n}{n!}z^n.$$

Производя в последней сумме замену $k+n=m, \ k=l$, получим

$$P(z) = (1-\rho)\sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{l=0}^{m}\frac{\left(\rho e^{-a}\right)^l (la)^{m-l}}{(m-l)!},$$

откуда

$$p(m) = (1-\rho)\sum_{l=0}^{m}\frac{\left(\rho e^{-a}\right)^l (la)^{m-l}}{(m-l)!}, \ m = 0,1,\ldots. \quad (2.2)$$

Назовем распределение на $\mathbb{Z}_+$, задаваемое вероятностями (2.2), M_1-распределением с параметрами (ρ, a).

4. Пусть размеры поступающих групп имеют дискретное равномерное распределение на $\{1,2,\ldots,M\}$:

$$a(k) = \frac{1}{M}, \ k = 1,2,\ldots,M.$$

Тогда

$$\breve{A}(z) = \frac{z(1-z^M)}{M(1-z)}$$

и по формуле (1.15)

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho\frac{z(1-z^M)}{M(1-z)}} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-\left(1+\frac{\rho}{M}\right)z+\frac{\rho z^{M+1}}{M}} = (1-\rho)(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\rho}{M}\right)z-\frac{\rho}{M}z^{M+1}\right]^n =$$

$$= (1-\rho)(1-z)\times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(-\frac{\rho}{M}z^{M+1}\right)^k\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{n-k} z^{n-k} = (1-\rho)(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(-\frac{\rho}{M}\right)^k\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{n-k} z^{kM+n}.$$

Производя замену $s = kM+n, t = k$, т. е. $n = s-tM$, $k = t$, и учитывая, что $n \ge 0, 0 \le k \le n$ тогда и только тогда, когда $s \ge t(M+1) \ge 0$, получим

$$P(z) = (1-\rho)(1-z)\times \sum_{s=0}^{\infty} z^s \sum_{t=0}^{\left[\frac{s}{M+1}\right]} C_{s-tM}^t\left(-\frac{\rho}{M}\right)^t\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-(M-1)t} =$$

$$= (1-\rho)\left(\sum_{s=0}^{\infty} z^s \sum_{t=0}^{\left[\frac{s}{M+1}\right]} C_{s-tM}^t\left(-\frac{\rho}{M}\right)^t\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-(M-1)t} - \sum_{s=1}^{\infty} z^s \sum_{t=0}^{\left[\frac{s-1}{M+1}\right]} C_{s-1-tM}^t\left(-\frac{\rho}{M}\right)^t\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-1-(M-1)t}\right) =$$

$$= (1-\rho)\left(1+\sum_{s=1}^{\infty} z^s\left(\sum_{t=0}^{\left[\frac{s}{M+1}\right]} C_{s-tM}^t\left(-\frac{\rho}{M}\right)^t\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-(M-1)t} - \sum_{t=0}^{\left[\frac{s-1}{M+1}\right]} C_{s-1-tM}^t\left(-\frac{\rho}{M}\right)^t\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-1-(M-1)t}\right)\right).$$

Отсюда

$$p(0) = 1-\rho,$$

$$p(s)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{s}{M+1}\right]} C_{s-tM}^{t}\left(-\frac{\rho}{M}\right)^{t}\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-(M-1)t}-$$

$$-\sum_{t=0}^{\left[\frac{s-1}{M+1}\right]} C_{s-1-tM}^{t}\left(-\frac{\rho}{M}\right)^{t}\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-1-(M-1)t},\ s\geq 1. \quad (2.3)$$

Назовем распределение на $\mathbb{Z}_+$, задаваемое (2.3), M_2-распределением с параметрами (ρ, M). Используя тождество $C_r^l - C_{r-1}^l = C_{r-1}^{l-1}$, заметим, что последняя вероятность может быть переписана как

$$p(s)=\sum_{t=0}^{\left[\frac{s-1}{M+1}\right]}\left(C_{s-1-tM}^{t-1}+\frac{\rho}{M}C_{s-tM}^{t}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{\rho}{M}\right)^{t}\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-1-(M-1)t}+$$

$$+\sum_{t=\left[\frac{s-1}{M+1}\right]+1}^{\left[\frac{s}{M+1}\right]} C_{s-tM}^{t}\left(-\frac{\rho}{M}\right)^{t}\left(1+\frac{\rho}{M}\right)^{s-(M-1)t}. \quad (2.4)$$

5. Пусть размеры поступающих групп имеют биномиальное распределение с параметрами (M, p) на множестве $\{1,2,\dots M+1\}$, т. е.

$$a(k)=C_M^{k-1}p^{k-1}q^{M-k+1},$$

$$k=1,2,\dots,M+1\ (n\in\mathbb{N},\ 0<p<1,\ q=1-p).$$

Тогда

$$\breve{A}(z)=z(pz+q)^M.$$

и по формуле (1.15)

$$P(z)=\frac{1-\rho}{1-\rho z(pz+q)^M}=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k z^k (pz+q)^{Mk}=$$

$$=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k z^k\sum_{l=0}^{Mk}C_{Mk}^{l}(pz)^l q^{Mk-l}=$$

$$=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\sum_{l=0}^{Mk}C_{Mk}^{l}p^l z^{l+k}q^{Mk-l}.$$

Производя замену $s=k+l, t=k$, получим

$$P(z)=(1-\rho)\sum_{s=0}^{\infty}z^s\sum_{t=\left[\frac{s}{M+1}\right]}^{s}\rho^t C_{Mt}^{s-t}p^{s-t}q^{(M+1)t-s}.$$

Следовательно,

$$p(s)=(1-\rho)p^s q^{-s}\sum_{t=\left[\frac{s}{M+1}\right]}^{s}C_{Mt}^{s-t}\left(\frac{\rho}{p}q^{M+1}\right)^t, \quad (2.5)$$

$$s=0,1,\dots.$$

Назовем распределение на $\mathbb{Z}_+$, задаваемое (2.5), M_3-распределением с параметрами (ρ, p, M).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miyazawa*, *M*. Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers / M. Miyazawa // Adv. Appl. Prob. – 1997. – Vol. 29, № 2. – P. 1–22.

2. *Малинковский*, *Ю.В*. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю.В. Малинковский, Е.В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010, № 12. – С. 43–56.

3. *Феллер*, *В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – Москва: Мир, 1964. – Т. 2. – 765 с.

Поступила в редакцию 10.10.2022.

Информация об авторах

Малинковский Юрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор