

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ЦИРКУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ КУММЕРА КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ.

I. ОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ENERGY PROPERTIES OF THE VECTOR CIRCULAR KUMMER BEAMS WITH TERMINATING POWER. I. THE HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных циркулярных 3D световых пучков Куммера с однородной поляризацией. Эти выражения не содержат гауссиана. При определенных ограничениях на свободные параметры такие пучки Куммера переносят конечную мощность. Вычислены и графически исследуются поперечные (спиновый и орбитальный) потоки энергии таких пучков. Установлено, что азимутальная функция существенно влияет на свойства поперечных потоков энергии пучка.

Ключевые слова: *параксиальные пучки, векторные циркулярные пучки, пучки Куммера.*

Для цитирования: *Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_16. – EDN: ETJLTY*

Abstract. Analytical expressions in the closed shape for the vector circular 3D light Kummer beams with the homogeneous polarisation are offered and explored. These expressions do not contain a Gaussian. At certain restrictions on the free parameters such Kummer beams transfer terminating power. The transverse (spin and orbital) energy fluxes of such beams are calculated and graphically studied. It has been established, that the azimuthal function essentially influences the properties of transverse beam energy fluxes.

Keywords: *paraxial beams, vector circular beams, Kummer beams.*

For citation: *Girgel, S.S. Energy properties of the vector circular kummer beams with terminating power. I. The homogeneous polarization / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 16–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_16 (in Russian). – EDN: ETJLTY*

Введение

Чтобы охарактеризовать параксиальные световые пучки, как правило, [1]–[3] применяют аподизацию соответствующей амплитуды пучка функцией Гаусса. Тогда амплитудная функция, описывающая такой пучок, будет квадратично интегрируемой и поэтому такой параксиальный пучок будет обладать конечной мощностью. Таковы, например, хорошо изученные пучки Гаусса, Бесселя – Гаусса, Эрмита – Гаусса, Лагерра – Гаусса и т. д. Однако наличие гауссиана в комплексной амплитуде параксиального пучка совсем не обязательно. Нами в работе [4] было найдено новое решение параксиального волнового уравнения в декартовой системе координат. Это решение содержит функцию Куммера и не имеет гауссиана. Однако такие декартовы пучки Куммера обладают конечной переносимой мощностью при определенных найденных ограничениях, накладываемых на их свободные параметры. В [5] этот формализм был распространен на

скалярные решения 3D параксиального волнового уравнения в цилиндрических координатах и получены решения, описывающие скалярные циркулярные пучки Куммера. Установлены также условия их физической реализуемости. В [6] этот подход был распространен на векторные пучки Куммера в декартовой системе координат.

В настоящей работе этот формализм распространяется на новые векторные решения параболического уравнения в цилиндрической системе координат. Получены выражения, описывающие векторные циркулярные 3D световые пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν и конечной мощностью. Обсуждаются поляризационные и энергетические свойства таких пучков.

1 Циркулярные 3D пучки Куммера

Скалярное параксиальное уравнение, характеризующее скалярную амплитуду f параксиальных световых пучков для монохроматических

волн вида $f(\mathbf{r}, t) = f \exp(-i\omega t)$, можно записать в форме [2]

$$(\nabla_{\perp}^2 + 2ik\partial_z)f = 0, \quad (1.1)$$

где $k_0 = \omega/c$; $k = k_0 n$.

В работах [7], [5] (смотри также [8]) нами было показано, что уравнение (1.1) в цилиндрических безразмерных координатах (R, φ, Z) , где безразмерный радиус $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, имеет решения

$$f = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{\nu} M \left(-\nu, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) \cdot f_2(\varphi) = f_R(R) \cdot f_2(\varphi), \quad (1.2)$$

описывающие скалярные циркулярные пучки с цилиндрической симметрией. Здесь $\varphi = \text{arctg}(Y/X)$, $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$. x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OY соответственно. M – функция Куммера, или, иначе, вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$ [9], [10]. Q – введенный безразмерный комплексный параметр пучка: $Q = Z - Q_0$, причем $Q_0 = Q_0' + iQ_0''$. Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин. Фазовый множитель f_2 можно записать в общем виде, как $f_2(m, \varphi) = \cos m\varphi + ib \sin m\varphi$, где $b \in [0; 1]$ – азимутальный параметр модуляции.

Чтобы параксиальные пучки (1.2) переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для функции f выполнялись условия её квадратичной интегрируемости (КИ). В [6] были установлены условия КИ, Необходимое условие – это ограничение на мнимую часть комплексного свободного параметра Q_0 : $Q_0'' > 0$. Кроме того, на второй свободный комплексный параметр $\nu = \nu' + i\nu''$ также накладываются ограничения $\nu = -m - N$, которые соответствуют варианту 1 в таблице 1 [5] ($m = 0, 1, 2, \dots$; $Q_0'' > 0$; $N = 1, 2, 3, \dots$). Возможен также другой вариант 2.4 условий КИ в таблице 1:

$$Q_0'' > 0 \cup \nu' < -(1+m)/2 \quad (1.3)$$

Несложно проверить, что ограничение 1 является частным случаем ограничения 2.4. Поэтому далее мы будем использовать только условие КИ (1.3).

Существенно также то, что выражение (1.2) для амплитуды пучка не содержит явно гауссиана, но, тем не менее, при ограничениях (1.3) параксиальные пучки Куммера обладают конечной мощностью.

В настоящей работе использованный нами формализм [4]–[7] далее обобщается на 3D векторные циркулярные пучки Куммера.

2 Векторные циркулярные пучки Куммера конечной мощности

Перейдем от скалярных к векторным циркулярным пучкам Куммера. Векторную амплитуду электрического поля \mathbf{E} любого параксиального светового пучка можно представить в форме $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{e}_z E_z$.

Рассмотрим, для начала, физические свойства векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности с однородной (одинаковой по поперечному сечению пучка) поляризацией. Представим поперечную часть векторной амплитуды \mathbf{E} параксиального пучка в форме $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{e}_{\perp} f$, где f является некоторым решением параксиального параболического уравнения (1.1). Комплексный постоянный нормированный ($|\mathbf{e}_{\perp}|^2 = 1$) вектор поляризации \mathbf{e}_{\perp} не зависит от координат (x, y) . Для описания поляризационных характеристик пучка вектор \mathbf{e}_{\perp} можно разложить по циркулярному базису $(\mathbf{e}_{\rho}, \mathbf{e}_{\varphi}, \mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{e}_{\perp} = (\eta_{\rho} \mathbf{e}_{\rho} + \eta_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}).$$

Можно ввести, согласно Ф.И. Фёдорову [11], в декартовой системе координат комплексный угол ψ выражением

$$\eta = E_y / E_x = \text{tg}(\psi' + i\psi''),$$

тогда азимут световой волны равен ψ' , а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = \text{th} \psi''$. Следуя этому формализму введем отношение $\eta_c = E_{\rho} / E_{\varphi} = \text{tg}(\psi_c' + i\psi_c'')$, тогда азимут главной оси эллипса поляризации световой волны равен $(\varphi + \psi')$, а ее эллиптичность γ будет

$$\gamma = \text{th} \psi_c'' = \text{Im}(\text{arctg}(E_{\varphi} / E_{\rho})).$$

Так как векторный параметр поляризации $\mathbf{e}_{\perp} = \text{const}$, то поляризация будет фиксированной по всему сечению пучка, т. е. однородной.

Полные векторы электрического и магнитного полей векторного, однородно поляризованного, параксиального пучка можно выразить через \mathbf{E}_{\perp} [6]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{\perp} f + \frac{i}{k} \nabla_{\perp} \mathbf{e}_{\perp} f \cdot \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} \left([\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\perp}] f + \frac{i}{k} \nabla_{\perp} [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\perp}] f \right).$$

Далее физические характеристики векторных параксиальных пучков будем выражать в безразмерных переменных

$$\{ X = x/x_0, Y = y/x_0, Z = z/z_0, R = \sqrt{X^2 + Y^2} \}.$$

Двумерный оператор набла в безразмерных циркулярных (цилиндрических) координатах имеет вид $\nabla_2 = \mathbf{e}_R \partial_R + (1/R) \mathbf{e}_{\varphi} \partial_{\varphi}$. Переход к безразмерным переменным и параметрам не изменяет базовые векторы $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_{\varphi}, \mathbf{e}_z\}$. Возникают только

коэффициенты связи. Поэтому векторы электрического поля параксиального пучка

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\perp f + \theta \nabla_\perp \mathbf{e}_\perp f \cdot \mathbf{e}_z.$$

Усредненные по времени плотности энергии w , продольного S_z и поперечного \mathbf{S}_\perp потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с однородной поляризацией в безразмерных переменных можно представить как [7], [6]:

$$w = \frac{\varepsilon |f|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s =$$

$$= \theta S_z \cdot \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\nabla_\perp f}{f} \right) + \theta \operatorname{th} 2\psi'' \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\nabla_\perp f}{f} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right] \right]. \quad (2.1)$$

В выражении для \mathbf{S}_\perp выделены явно, по схеме Берри и Бекшаева [12]–[14], плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии. Здесь введен также коэффициент связи – безразмерный параметр параксиальности пучка $\theta = 1/(kx_0) \cong 10^{-4}$. Для параксиальных пучков $|\mathbf{S}_\perp / S_z| \ll 1$ вследствие присутствия малого параметра θ .

Формализм (2.1), разумеется, применим также к векторным паораксиальным пучкам Куммера. Преобразуя (2.1), находим, что плотности орбитального и спинового потоков энергии светового поля для параксиальных векторных световых пучков Куммера с однородной поляризацией равны

$$\mathbf{S}_o = \theta S_z \cdot \operatorname{Im}(a_R \mathbf{e}_R + a_\phi \mathbf{e}_\phi);$$

$$\mathbf{S}_s = \theta S_z \cdot \operatorname{Re}(a_\phi \mathbf{e}_R - a_R \mathbf{e}_\phi) \cdot \operatorname{th} 2\psi'',$$

где введены, для краткости, обозначения

$$a_R = \frac{\partial_R f_R}{f_R}; \quad a_\phi = \frac{\partial_\phi f_2}{R f_2}.$$

Для рассматриваемых параксиальных векторных циркулярных световых пучков Куммера с однородной поляризацией, например, комплексный параметр

$$a_R = \frac{m}{R} + \frac{-2iv R M(1-v, m+2; iR^2/Q)}{M(-v, m+1; iR^2/Q)}.$$

Здесь при расчете использованы преобразования Куммера $\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u)$ [9] для функции Куммера M .

Физические свойства векторных циркулярных пучков Куммера в значительной степени зависят от азимутальной функции $f_2(\varphi)$.

А) Пусть имеем круговую азимутальную зависимость $f_2 = \exp(i(m\varphi))$. Тогда $a_\phi = im/R$ и выражения для плотностей продольного, орбитального и азимутального потоков энергии соот-

ветственно для векторных циркулярных пучков Куммера несколько упрощаются и принимают вид:

$$S_z = \frac{c\varepsilon |f_1(R)|^2}{8\pi n};$$

$$\mathbf{S}_o = \theta S_z \cdot (\mathbf{e}_R \operatorname{Im} a_R + \mathbf{e}_\phi m/R);$$

$$\mathbf{S}_s = -\theta S_z \cdot \operatorname{th} 2\psi'' \operatorname{Re}(a_R) \cdot \mathbf{e}_\phi.$$

Видим, что поперечный спиновый поток энергии направлен строго азимутально. Орбитальный поток энергии имеет азимутальную и радиальную составляющие. При возрастании радиальная компонента становится преобладающей.

Б) Пусть имеем явную азимутальную зависимость пучка в форме $f_2 = \cos(m\varphi)$. Тогда $a_\phi = -m \operatorname{tg}(m\varphi)/R$ и выражения для плотностей продольного, орбитального и азимутального потоков энергии соответственно для исследуемых пучков Куммера принимают вид:

$$S_z = \frac{c\varepsilon |f_1(R)|^2 \cos^2(m\varphi)}{8\pi n};$$

$$\mathbf{S}_o = \theta S_z \cdot \mathbf{e}_R \operatorname{Im}(a_R);$$

$$\mathbf{S}_s = \theta S_z \cdot \operatorname{th} 2\psi'' (a_\phi \mathbf{e}_R - \operatorname{Re}(a_R) \cdot \mathbf{e}_\phi).$$

В противоположность предыдущему случаю уже поперечный орбитальный поток энергии направлен строго радиально. Спиновый же поток энергии имеет азимутальную и радиальную составляющие. При возрастании R постепенно азимутальная компонента вектора \mathbf{S}_s становится преобладающей.

3 Графическое моделирование картин потоков энергии векторных циркулярных пучков Куммера непрерывного индекса ν с конечной энергией

Нами проводилось аналитическое и графическое исследование потоков энергии векторных циркулярных пучков Куммера. Во всех случаях $m=1$; $Q_0''=0,02$; $\nu'=-1,1$; $\nu''=0$; $Z=0,8$; $\operatorname{th} 2\psi''=1$. Взят, для простоты, азимутальный параметр модуляции $b=1$. На всех рисунках масштаб интенсивности условный.

А) Азимутальная зависимость $f_2 = \exp(i(m\varphi))$.

Картинки интенсивности потока \mathbf{S}_o представляют собой кольца (рисунок 3.1, б), число и характер которых зависит, главным образом, от свободного параметра Q_0'' . При малых значениях параметра Q_0'' вокруг главного кольца появляются небольшие дополнительные кольца, которые возрастают с увеличением Z (рисунки 3.2, в и 3.2, б). При $Q_0'' \rightarrow 0$ ясно видно (рисунки 3.2, б и 3.2, в) бесконечное число колец. При возрастании ширина колец интенсивности растет и изменяется их интенсивность. При $m > 0$ имеем полые пучки

Куммера. При $m=0$ дополнительно к кольцам появляется центральный пик. При возрастании мнимой части ν'' параметра ν пучок расширяется, при уменьшении сужается, при этом качественно характер картины интенсивности не меняется. При возрастании расстояния Z пучок и картины интенсивности постепенно расширяются. При уменьшении ν' максимумы интенсивностей колец начинают возрастать и нули функции f исчезают.

Спиновые же потоки энергии направлены строго азимутально (рисунки 3.2, а и 3.2, б), картины интенсивности которых представляют собой также кольца. Картины интенсивности спиновых потоков S_s (рисунок 3.1, б) сильно

коррелируют с картинами полной интенсивности пучка (рисунок 3.1, в). Характерные особенности потоков S_s – их направления периодически изменяются на противоположные при переходах через области минимума интенсивности (рисунки 3.2, а и 3.2, б). На рисунке 3.2, в, представлена картина полной интенсивности пучков Куммера непрерывного комплексного индекса ν . Поскольку график интенсивности пучка не зависит от азимута, на рисунке 3.2, с, изображены только сечения пучка вдоль оси Z . Видно, что картины интенсивности потоков S_s слабо коррелируют с распределением полной интенсивности пучка.

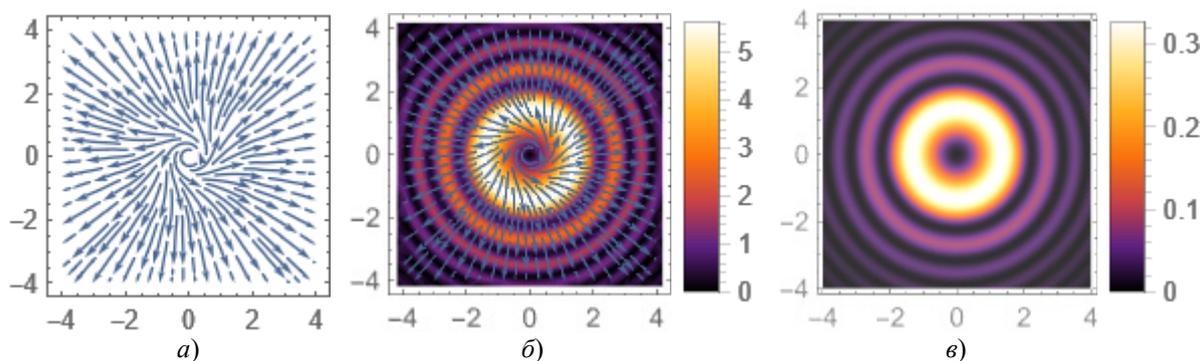


Рисунок 3.1 – Орбитальный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\phi))$: а) только линии потока; б) линии потока вместе с его интенсивностью; в) полная интенсивность светового пучка Куммера

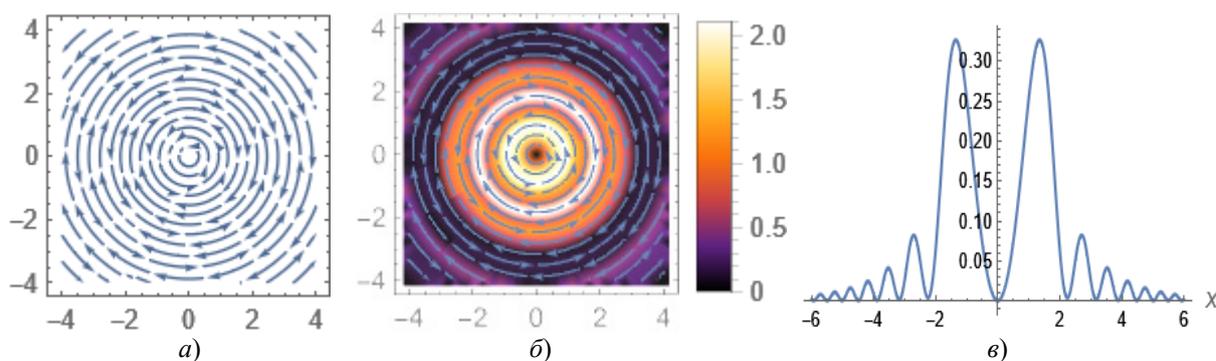


Рисунок 3.2 – Спиновый поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\phi))$: а) только линии потока; б) линии потока вместе с его интенсивностью; в) сечение картины полной интенсивности циркулярного пучка Куммера

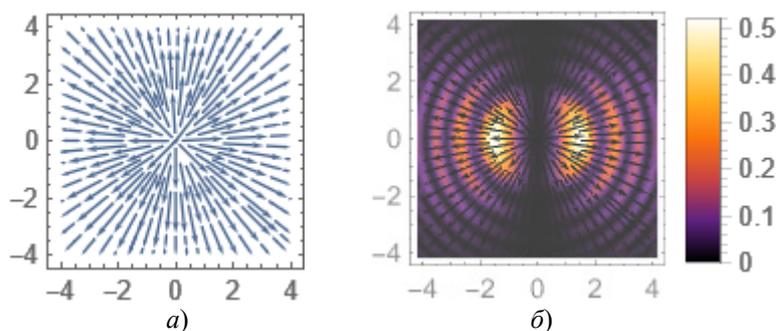


Рисунок 3.3 – Орбитальный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера с зависимостью $f_2 = \cos(m\phi)$: а) только линии потока; б) линии потока вместе с его интенсивностью

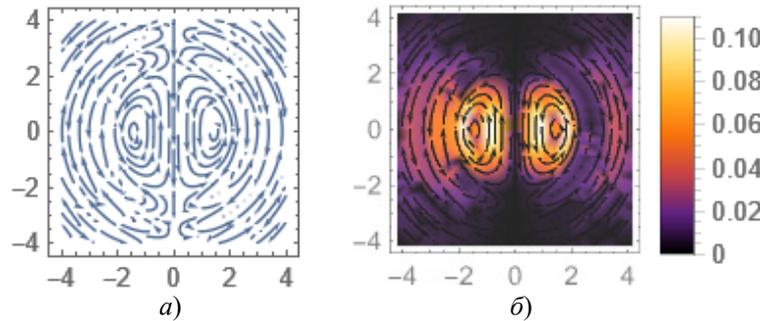


Рисунок 3.4 – Спиновый поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера с зависимостью $f_2 = \cos(m\varphi)$: а) только линии потока; б) линии потока вместе с его интенсивностью

Б) Азимутальная зависимость пучка $f_2 = \cos(\varphi)$. Изменение азимутальной функции $\exp(i(\varphi))$ на $\cos(\varphi)$ приводит к радикальному изменению поперечных потоков энергии и их интенсивности. На рисунках 3.3 и 3.4 видно, что орбитальные потоки энергии S_o в таких случаях всегда направлены вдоль радиусов R , а картины их интенсивности представляют собой также кольца, которые частично коррелируют с общей интенсивностью пучка. Наиболее интересны картины спинового потока энергии S_s пучков Куммера с азимутальной зависимостью $\cos(\varphi)$ (рисунки 3.4, а и 3.4, б). Спиновые потоки энергии разделены на две области плоскостью YZ . В каждой области спиновые потоки энергии независимы и представляют собой замкнутые кривые. Однако плоскость YZ не является плоскостью симметрии, поскольку направления вращения спиновых потоков S_s являются одинаковыми. Они изменяются на противоположные при изменении знака параметра поляризации $\text{th } 2\psi$.

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие новые типы пучков – векторные параксиальные циркулярные световые пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν , переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются четырьмя свободными параметрами: двумя вещественными – (b, m) и двумя комплексными параметрами (Q_0, ν) .

Сформулированы условия физической реализуемости новых векторных пучков Куммера с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Выполнено графическое моделирование их потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных азимутальных функций пучка приводит к качественно различным физическим следствиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.

2. *Абрамочкин, Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

3. *Gori, F.* Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Opt. Commun.* – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.

4. *Гиргель, С.С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники.* – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

5. *Гиргель, С.С.* 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники.* – 2022. – № 2 (52). – С. 18–21.

6. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники.* – 2022. – № 3 (53). – С. 13–17.

7. *Гиргель, С.С.* Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым спектром // С.С. Гиргель / *Проблемы физики, математики и техники.* – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.

8. *Bandres, Miguel A.* Circular beams / Miguel A. Bandres and Julio C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters.* – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

9. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

10. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – Москва: Наука, 1977. – 342 с.

11. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

12. *Berry, M.V.* Optical currents / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

13. *Bekshaev, A.Y.* Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // *Optics Communications.* – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

14. *Bekshaev, A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics.* – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 24.06.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор