УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_73
EDN: VICESH

О ЦЕНТРЕ ГРАФА, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО ПОДГРУППАМИ ШМИДТА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

П.В. Бычков[1], С.Ф. Каморников[1], В.Н. Тютянов[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Международный университет «МИТСО», Гомель*

ON THE CENTER OF A GRAPH DEFINED BY SCHMIDT SUBGROUPS OF A FINITE GROUP

P.V. Bychkov[1], S.F. Kamornikov[1], V.N. Tyutyanov[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*

Аннотация. Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Граф Шмидта конечной группы G – это простой граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором пара (p,q) является ребром тогда и только тогда, когда в G существует подгруппа Шмидта порядка, делящегося на pq. В работе изучается связь свойств графа Шмидта со свойствами группы.

Ключевые слова: *конечная группа*, *простой граф*, *группа Шмидта*, *граф Шмидта*, *разрешимый граф*, *центр графа*.

Для цитирования: *Бычков*, *П.В.* О центре графа, определяемого подгруппами Шмидта конечной группы / П.В. Бычков, С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 73–79. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_73. – EDN: VICESH

Abstract. A Schmidt group is a non-nilpotent group whose proper subgroups are nilpotent. Schmidt graph of a finite group G is the prime graph with the vertex set $\pi(G)$ in which (p,q) is an edge if and only if G has a Schmidt subgroup whose order is divisible by pq. In the paper the relationship of Schmidt graph properties with group properties is studied.

Keywords: *finite group*, *prime graph*, *Schmidt group*, *Schmidt graph*, *soluble graph*, *centre of graph*.

For citation: *Bychkov*, *P.V.* On the center of a graph defined by Schmidt subgroups of a finite group / P.V. Bychkov, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 73–79. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_73 (in Russian). – EDN: VICESH

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

В настоящее время имеется большое число работ, в которых свойства группы G анализируются в зависимости от свойств определенного простого неориентированного графа $\Gamma(G)$, множество вершин которого совпадает с множеством $\pi(G)$ всех простых делителей порядка группы G. На этом пути, в частности, выделены следующие типы простых неориентированных графов.

1. *Граф Грюнберга – Кегеля* (или *граф простых чисел*) $GK(G)$. Две вершины p и q графа $GK(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в группе G имеется элемент порядка pq.

Граф введен в 1981 году Уильямсом в [1] со ссылкой на авторство Грюнберга и Кегеля. Данный граф тесно связан с решением известной проблемы распознавания групп по спектру (см., например, [2]).

2. *Граф разрешимости* $\Gamma_{sol}(G)$. Две вершины p и q графа $\Gamma_{sol}(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в группе G найдется разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq.

Понятие графа разрешимости введено в работе [3] как обобщение графа Грюнберга – Кегеля. Очевидно, граф Грюнберга – Кегеля $GK(G)$ группы G является подграфом графа $\Gamma_{sol}(G)$, но при этом граф $\Gamma_{sol}(G)$ простой группы G всегда связен. Как следует из [4], граф разрешимости полезен для изучения структуры конечной группы и получения критериев ее непростоты.

Для простого числа $p \in \pi(G)$ пусть $A_p(G)$ обозначает группу $N_G(G_p)/G_pC_G(G_p)$.

3. *Силовский граф* $\Gamma_A(G)$. Пара (p,q) чисел $p,q \in \pi(G)$ образует ребро графа $\Gamma_A(G)$ тогда и только тогда, когда либо $p \in \pi(A_q(G))$, либо $q \in \pi(A_p(G))$.

Как следует из [5], одна из важных мотивировок изучения силовских графов связана с исследованием влияния свойств нормализаторов силовских подгрупп на строение группы (в частности, с изучением свойств решеточных формаций).

В данной работе для группы G вводится и анализируется граф Шмидта $\Gamma_{Sch}(G)$, ребра которого определяются наличием в G определенных подгрупп Шмидта.

4. *Граф Шмидта* $\Gamma_{Sch}(G)$. Две вершины p и q графа $\Gamma_{Sch}(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в группе G найдется подгруппа Шмидта, порядок которой делится на pq.

Напомним, что *группой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Простая проверка показывает, что любая ненильпотентная группа содержит по крайней мере одну *подгруппу Шмидта* (т. е. подгруппу, являющуюся группой Шмидта). Следуя [6], группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть $S_{<p,q>}$*-группой*.

Отметим, что ориентированный граф группы G, множество вершин которого совпадает с множеством $\pi(G)$ и пара (p,q) является ребром, идущим от вершины p к вершине q, тогда и только тогда, когда в G имеется $S_{<p,q>}$-подгруппа Шмидта, рассматривался в работах [7] и [8]. В [7] такой граф группы G называется *N-критическим* и обозначается $\Gamma_{N_c}(G)$. В отличие от N-критического граф Шмидта не различает $S_{<p,q>}$-группу и $S_{<q,p>}$-группу. Отметим также, что граф Шмидта не различает и простые группы. Например, для групп Матье M_{11} и M_{12} справедливо равенство $\Gamma_{Sch}(M_{11})=\Gamma_{Sch}(M_{12})$.

В данной работе описываются простейшие свойства графа Шмидта группы G и изучается строение группы, для которой центр графа Шмидта и центр разрешимого графа группы G является пустым.

1 Используемая терминология

В работе используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [9].

Напомним, что *простым графом* Γ называется пара множеств $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$, где $V(\Gamma)$ – множество *вершин* графа Γ, $E(\Gamma)$ – множество *ребер* графа Γ, т. е. множество неупорядоченных пар (a,b) различных элементов a и b из $V(\Gamma)$ (в этом случае говорят, что вершины a и b графа Γ *смежны*).

Конечный простой граф – это простой граф, содержащий конечное число вершин и ребер. *Порядком* $|V(\Gamma)|$ графа Γ называется число всех его вершин.

Далее рассматриваются только конечные простые графы. *Степень вершины* a графа Γ есть количество смежных с ней вершин.

Два графа Γ_1 и Γ_2 называются *равными* $(\Gamma_1=\Gamma_2)$, если $V(\Gamma_1)=V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma_1)=E(\Gamma_2)$. Граф Γ_1 называется *подграфом* графа Γ_2 $(\Gamma_1\subseteq\Gamma_2)$, если $V(\Gamma_1)\subseteq V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma_1)\subseteq E(\Gamma_2)$. Граф Γ называется *объединением графов* Γ_1 и Γ_2 $(\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2)$, если $V(\Gamma)=V(\Gamma_1)\cup V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma)=E\Gamma_1)\cup E(\Gamma_2)$.

Граф Γ называется *связным*, если для любой пары вершин a и b этого графа существует по крайней мере один путь, соединяющий их. *Диаметром* графа Γ называется наибольшая длина кратчайших путей между всеми парами его вершин.

Отношение связности, очевидно, есть отношение эквивалентности. Поэтому существует такое разбиение множества вершин графа на попарно непересекающиеся подмножества, что все вершины в каждом подмножестве связаны, а вершины из различных подмножеств не связаны. Каждое такое подмножество вершин графа вместе с ребрами, инцидентными этим вершинам, образует связный подграф. Следовательно, неориентированный граф представим единственным образом в виде объединения непересекающихся связных подграфов. Эти подграфы называются *связными компонентами* (или *компонентами связности*) графа.

Вершина графа Γ называется *центральной*, если она смежна со всеми другими вершинами Γ. Ясно, что для графа Γ с числом вершин n вершина a является центральной тогда и только тогда, когда степень ее равна $n-1$.

Центром $Z(\Gamma)$ графа Γ называется множество всех его центральных вершин. Если порядок графа Γ равен 1, то полагаем по определению, что $Z(\Gamma)=\varnothing$.

Простой неориентированный граф, в котором каждая пара различных вершин смежна, называется *полным*. Понятно, что граф Γ является полным тогда и только тогда, когда $Z(\Gamma)=V(\Gamma)$.

Матрицей смежности вершин графа Γ с числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) называется квадратная матрица размера $n\times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если вершины i и j смежны, и 0 – в противном случае. Понятно, что граф Γ обладает пустым центром тогда и только тогда, когда в каждой строке и каждом столбце матрицы смежности вершин графа Γ содержатся по крайней мере два нуля (один из этих нулей расположен на главной диагонали матрицы смежности вершин).

2 Предварительные результаты и примеры

Основное строение групп Шмидта установлено в работах [10], [11].

***Лемма* 2.1.** *Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\pi(S)=\{p,q\}$;

(2) $S=[P]<a>$, *где P – нормальная силовская p-подгруппа группы S*, $<a>$ *– ее силовская q-подгруппа*, $<a^q>\subseteq Z(S)$;

(3) *P – наименьшая нормальная подгруппа из S, фактор-группа по которой нильпотентна*;

(4) $P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $S/\Phi(P)$, $\Phi(P)=P'\subseteq Z(S)$;

(5) $\Phi(S)=Z(S)=P'\times<a^q>$;

(6) $C_P(a)=\Phi(P)$;

(7) *если* $Z(S)=1$, *то* $|S|=p^m q$, *где m – показатель p по модулю q*.

***Предложение* 2.1.** *Для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) $\Gamma_A(G)\subseteq\Gamma_{Sch}(G)\subseteq\Gamma_{sol}(G)$;

2) $\Gamma_{sol}(G)=GK(G)\cup\Gamma_{Sch}(G)$.

Доказательство. 1) Пусть $(p,q)\in E(\Gamma_A(G))$. Тогда либо $p\in\pi(A_q(G))$, либо $q\in\pi(A_p(G))$. Пусть для определенности $p\in\pi(A_q(G))$. Тогда в $N_G(G_q)$ найдется *p*-элемент *x*, который не централизует силовскую *q*-подгруппу G_q. Это означает, что подгруппа $G_q<x>$ не является нильпотентной, а потому в ней найдется подгруппа Шмидта *S* с нормальной силовской *q*-подгруппой S_q. Следовательно, $\Gamma_A(G)\subseteq\Gamma_{Sch}(G)$.

Если *S* – подгруппа Шмидта группы *G*, то по лемме 1 она бипримарна, а значит, разрешима. Поэтому $\Gamma_{Sch}(G)\subseteq\Gamma_{sol}(G)$.

2) Ввиду утверждения 1) $\Gamma_{Sch}(G)\subseteq\Gamma_{sol}(G)$. Включение $GK(G)\subseteq\Gamma_{sol}(G)$ очевидно. Поэтому $GK(G)\cup\Gamma_{Sch}(G)\subseteq\Gamma_{sol}(G)$.

Пусть $(p,q)\in E(\Gamma_{sol}(G))$. Тогда по определению группа *G* содержит разрешимую подгруппу *H*, порядок которой делится на *pq*. Пусть $H_{\{p,q\}}$ – холлова $\{p,q\}$-подгруппа из *H*. Если подгруппа $H_{\{p,q\}}$ нильпотентна, то $(p,q)\in E(GK(G))$. Если же подгруппа $H_{\{p,q\}}$ не является нильпотентной, то она содержит либо некоторую $S_{<p,q>}$-подгруппу, либо некоторую $S_{<q,p>}$-подгруппу. Следовательно, $(p,q)\in E(\Gamma_{Sch}(G))$. Таким образом, $\Gamma_{sol}(G)\subseteq GK(G)\cup\Gamma_{Sch}(G)$. □

***Пример* 2.1.** Пусть $G=L_2(31)$. Тогда $\pi(G)=\{2,3,5,31\}$ и

$$E(\Gamma_{sol}(G))=\{(2,3),(2,5),(3,5),(3,31),(5,31)\}.$$

В то же время

$$E(\Gamma_{Sch}(G))=\{(2,3),(2,5),(3,31),(5,31)\},$$

а граф Грюнберга – Кегеля $GK(G)$ имеет три компоненты связности $\{2\}$, $\{31\}$, $\{3,5\}$.

Таким образом, для группы $G=L_2(31)$ графы $GK(G)$, $\Gamma_{Sch}(G)$ и $\Gamma_{sol}(G)$ попарно различны.

***Пример* 2.2.** Пусть $G=M_{22}$. Тогда $|G|=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$ и $N_G(G_2)=G_2$. Отсюда следует, что $A_2(G)=N_G(G_2)/G_2C_G(G_2)$ – единичная группа. Кроме того, $N_G(G_7)=7:3$, а потому $A_7(G)=N_G(G_7)/G_7C_G(G_7)$ – циклическая группа порядка 3. Таким образом, вершины 2 и 7 не являются смежными в силовском графе $\Gamma_A(G)$. С другой стороны, группа $G=M_{22}$ содержит подгруппу $2^3:L_3(2)$, а значит, и подгруппу Фробениуса $2^3:7$. Поэтому вершины 2 и 7 смежны в графе $\Gamma_{Sch}(G)$. Таким образом, в общем случае для простой группы *G* графы $\Gamma_A(G)$ и $\Gamma_{Sch}(G)$ различны.

Группа называется *почти простой*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая является простой неабелевой группой.

Лемма 2.2. *Пусть G – почти простая группа. Тогда граф* $\Gamma_{Sch}(G)$ *является связным и его диаметр не превосходит* 5.

Доказательство. Пусть *p* и *q* – произвольные вершины графа $\Gamma_{Sch}(G)$. Ввиду основного результата работы [4] найдется такая последовательность вершин $p_1=p$, p_2, ..., $p_k=q$ графа $\Gamma_A(G)$, что для любого $i\in\{1,2,...,k-1\}$ вершины p_i и p_{i+1} смежны. При этом $k\le5$. Тогда, как и в предложении 2.1, показывается, что для любого $i\in\{1,2,...,k-1\}$ в группе *G* найдется подгруппа Шмидта, порядок которой делится на p_ip_{i+1}, т. е. вершины p_i и p_{i+1} смежны в графе $\Gamma_{Sch}(G)$. □

***Замечание* 2.1.** Пусть π – непустое множество простых чисел и *G* – почти простая πd-группа. Тогда из леммы 2.1 следует, что в *G* всегда найдется подгруппа Шмидта, порядок которой делится на простые числа *p* и *q*, где $p\in\pi$ и $q\in\pi'$.

Лемма 2.3. *Если K и D – подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и* K/D – $S_{<p,q>}$*-группа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K содержит некоторую* $S_{<p,q>}$*-подгруппу.*

Доказательство. По лемме 11.1 из [12] имеем $K=LD$ и $L\cap D\subseteq\Phi(L)$. Ввиду изоморфизма $K/D\simeq L/L\cap D$ группа $L/L\cap D$ является $S_{<p,q>}$-группой. В частности, группа $L/L\cap D$ не является нильпотентной и ее силовская p-подгруппа нормальна. Но тогда по лемме 4.4 из [12] подгруппа L также не является нильпотентной и ее силовская p-подгруппа нормальна. Отсюда следует, что L содержит некоторую $S_{<p,q>}$-подгруппу. □

***Замечание* 2.2.** В общем случае минимальное добавление L в лемме 2.3 не является подгруппой Шмидта.

***Лемма* 2.4.** *Пусть H и N – подгруппы группы G, причем $N \triangleleft G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Gamma_{Sch}(H) \subseteq \Gamma_{Sch}(G)$;

2) $\Gamma_{Sch}(G/N) \subseteq \Gamma_{Sch}(G)$;

Доказательство.

1) Включения $V(\Gamma_{Sch}(H)) \subseteq V(\Gamma_{Sch}(G))$ и $E(\Gamma_{Sch}(H)) \subseteq E(\Gamma_{Sch}(G))$ очевидны. Поэтому $\Gamma_{Sch}(H) \subseteq \Gamma_{Sch}(G)$.

2) Включение $V(\Gamma_{Sch}(G/N)) \subseteq V(\Gamma_{Sch}(G))$ очевидно. Пусть $(p,q) \in E(\Gamma_{Sch}(G/N))$. Тогда в G/N найдется по крайней мере одна подгруппа Шмидта K/N, которая является либо $S_{<p,q>}$-группой, либо $S_{<q,p>}$-группой. Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что K/N – $S_{<p,q>}$-подгруппа группы G/N. Тогда по лемме 2.3 группа G содержит некоторую $S_{<p,q>}$-группу, т. е. $(p,q) \in E(\Gamma_{Sch}(G))$. □

***Предложение* 2.2.** *Пусть G – группа и $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k\}$ – разбиение множества $\pi(G)$ на попарно непересекающиеся непустые подмножества. Тогда следующие два условия равносильны*:

1) *группа G разлагается в прямое произведение своих холловых подгрупп G_{π_1}, G_{π_2}, ..., G_{π_k}, причем каждая из них не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных холловых подгрупп*;

2) π_1, π_2, ..., π_k *– компоненты связности графа $\Gamma_{Sch}(G)$.*

Доказательство. Пусть $G = G_{\pi_1} \times G_{\pi_2} \times ... \times G_{\pi_k}$ и, кроме того, каждая из подгрупп G_{π_1}, G_{π_2}, ..., G_{π_k} не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных холловых подгрупп. Тогда для любого $i \in \{1,2,...,k\}$ группа G представима в виде $G = G_{\pi_i} \times G_{\pi_i'}$. Отсюда следует, что каждая холлова $\{p,q\}$-подгруппа группы G, где $p \in \pi_i$ и $q \in \pi_i'$, является нильпотентной. Поэтому из теоремы Холла следует, что в группе G не существует подгрупп Шмидта, порядок которых делится на pq, а значит, вершины из подмножеств π_i и π_i' графа $\Gamma_{Sch}(G)$ не связаны. Кроме того, так как подгруппа G_{π_i} не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных холловых подгрупп, то π_i – компонента связности графа $\Gamma_{Sch}(G)$.

Пусть теперь π_1, π_2, ..., π_k – компоненты связности графа $\Gamma_{Sch}(G)$. Покажем, что в этом случае группа G разлагается в прямое произведение своих холловых подгрупп G_{π_1}, G_{π_2}, ..., G_{π_k}, причем каждая из них не разлагается в прямое произведение нетривиальных холловых подгрупп.

Предположим, что это не так, и G – группа наименьшего порядка, для которой это не верно. Тогда ввиду леммы 2.2 группа G не является простой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что $\pi(N) \cap \pi_1 \neq \varnothing$. Отсюда по лемме 2.2 имеем, что N – π_1-группа.

Рассмотрим группу G/N. По лемме 2.4 имеем $\Gamma_{Sch}(G/N) \subseteq \Gamma_{Sch}(G)$. При этом, очевидно, множества π_2, ..., π_k являются компонентами связности графа $\Gamma_{Sch}(G/N)$. Пусть σ_1, σ_2,..., σ_m – все остальные компоненты связности графа $\Gamma_{Sch}(G/N)$ (если они существуют). Тогда $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup ... \cup \sigma_m = \pi_1$. Так как $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G группа G/N разлагается в прямое произведение своих холловых подгрупп $(G/N)_{\sigma_1}, ..., (G/N)_{\sigma_m}, (G/N)_{\pi_2}, ..., (G/N)_{\pi_k}$. Теперь из того, что N – π_1-группа, G обладает нормальной холловой π_1-подгруппой G_{π_1} и холловой π_1'-подгруппой $G_{\pi_1'}$. Таким образом, $G = [G_{\pi_1}]G_{\pi_1'}$. Предположим, что подгруппа $G_{\pi_1'}$ не является нормальной в G. Тогда найдутся числа $p \in \pi_1$ и $q \in \pi_1'$ такие, что некоторый q-элемент x из $G_{\pi_1'}$ нормализует, но не централизует силовскую p-подгруппу G_p группы G. Отсюда следует, что ненильпотентная подгруппа $G_p < x >$ содержит некоторую $S_{<p,q>}$-подгруппу, что по условию невозможно.

Следовательно, $G = G_{\pi_1} \times G_{\pi_1'}$. Снова применяя лемму 2.4, получаем, что $\Gamma_{Sch}(G_{\pi_1'}) \subseteq \Gamma_{Sch}(G)$. При этом непустые множества π_2, ..., π_k являются компонентами связности графа $\Gamma_{Sch}(G_{\pi_1'})$. А так как $|G_{\pi_1'}| < |G|$, то ввиду выбора группы G группа $G_{\pi_1'}$ разлагается в прямое произведение своих холловых подгрупп G_{π_2}, ..., G_{π_k}. □

3 Граф Шмидта с пустым центром

В данном разделе изучаются группы, графы Шмидта которых обладают пустым центром. Понятно, что таким свойством обладает любая группа *G*, для которой граф $\Gamma_{Sch}(G)$ не является связным. Обратное утверждение неверно. На это указывает, в частности, следующий

***Пример* 3.1.** Пусть $G = L_2(11)$. Тогда $V(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2,3,5,11\}$ и
$E(\Gamma_{Sch}(G)) = E(\Gamma_{Sch}(L_2(11))) = \{(2,3),(2,5),(5,11)\}$. Следовательно, граф Шмидта группы *G* является связным, его диаметр равен 3, но при этом $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$.

В следующем предложении описывается подгрупповое строение разрешимой группы, для которой центр графа Шмидта является пустым.

***Предложение* 3.1.** *Пусть G – разрешимая группа. Тогда и только тогда* $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$, *когда в G для любого* $p \in \pi(G)$ *найдется отличное от p простое число* $q \in \pi(G)$ *такое, что холлова* $\{p,q\}$*-подгруппа группы G является нильпотентной.*

Доказательство. Пусть $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$. Тогда в каждой строке и каждом столбце матрицы смежности вершин графа $\Gamma_{Sch}(G)$ содержатся по крайней мере два нуля. Следовательно, для любого $p \in \pi(G)$ найдется отличное от *p* простое число $q \in \pi(G)$ такое, что группа *G* не содержит $S_{<p,q>}$-подгрупп и $S_{<q,p>}$-подгрупп. А так как по лемме 2.1 любая $S_{<p,q>}$-подгруппа и любая $S_{<q,p>}$-подгруппа является $\{p,q\}$-подгруппой, то ввиду теоремы Холла все холловы $\{p,q\}$-подгруппы группы *G* являются нильпотентными.

Пусть теперь в *G* для любого $p \in \pi(G)$ найдется отличное от *p* простое число $q \in \pi(G)$ такое, что холлова $\{p,q\}$-подгруппа группы *G* является нильпотентной. Предположим, что вершины *p* и *q* графа $\Gamma_{Sch}(G)$ смежны. Тогда в *G* найдется по крайней мере одна подгруппа Шмидта *S*, которая является либо $S_{<p,q>}$-группой, либо $S_{<q,p>}$-группой. Так как группа *G* разрешима, то *S* содержится в некоторой холловой $\{p,q\}$-подгруппе *H* группы *G*. Очевидно, *H* не является нильпотентной, что противоречит условию. □

Имеет место следующий достаточный признак простоты группы.

***Предложение* 3.2.** *Если G – непримарная группа и* $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$, *то G является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Предположим, что $|\pi(G)| > 1$ и *G* не является простой неабелевой группой. Пусть *N* – ее минимальная нормальная подгруппа. Если *N* – *p*-группа для некоторого $p \in \pi(G)$, то, очевидно, $p \in Z(\Gamma_{sol}(G))$, что невозможно.

Следовательно, $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, где $k \geq 1$ и N_1, N_2, ..., N_k – изоморфные простые неабелевы группы. Пусть сначала $k \geq 2$. Ясно, что в этом случае $2 \in Z(\Gamma_{sol}(N))$. Если $\pi(N) = \pi(G)$, то $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$, что невозможно. Пусть $r \in \pi(G) \setminus \pi(N)$ и $R \in Syl_r(G)$. Рассмотрим подгруппу $T = NR$. В силу аргумента Фраттини $T = NN_T(S)$ для некоторой подгруппы $S \in Syl_2(N)$. Понятно, что $N_T(S)$ содержит холлову $\{2,r\}$-подгруппу в *T*, и, в частности, вершина 2 смежна с вершиной *r*. В силу произвольного выбора *r* получим, что $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Последнее невозможно.

Таким образом, $k = 1$ и *N* – простая неабелева группа. Тогда $G / C_G(N)$ – почти простая группа. Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $G / C_G(N)$ – простая группа. Тогда $G = N \times C_G(N)$. Ввиду выбора группы *G* подгруппа $C_G(N)$ неединична. Если подгруппа $C_G(N)$ не является разрешимой, ее порядок делится на 2, а потому $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Пришли к противоречию с условием предложения. Если же подгруппа $C_G(N)$ разрешима, то $p \in Z(\Gamma_{sol}(G))$ для любого $p \in \pi(C_G(N))$. Снова пришли к противоречию с выбором группы *G*.

2. Пусть $G / C_G(N)$ не является простой группой. Пусть *p* – некоторое простое число, делящее порядок группы $G / NC_G(N)$. Для отличного от *p* простого числа $q \in \pi(G)$ пусть *Q* – некоторая силовская *q*-подгруппа из $NC_G(N)$. В силу аргумента Фраттини $G = NC_G(N)N_G(Q)$. Следовательно, в *G* найдется неединичный *p*-элемент, нормализующий *q*. Значит, $(p,q) \in E(\Gamma_{sol}(G))$.

Пусть *H* – минимальное добавление к $NC_G(N)$ в *G*. Тогда по лемме 11.1 из [12] $G = HNC_G(N)$ и $H \cap NC_G(N) \subseteq \Phi(H)$. Так как по теореме 4.241 из [13] группа внешних автоморфизмов группы *N* разрешима, то ввиду изоморфизма $G / NC_G(N) \simeq H / H \cap NC_G(N)$ группа $H / H \cap NC_G(N)$ является разрешимой. Но тогда ввиду $H \cap NC_G(N) \subseteq \Phi(H)$ подгруппа *H* также является разрешимой. Поэтому $(p,r) \in E(\Gamma_{sol}(G))$ для любого простого $r \in \pi(G / NC_G(N))$. Отсюда следует, что $p \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Пришли к противоречию с тем, что $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$. □

Группы, для которых центр графа Шмидта пуст, устроены сложнее.

***Пример* 3.2.** Пусть $G = L_2(11) \times A$, где A – нильпотентная $\{2,3,5,11\}$-группа. Тогда $V(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2,3,5,11\}$ и

$E(\Gamma_{Sch}(G)) = E(\Gamma_{Sch}(L_2(11))) = \{(2,3),(2,5),(5,11)\}$.

Следовательно, $\Gamma_{Sch}(G)$ – связный граф и $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$.

Отметим также следующее

***Предложение* 3.3.** *Пусть N – нормальная p-подгруппа группы G и* $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$. *Если* $Z(\Gamma_{Sch}(G/N)) \neq \varnothing$, *то* $G = [G_p]G_{p'}$ *и холлова* $\{p,q\}$*-подгруппа группы G является нильпотентной для любой центральной вершины q графа* $\Gamma_{Sch}(G/N)$.

Доказательство. Так как $Z(\Gamma_{Sch}(G/N)) \neq \varnothing$, то найдется вершина $q \in V(\Gamma_{Sch}(G/N))$ такая, что $(q,r) \in E(\Gamma_{Sch}(G/N))$ для любого $r \in \pi(G/N)$, отличного от q. Если $p \in V(\Gamma_{Sch}(G/N))$, то $Z(\Gamma_{Sch}(G)) \neq \varnothing$, что противоречит условию. Значит, $p \notin V(\Gamma_{Sch}(G/N))$, т. е. $|G/N|$ не делится на p. Отсюда N – нормальная силовская p-подгруппа группы G. По теореме Шура – Цассенхауса N дополняема в G и $G = [G_p]G_{p'}$. Кроме того, вершины p и q графа $\Gamma_{Sch}(G)$ не смежны. Поэтому холлова $\{p,q\}$-подгруппа группы G является нильпотентной. □

4 Центр графа Шмидта простой спорадической группы

***Теорема* 4.1.** *Пусть G – простая спорадическая группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) если $G \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS;$ $M^cL, O'N, HN, Co_3, Co_2, BM, M\}$, то $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$;

(2) *если* $G \in \{J_1, J_4, Ly, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}\}$, *то* $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$;

(3) *если* $G \in \{J_2, Th\}$, *то* $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2,3\}$.

Доказательство. Пусть $p \in Z(\Gamma_{Sch}(G))$. Тогда ввиду предложения 2.1 $p \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Отсюда в силу теоремы 2 из [14] справедливы следующие утверждения:

1) $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \varnothing$ для любой группы

$$G \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS; M^cL, O'N, HN, Co_3, Co_2, BM, M\};$$

2) $Z(\Gamma_{Sch}(G)) \subseteq \{2\}$ для любой группы

$$G \in \{J_1, J_4, Ly, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}\};$$

3) $Z(\Gamma_{Sch}(G)) \subseteq \{2,3\}$ для $G \in \{J_2, Th\}$.

Таким образом, остается проверить все группы из списков

$$\{J_1, J_4, Ly, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}\}$$

и $\{J_2, Th\}$.

1. $G \simeq J_1$. Согласно [15, с. 36], $\pi(G) = \{2,3,5,7,11,19\}$ и группа G имеет максимальные подгруппы $2 \times A_5$, 7:6, 11:10 и 19:6. Следовательно, вершина 2 смежна со всеми другими вершинами графа $\Gamma_{Sch}(G)$, а значит, $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

2. $G \simeq J_4$. Как следует из [15, с. 188–190], $\pi(G) = \{2,3,5,7,11,23,29,31,37,43\}$ и группа J_4 содержит максимальные подгруппы 37:12, 43:14, 29:28, $L_2(23):2$, $L_2(32):5$, $2^{11}:M_{24}$. Отсюда заключаем, что группа J_4 содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p \in \{37,43,29,23,11,31,3,5,7\}$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

3. $G \simeq Ly$. Тогда (см. [15, с. 174–175]) $\pi(G) = \{2,3,5,7,11,31,37,67\}$ и группа G содержит максимальные подгруппы 37:18, 67:22, $3^{\cdot}McL:2$ и $G_2(5)$. Последняя группа, в свою очередь, имеет максимальные подгруппы $2^3:L_3(2)$ и $L_3(5):2$. Отсюда заключаем, что группа Ly содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p \in \{37,67,11,31,7,3,5\}$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

4. $G \simeq He$. Из [15, с. 104–105] следует, что $\pi(G) = \{2,3,5,7,17\}$ и группа G содержит максимальные подгруппы $2_+^{1+6}.L_3(2)$ и $S_4(4):2$. Подгруппа $S_4(4):2$, в свою очередь, содержит подгруппы $L_2(16):2$ и $(A_5 \times A_5):2$. Отсюда заключаем, что группа He содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p \in \{7,17,3,5\}$, т. е. $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

5. $G \simeq Co_1$. Согласно [15, с. 180–187], $\pi(G) = \{2,3,5,7,11,13,23\}$ и группа G содержит максимальные подгруппы $2^{11}:M_{24}$ и $3^{\cdot}Suz:2$. Отсюда заключаем, что группа Co_1 содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p \in \{3,5,7,11,23,13\}$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

6. $G \simeq Suz$. Так как ввиду [15, с. 128–131] $\pi(G) = \{2,3,5,7,11,13\}$ и группа G содержит максимальные подгруппы $L_3(3):2$, $J_2:2$, $M_{12}:2$, то в ней найдутся подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p \in \{3,13,5,7,11\}$. Поэтому $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

7. $G \simeq Ru$. Согласно [15, с. 126–127], $\pi(G) = \{2,3,5,7,13,29\}$. Кроме того, группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(29)$, $L_2(13):2$, A_8. Отсюда заключаем, что группа Ru содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p \in \{29,13,7,3,5\}$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G)) = \{2\}$.

8. $G \simeq Fi_{22}$. Из [15, с. 156–163] следует, что $\pi(G)=\{2,3,5,7,11,13\}$ и группа G содержит максимальные подгруппы S_{10}, $2^{10}:M_{22}$ и $O_7(3)$. Кроме того, группа $O_7(3)$ содержит максимальную подгруппу $L_4(3):2_2$. Отсюда заключаем, что группа Fi_{22} содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p\in\{3,5,7,11,13\}$. Значит, $Z(\Gamma_{Sch}(G))=\{2\}$.

9. $G \simeq Fi_{23}$. Ввиду [15, с. 177–179] имеем, что $\pi(G)=\{2,3,5,7,11,13,17,23\}$ и группа G содержит максимальные подгруппы $L_2(17):2$, $2^{11\cdot}M_{23}$ и $S_3\times O_7(3)$. Кроме того, группа $O_7(3)$ содержит максимальную подгруппу $L_4(3):2_2$. Отсюда заключаем, что группа Fi_{23} содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p\in\{17,3,5,7,11,23,13\}$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G))=\{2\}$.

10. $G\simeq Fi'_{24}$. Согласно [15, с. 200–207], $\pi(G)=\{2,3,5,7,11,13,17,23,29\}$. Кроме того, группа G содержит максимальные подгруппы Fi_{23}, 29:14. Используя далее пункт 9, заключаем, что группа Fi'_{24} содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p\in\{3,5,7,11,13,17,23,29\}$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G))=\{2\}$.

11. $G\simeq J_2$. Согласно [15, с. 42–43], $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$ и группа G имеет максимальные подгруппы A_5, $5^2:D_{12}$ и $L_3(2):2$. Отсюда следует, что G для любого $p\in\{3,5,7\}$ содержит некоторую подгруппу Шмидта, порядок которой делится на $2p$, и G для любого $p\in\{2,5,7\}$ содержит некоторую подгруппу Шмидта, порядок которой делится на $3p$. Следовательно, $Z(\Gamma_{Sch}(G))=\{2,3\}$.

12. $G\simeq Th$. Согласно [15, с. 176–177], $\pi(G)=\{2,3,5,7,13,19,31\}$ группа G содержит максимальные подгруппы $2^5:L_5(2)$, $L_2(19):2$, ${}^3D_4(2):3$. Кроме того, группа ${}^3D_4(2)$ содержит максимальную подгруппу 13:4. Отсюда заключаем, что группа Th содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $2p$, где $p\in\{3,5,7,31,19,13\}$. Следовательно, $2\in Z(\Gamma_{Sch}(G))$.

Так как группа G содержит максимальные подгруппы 31:15, ${}^3D_4(2):3$, $L_2(19):2$, то отсюда заключаем, что группа Th содержит подгруппы Шмидта, порядок которых делится на $3p$, где $p\in\{31,7,13,2,19,5\}$. Следовательно, $3\in Z(\Gamma_{Sch}(G))$. Таким образом, $Z(\Gamma_{Sch}(G))=\{2,3\}$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams*, *J.S.* Prime graph components of finite groups / J.S. Williams // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 2. – P. 487–513.
2. *Мазуров*, В.Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов / В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37, № 6. – С. 651–666.
3. *Abe*, *S.* A generalization of prime graphs of finite groups / S. Abe, N. Iiyori // Hokkaido Math. J. – 2000. – Vol. 29, № 2. – P. 391–407.
4. *Amberg*, *B.* Criteria for the solubility and non-simplicity of finite groups / B. Amberg, A. Carocca, L.S. Kazarin // J. Algebra. – 2005. – Vol. 285. – P. 58–72.
5. *Kazarin*, *L.S.* On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers / L.S. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // Isr. J. Math. – 2011. – № 186. – P. 251–271.
6. *Княгина*, *В.Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.
7. *Васильев*, *А.Ф.* Арифметические графы и классы конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 66–84.
8. *Мурашко*, *В.И.* Группы с заданными системами подгрупп Шмидта / В.И. Мурашко // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60, № 2. – С. 429–440.
9. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. *Шмидт*, *О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31, № 3–4. – С. 366–372.
11. *Гольфанд*, *Ю.А.* О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.
12. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
13. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – Москва: Мир, 1985. – 352 с.
14. *Kazarin*, *L.S.* On centers of soluble graphs / L.S. Kazarin, V.N. Tyutyanov // Сиб. электрон. матем. изв. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 1517–1530.
15. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке БРФФИ и РНФ в рамках научного проекта № Ф23РНФ–237.

Поступила в редакцию 17.10.2022.

Информация об авторах

Бычков Павел Владимирович – к.ф.-м.н., доцент
Каморников Сергей Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Тютянов Валентин Николаевич – д.ф.-м.н., профессор