

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ПОБУЖДАЕМЫЕ УДАРНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

М.В. Маркова

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

FORCED VIBRATIONS OF A THREE-LAYER STEP-VARIABLE THICKNESS CIRCULAR PLATE UNDER IMPACT

M.V. Markova

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Представлена задача о вынужденных колебаниях круговой трёхслойной пластины, имеющей ступенчатое изменение толщины внешних обрамляющих слоёв. Рассмотрено историческое изменение подходов к построению механико-математической модели для решения поставленной задачи. При описании деформирования пластины применена гипотеза «ломаной нормали»: для тонких внешних слоёв использованы гипотезы Кирхгофа, для относительно толстого срединного заполнителя – гипотеза Тимошенко. Уравнения движения пластины получены из вариационного принципа Гамильтона. Построено решение для определения перемещений, возникающих в пластине при вынужденных колебаниях, побуждаемых ударным воздействием. Приведены численные результаты полученного решения и выполнен анализ влияния вида функции ударного воздействия на характер колебаний.

Ключевые слова: *круговая трёхслойная пластина, пластина ступенчато-переменной толщины, вынужденные колебания, удар.*

Для цитирования: *Маркова, М.В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины, побуждаемые ударным воздействием / М.В. Маркова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 28–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_28. – EDN: CRBKQ*

Abstract. The problem of forced oscillations of a three-layer circular plate with step-variable thickness of the outer layers is presented. The historical review of the theories that have been developed for the straining representation of a three-layer structure is presented. The deformation of the plate follows the zig-zag theory. In thin border layers of plate Kirchhoff's hypotheses are valid. In a relatively thick in thickness medium layer Timoshenko's hypothesis is fulfilled. The equations of motion are derived from Hamilton's variational principle. A solution is constructed to determine the displacements during forced vibrations of a plate under impact. Numerical results of the obtained solution are presented. The influence of impact function on the oscillatory character is analyzed.

Keywords: *circular three-layer plate, plates with step-variable thickness, forced vibration, stroke.*

For citation: *Markova, M.V. Forced vibrations of a three-layer step-variable thickness circular plate under impact / M.V. Markova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 28–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_28 (in Russian). – EDN: CRBKQ*

Введение

Выбор оптимального исполнения конструктивного элемента определяется превалярованием приоритетных физико-механических показателей при одновременном минимуме экономических затрат на изготовление, монтаж и последующую эксплуатацию. В этой связи применение композитных материалов открывает более широкий диапазон возможных конструктивных решений при проектировании. Одним из наиболее часто встречающимся композитным элементом является трёхслойная пластина, основная идея которой заключается в обрамлении толстого срединного слоя, отвечающего за тепло-, звуко-, электропроводность или магнитную проницаемость, тонкими прочными и жёсткими внешними слоями,

воспринимающими механическое воздействие. Исследованию работы трёхслойных пластин под внешней нагрузкой уже посвящено немало работ как среди отечественных, так и среди зарубежных авторов.

В истории видоизменения построения физико-механической модели деформирования трёхслойной пластины можно выделить два основных подхода: непрерывно-структурный подход, базирующийся на применении гипотезы Кирхгофа о прямолинейности и перпендикулярности нормали [1] ко всему пакету разнородных слоёв, и дискретно-структурный, основанный на разделении свойств слоёв пакета и привлечении сдвиговой теории Тимошенко [2] как лишь к срединному слою (теория «ломаной нормали»,

получившая широкое распространение в работах Болотина В.В. и Новичкова Ю.Н. [3]–[5]), так и к каждому слою в отдельности (подход Григोलюка – Чулкова [6]–[7]).

Большая часть имеющихся на сегодняшний день исследований посвящена трёхслойным пластинам с постоянной толщиной вдоль сечения. В данной же работе будет построена модель динамического деформирования пластины со ступенчатым изменением толщины внешних несущих слоёв. А также рассмотрен характер вынужденных колебаний такой пластины при различных способах приложения ударной нагрузки.

1 Постановка задачи

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим трёхслойную пластину, у которой тонкие внешние несущие слои (1 и 2) имеют ступенчатое изменение толщины вдоль радиуса r , а толщина срединного заполнителя (3) неизменна: $h_3 = 2c = \text{const}$, где c – расстояние от зоны склейки заполнителя с внешними слоями, до координатной плоскости (r, φ) (рисунок 1.1).

Толщины внешних слоёв (1 и 2) пластины зададим при помощи функции Хевисайда $H_0(\xi)$ [8]:

$$H_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0, \end{cases}$$

$$h_1(r) = h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) \cdot H_0(r - R_1),$$

$$h_2(r) = h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) \cdot H_0(r - R_1).$$

Здесь I, II – номера участков пластины, соответствующие разной суммарной толщине пакета, R_1 – значение величины радиуса, в точке которого происходит перепад (радиус участка I).

Весь пакет работает совместно без проскальзывания между слоями. В момент времени t_0 на всю площадь пластины действует ударная нагрузка, задаваемая двумя способами (рисунок 1.2):

- в виде резко прикладываемого и резко снимаемого воздействия;
- в виде резко прикладываемого и плавно (линейно) убывающего воздействия.

Момент приложения внешней нагрузки t_0 считаем началом вынужденных колебаний пластины. Длительность действия прикладываемой нагрузки – τ_q ; её максимальная интенсивность – q_0 . Выражение для внешней нагрузки зададим при помощи функции Хевисайда:

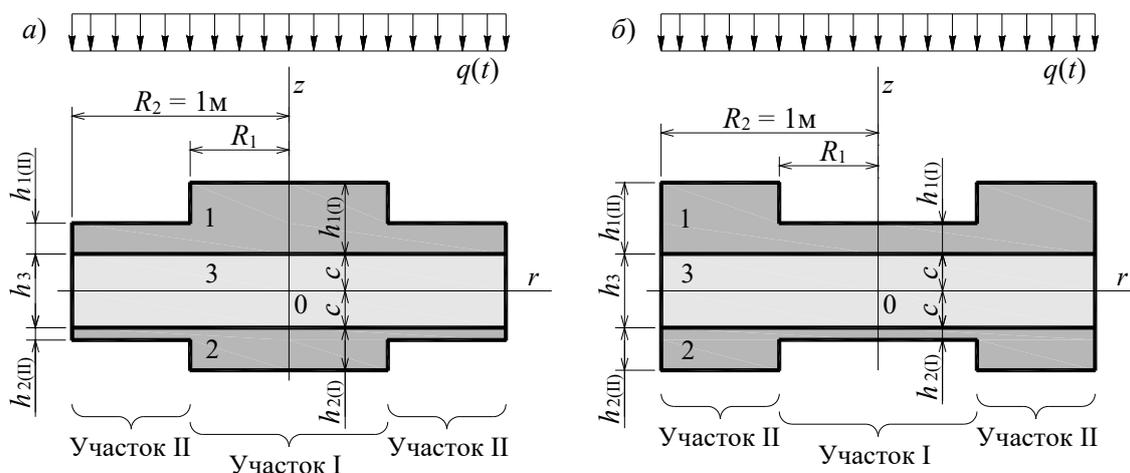


Рисунок 1.1 – Круговая трёхслойная ступенчатая пластина:
а) с уширением в центральной части; б) с сужением в центральной части

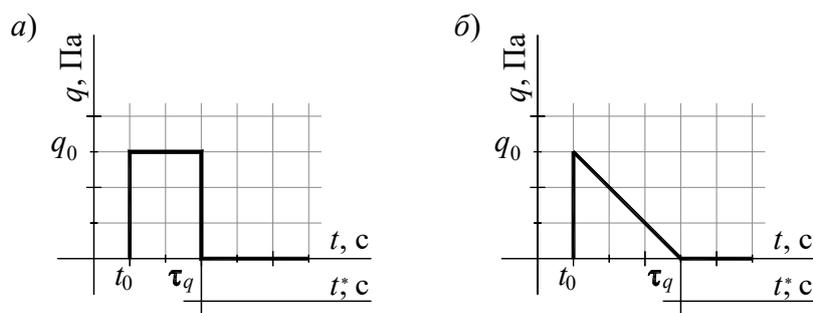


Рисунок 1.2 – Ударное воздействие: а) резко снимаемое; б) линейно убывающее

– для резко снимаемого воздействия

$$q(t) = q_0 \cdot H_0(\tau_q - t), \quad (1.1)$$

– для линейно убывающего воздействия

$$q(t) = \left(q_0 - \frac{q_0}{\tau_q} \cdot t \right) \cdot H_0(\tau_q - t). \quad (1.2)$$

Деформирование пластины опишем с помощью дискретно-структурной модели, предложенной В.В. Болотиным [3]. Для тонких внешних слоёв пластины считаем справедливой гипотезу Кирхгофа [1]. В этих слоях нормаль, проведённая к недеформированной срединной поверхности, остаётся прямолинейной после изгиба пластины и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. Деформирование относительно толстого срединного заполнителя описываем с помощью сдвиговой гипотезы Тимошенко [2]. Рассматриваемая ранее нормаль в пределах толщины срединного заполнителя так же остаётся прямолинейной при изгибе пластины, однако при этом она дополнительно поворачивается относительно нормали к деформированной срединной поверхности на некоторый угол.

Под действием внешней нагрузки в пластине возникает прогиб w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u . С учётом принятых гипотез, на рисунке 1.3 представлена модель деформирования слоёв рассматриваемой пластины.

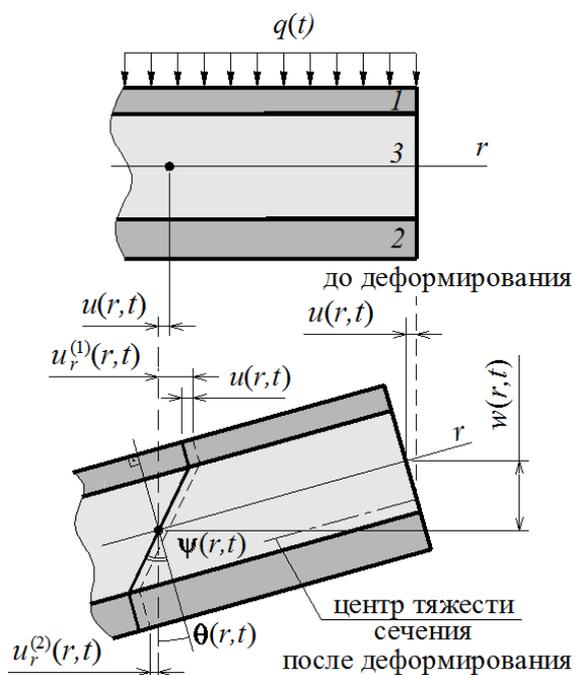


Рисунок 1.3 – Перемещения, возникающие в трёхслойной пластине при изгибе

При $c < z \leq c + h_1(r)$:

$$u_r^{(1)}(r,t) = u(r,t) + c\psi(r,t) - zw_{,r}(r,t),$$

при $-c \leq z \leq c$:

$$u_r^{(3)}(r,t) = u(r,t) + z\psi(r,t) - zw_{,r}(r,t),$$

при $-c - h_2(r) \leq z < -c$:

$$u_r^{(2)}(r,t) = u(r,t) - c\psi(r,t) - zw_{,r}(r,t),$$

здесь z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $u(r,t) \pm c\psi(r,t)$ – величина смещения внешних слоёв 1 и 2 за счёт деформации заполнителя 3.

Уравнения движения для круговой трёхслойной пластины, имеющей переменную толщину вдоль радиуса, были получены из вариационного принципа Гамильтона [9] и описаны в работе [10]:

$$\begin{aligned} & a_3^+ L_3(u) + 2a_{3,r}^+ L_2(u) + a_5^+ L_3(\psi) + \\ & + 2a_{5,r}^+ L_2(\psi) - a_6^+ L_3(w_{,r}) - 2a_{6,r}^+ L_2(w_{,r}) + \\ & + \left(a_{3,rr}^+ + \frac{a_{3,r}^-}{r} \right) u_{,r} + \left(a_{5,rr}^+ + \frac{a_{5,r}^-}{r} \right) \psi_{,r} - \\ & - \left(a_{6,rr}^+ + \frac{a_{6,r}^-}{r} \right) w_{,rr} + \left(a_{3,rr}^- - \frac{a_{3,r}^+}{r} \right) \frac{u}{r} + \\ & + \left(a_{5,rr}^- - \frac{a_{5,r}^+}{r} \right) \frac{\psi}{r} - \left(a_{6,rr}^- - \frac{a_{6,r}^+}{r} \right) \frac{w_{,r}}{r} - \\ & - \left[M_{3,r} + \frac{M_3}{r} \right] \ddot{u} - \left[M_{5,r} + \frac{M_5}{r} \right] \ddot{\psi} + \\ & + \left[M_{6,r} + \frac{M_6}{r} \right] \ddot{w}_{,r} - \\ & - M_3 \ddot{u}_{,r} - M_5 \ddot{\psi}_{,r} + M_6 \ddot{w}_{,rr} - M_1 \ddot{w} = -q(t), \\ & a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w_{,r}) + \\ & + a_{1,r}^+ u_{,r} + a_{2,r}^+ \psi_{,r} - a_{3,r}^+ w_{,rr} + \\ & + a_{1,r}^- \frac{u}{r} + a_{2,r}^- \frac{\psi}{r} - a_{3,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - \\ & - M_1 \ddot{u} - M_2 \ddot{\psi} + M_3 \ddot{w}_{,r} = 0, \\ & a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w_{,r}) + \\ & + a_{2,r}^+ u_{,r} + a_{4,r}^+ \psi_{,r} - a_{5,r}^+ w_{,rr} + \\ & + a_{2,r}^- \frac{u}{r} + a_{4,r}^- \frac{\psi}{r} - a_{5,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - \\ & - M_2 \ddot{u} - M_4 \ddot{\psi} + M_5 \ddot{w}_{,r} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь M_n и a_n^\pm – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины; $L_2(g)$ и $L_3(g)$ – дифференциальные операторы:

$$L_2(g) = \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) = \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} = g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

В работе [11] система (1.3) была адаптирована для моделирования процесса колебаний

частного случая пластины переменной толщины: ступенчатой пластины; и для каждого участка представленной на рисунке 1.1 пластины приняла следующий вид:

$$\begin{aligned} & \Delta \Delta w_{(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \ddot{w}_{(I,II)} + \\ & + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} \ddot{w}_{(I,II)} = D_{(I,II)} q(t), \\ & u_{(I,II)} = b_{1(I,II)} w_{(I,II)r} + r C_{1(I,II)} + \\ & + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \ddot{w}_{(I,II)} dr, \\ & \Psi_{(I,II)} = b_{2(I,II)} w_{(I,II)r} + r C_{3(I,II)} + \\ & + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \ddot{w}_{(I,II)} dr, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где Δ – оператор Лапласа; D , b_i , m_i – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины; C_n – константы интегрирования, определяемые из граничных условий закрепления пластины.

Общее решение для перемещений в пластине с двумя участками формируется из частных решений на каждом участке с помощью функции Хевисайда $H_0(r)$:

$$\begin{aligned} w &= w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1), \\ \Psi &= \Psi_{(I)} + (\Psi_{(II)} - \Psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1), \\ u &= u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Граничные условия, формирующие систему уравнений, для определения констант интегрирования C_n представляют собой требование равенства всех перемещений и внутренних усилий в точке сопряжения двух участков (при $r = R_1$) [12]–[14], а также ограничения, диктуемые способом опирания внешнего контура пластины (в точке $r = R_2$):

$$\begin{aligned} u_{(I)} &= u_{(II)}, \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}, \\ w_{(I)} &= w_{(II)}, \quad w_{,r(I)} = w_{,r(II)}, \\ T_{r(I)} &= T_{r(II)}, \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}, \\ H_{r(I)} &= H_{r(II)}, \quad Q_{(I)} = Q_{(II)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

– при жёсткой заделке внешнего контура $u_{(II)} = 0, \Psi_{(II)} = 0, w_{(II)} = 0, w_{,r(II)} = 0,$ (1.7)

– при шарнирном опирании, с условием установки жёсткой диафрагмы по контуру, препятствующей взаимному сдвигу слоёв

$$u_{(II)} = 0, \Psi_{(II)} = 0, w_{(II)} = 0, M_{r(II)} = 0. \quad (1.8)$$

Здесь $w_{,r}$ – угол поворота нормали пластины при изгибе; T_r – продольная сила; M_r – изгибающий момент; H_r – момент на границе контакта заполнителя и внешних слоёв; Q – поперечная сила.

2 Построение решения

Решение системы (1.4) для каждого участка пластины представим в виде суммы квазистатических (w_s, u_s, Ψ_s) и динамических (w_d, u_d, Ψ_d) составляющих перемещений [15]:

$$\begin{aligned} w_{(I,II)} &= w_{s(I,II)} + w_{d(I,II)}, \\ u_{(I,II)} &= u_{s(I,II)} + u_{d(I,II)}, \\ \Psi_{(I,II)} &= \Psi_{s(I,II)} + \Psi_{d(I,II)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При моделировании квазистатического деформирования (т. е. без учёта инерционных слагаемых) система (1.4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_{s(I,II)} &= D_{(I,II)} q(t), \\ u_{s(I,II)} &= b_{1(I,II)} w_{s(I,II)r} + r C_{s1(I,II)} + \frac{C_{s2(I,II)}}{r}, \\ \Psi_{s(I,II)} &= b_{2(I,II)} w_{s(I,II)r} + r C_{s3(I,II)} + \frac{C_{s4(I,II)}}{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение для квазистатических составляющих перемещений может быть получено путём четырёхкратного интегрирования первого выражения системы (2.2) с последующей подстановкой полученного результата в следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} w_{s(I,II)} &= C_{s5(I,II)} + C_{s6(I,II)} r^2 + \\ & + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + \\ & + D_{(I,II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I,II)}) dr dr dr dr, \\ u_{s(I,II)} &= C_{s1(I,II)} r + \frac{C_{s2(II)}}{r} + 2 C_{s6(I,II)} b_{1(I,II)} r + \\ & + C_{s7(II)} \frac{b_{1(II)}}{r} + C_{s8(II)} b_{1(II)} r (2 \ln r + 1) + \\ & + \frac{D_{(I,II)} b_{1(I,II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I,II)}) dr dr dr, \\ \Psi_{s(I,II)} &= C_{s3(I,II)} r + \frac{C_{s4(II)}}{r} + 2 C_{s6(I,II)} b_{2(I,II)} r + \\ & + C_{s7(II)} \frac{b_{2(II)}}{r} + C_{s8(II)} b_{2(II)} r (2 \ln r + 1) + \\ & + \frac{D_{(I,II)} b_{2(I,II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (r q_{(I,II)}) dr dr dr. \end{aligned}$$

Здесь константы интегрирования C_{sn} так же определяются из граничных условий (1.6)–(1.8).

Подставив выражения (2.1) в систему (1.4), мы получим:

$$\begin{aligned} & \Delta \Delta (w_{s(I,II)} + w_{d(I,II)}) + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta (\ddot{w}_{s(I,II)} + \ddot{w}_{d(I,II)}) + \\ & + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} (\ddot{w}_{s(I,II)} + \ddot{w}_{d(I,II)}) = D_{(I,II)} q(t), \\ & u_{s(I,II)} + u_{d(I,II)} = b_{1(I,II)} (w_{s(I,II)r} + w_{d(I,II)r}) + \\ & + r C_{1(I,II)} + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r (\ddot{w}_{s(I,II)} + \ddot{w}_{d(I,II)}) dr, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Psi_{s(I,II)} + \Psi_{d(I,II)} = b_{2(I,II)} \left(\ddot{w}_{s(I,II)r} + \ddot{w}_{d(I,II)r} \right) + rC_{3(I,II)} + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \left(\ddot{w}_{s(I,II)} + \ddot{w}_{d(I,II)} \right) dr.$$

Прикладываемое к пластине внешнее воздействие (1.1) и (1.2) можно рассмотреть в виде двух отдельных временных участков: $t_0 \leq t < \tau_q$ – временной участок «q», соответствующий вынужденным колебаниям от линейной по времени внешней нагрузки $q(t)$; $\tau_q \leq t < \infty$ – временной участок «0», соответствующий свободным колебаниям пластины, начальными условиями для которых служат функции прогиба и скорости движения точек пластины при вынужденных колебаниях предшествующего временного участка в момент времени $t = \tau_q$. На каждом из рассматриваемых временных участках:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{s(I,II)} = & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(C_{s5(I,II)} + C_{s6(I,II)} r^2 + \right. \\ & \left. + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + \right. \\ & \left. + D_{(I,II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I,II)}) dr dr dr dr \right) = 0. \end{aligned}$$

В этом случае систему (2.3) можно переписать в виде:

$$\Delta \Delta w_{d(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \ddot{w}_{d(I,II)} + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} \ddot{w}_{d(I,II)} = D_{(I,II)} q(t) - \Delta \Delta w_{s(I,II)},$$

$$\begin{aligned} u_{s(I,II)} + u_{d(I,II)} = & b_{1(I,II)} \left(w_{s(I,II)r} + w_{d(I,II)r} \right) + \\ & + rC_{1(I,II)} + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I,II)} dr, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{s(I,II)} + \Psi_{d(I,II)} = & b_{2(I,II)} \left(w_{s(I,II)r} + w_{d(I,II)r} \right) + \\ & + rC_{3(I,II)} + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I,II)} dr. \end{aligned}$$

С учётом (2.2) получим:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_{d(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \ddot{w}_{d(I,II)} + D_{(I,II)} M_{1(I,II)} \ddot{w}_{d(I,II)} = & 0, \\ u_{d(I,II)} = & b_{1(I,II)} w_{d(I,II)r} + rC_{d1(I,II)} + \\ & + \frac{C_{d2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I,II)} dr, \\ \Psi_{d(I,II)} = & b_{2(I,II)} w_{d(I,II)r} + rC_{d3(I,II)} + \\ & + \frac{C_{d4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \ddot{w}_{d(I,II)} dr. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Т. е. динамические составляющие перемещений определяются из системы дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания пластины.

Принцип построения решения системы (2.5) для каждого участка пластины базируется на использовании метода Фурье [16] и представлен в работе [17].

$$w_{d(I,II)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d5n(I,II)} I_0 \left(r \gamma_{(I,II)n}^+ \right) + \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + C_{d6n(II)} K_0 \left(r \gamma_{(II)n}^+ \right) + C_{d7n(I,II)} J_0 \left(r \gamma_{(I,II)n}^- \right) + \right. \\ & \left. + C_{d8n(II)} Y_0 \left(r \gamma_{(II)n}^- \right) \right] \times \left(A_{dn} \cos(\omega_n t) + B_{dn} \sin(\omega_n t) \right) = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} W_{d(I,II)n}(r) \times \left(A_{dn} \cos(\omega_n t) + B_{dn} \sin(\omega_n t) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{d(I,II)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d1n(I,II)}^* r + \frac{C_{d2n(II)}^*}{r} + \right. \\ & \left. + C_{d5n(I,II)} I_1 \left(r \gamma_{(I,II)n}^+ \right) \left(\gamma_{(I,II)n}^+ b_{1(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - \right. \\ & \left. - C_{d6n(II)} K_1 \left(r \gamma_{(II)n}^+ \right) \left(\gamma_{(II)n}^+ b_{1(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - \right. \\ & \left. - C_{d7n(I,II)} J_1 \left(r \gamma_{(I,II)n}^- \right) \left(\gamma_{(I,II)n}^- b_{1(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - \right. \\ & \left. - C_{d8n(II)} Y_1 \left(r \gamma_{(II)n}^- \right) \left(\gamma_{(II)n}^- b_{1(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \right] \times \\ & \times \left(A_{dn} \cos(\omega_n t) + B_{dn} \sin(\omega_n t) \right) = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} U_{d(I,II)n}(r) \times \left(A_{dn} \cos(\omega_n t) + B_{dn} \sin(\omega_n t) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{d(I,II)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d3n(I,II)}^* r + \frac{C_{d4n(II)}^*}{r} + \right. \\ & \left. + C_{d5n(I,II)} I_1 \left(r \gamma_{(I,II)n}^+ \right) \left(\gamma_{(I,II)n}^+ b_{2(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - \right. \\ & \left. - C_{d6n(II)} K_1 \left(r \gamma_{(II)n}^+ \right) \left(\gamma_{(II)n}^+ b_{2(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - \right. \\ & \left. - C_{d7n(I,II)} J_1 \left(r \gamma_{(I,II)n}^- \right) \left(\gamma_{(I,II)n}^- b_{2(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - \right. \\ & \left. - C_{d8n(II)} Y_1 \left(r \gamma_{(II)n}^- \right) \left(\gamma_{(II)n}^- b_{2(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \right] \times \\ & \times \left(A_{dn} \cos(\omega_n t) + B_{dn} \sin(\omega_n t) \right) = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{d(I,II)n}(r) \times \left(A_{dn} \cos(\omega_n t) + B_{dn} \sin(\omega_n t) \right), \end{aligned}$$

где γ_n^\pm – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний ω_n пластины; $I_{0,1}(r\gamma_n^+)$, $K_{0,1}(r\gamma_n^+)$, $J_{0,1}(r\gamma_n^-)$, $Y_{0,1}(r\gamma_n^-)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков от действительного и мнимого аргумента [18], [19]; C_{dn} – константы интегрирования, определяемые из граничных условий (1.6)–(1.8); $W_{dn}(r)$, $U_{dn}(r)$, $\Psi_{dn}(r)$ – функции динамических составляющих перемещений n -ной формы колебаний, зависящие только от координат; A_{dn} и B_{dn} – константы,

определяемые из начальных условий колебаний пластины.

Будем считать, что до начала внешнего воздействия пластина находилась в покое и занимала горизонтальное положение, т. е. начальные условия для вынужденных колебаний (временной участок «q») можно представить выражением:

$$w^q(r, 0) = w_s(r, 0) + w_d^q(r, 0) = 0.$$

В этом случае

$$w_d^q(r, 0) = -w_s(r, 0), \quad \dot{w}_d^q(r, 0) = -\dot{w}_s(r, 0). \quad (2.6)$$

Из свойства ортогональности функций [20] и условий нормировки

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{R_2} r [W_{dn}(r)]^2 dr = 1 \right): \\ A_{dn}^q &= \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) w_d^q(r, 0) dr = \\ &= - \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) w_s(r, 0) dr; \\ B_{dn}^q &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) \dot{w}_d^q(r, 0) dr = \\ &= \frac{-1}{\omega_n} \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) \dot{w}_s(r, 0) dr. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для свободных колебаний пластины (временной участок «0»), начинающихся после полного снятия внешней нагрузки, начальные условия можно представить выражением:

$$\begin{aligned} w^0(r, 0) &= w_d^0(r, 0) = w^q(r, \tau_q), \\ w_d^0(r, 0) &= w_s(r, \tau_q) + w_d^q(r, \tau_q), \\ \dot{w}_d^0(r, 0) &= \dot{w}_s(r, \tau_q) + \dot{w}_d^q(r, \tau_q) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} A_{dn}^0 &= \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) w_d^0(r, 0) dr = \\ &= \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) [w_s(r, \tau_q) + w_d^q(r, \tau_q)] dr; \\ B_{dn}^0 &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) \dot{w}_d^0(r, 0) dr = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_2} r W_{dn}(r) [\dot{w}_s(r, \tau_q) + \dot{w}_d^q(r, \tau_q)] dr. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Итоговое выражение для функции прогиба пластины при вынужденных колебаниях, побуждаемых ударным воздействием

$$\begin{aligned} w(r, t) &= w_s(r, t) + w_d^q(r, t) + \\ &+ \left(w_d^0(r, [t - \tau_q]) - w_s(r, t) - w_d^q(r, t) \right) \times \\ &\times H_0(t - \tau_q). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь время функции динамической составляющей прогиба на временном участке «0» определено как $[t - \tau_q]$, ввиду того, что выражения (2.9) для констант интегрирования A_{dn}^0 и B_{dn}^0

получены из условия начала свободных колебаний, т. е. при $t = 0$.

3 Численные исследования

Для численной апробации полученного решения рассмотрим защемлённые по внешнему контуру (1.7) круговые трёхслойные ступенчатые пластины, имеющие уширение в центральной части (рисунок 1.1, а). Внешний радиус пластин $R_2 = 1$ м. Радиус центрального участка I составляет половину общего радиуса пластины ($R_1 = 0,5R_2$). Толщина внешних слоёв пластин на участке I – $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04$ м; на участке II – $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02$ м. Толщина срединного заполнителя – $h_3 = 0,3$ м. Состав слоёв пластин представлен материалами «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т» и «сталь–ПС-1–сталь».

Физико-механические характеристики материалов слоёв [21]–[23]: дюралюминий (Д16Т) – $\rho_{1,2} = 2700$ кг/м³; $K_{1,2} = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па, $G_{1,2} = 0,267 \cdot 10^{11}$ Па; фторопласт-4 – $\rho_3 = 2150$ кг/м³; $K_3 = 345 \cdot 10^6$ Па, $G_3 = 90 \cdot 10^6$ Па; сталь – $\rho_{1,2} = 7850$ кг/м³; $K_{1,2} = 1,913 \cdot 10^{11}$ Па, $G_{1,2} = 0,78 \cdot 10^{11}$ Па; полистирольный пенопласт (ПС-1) – $\rho_3 = 60$ кг/м³; $K_3 = 10 \cdot 10^6$ Па, $G_3 = 15 \cdot 10^6$ Па.

Максимальная интенсивность ударного воздействия $q_{0(I)} = q_{0(II)} = -100$ кПа. Продолжительность приложения нагрузки τ_q привязана к первой частоте собственных колебаний пластин ω_0 .

На рисунках 3.1 и 3.2 представлены графики изменения прогибов пластин во времени при различной длительности внешнего воздействия.

Для пакета «Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т»:

$$\tau_q = \frac{\pi}{\omega_0} = 14,57 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad \tau_q = \frac{2\pi}{\omega_0} = 29,14 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$\tau_q = \frac{3\pi}{\omega_0} = 43,71 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad \tau_q = \frac{4\pi}{\omega_0} = 58,28 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Для пакета «сталь–ПС-1–сталь»:

$$\tau_q = \frac{\pi}{\omega_0} = 7,45 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad \tau_q = \frac{2\pi}{\omega_0} = 14,91 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$\tau_q = \frac{3\pi}{\omega_0} = 22,36 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad \tau_q = \frac{4\pi}{\omega_0} = 29,82 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Из приведённых на рисунках 3.1 и 3.2 графиков видно, что вид функции ударной нагрузки влияет на численные результаты расчётов при исследовании колебаний пластины. Равномерное постепенное снятие внешнего воздействия (рисунок 1.2, б) приводит к тому, что свободные колебания, следующие за полным разгрузением пластины, не зависят от длительности действия нагрузки.

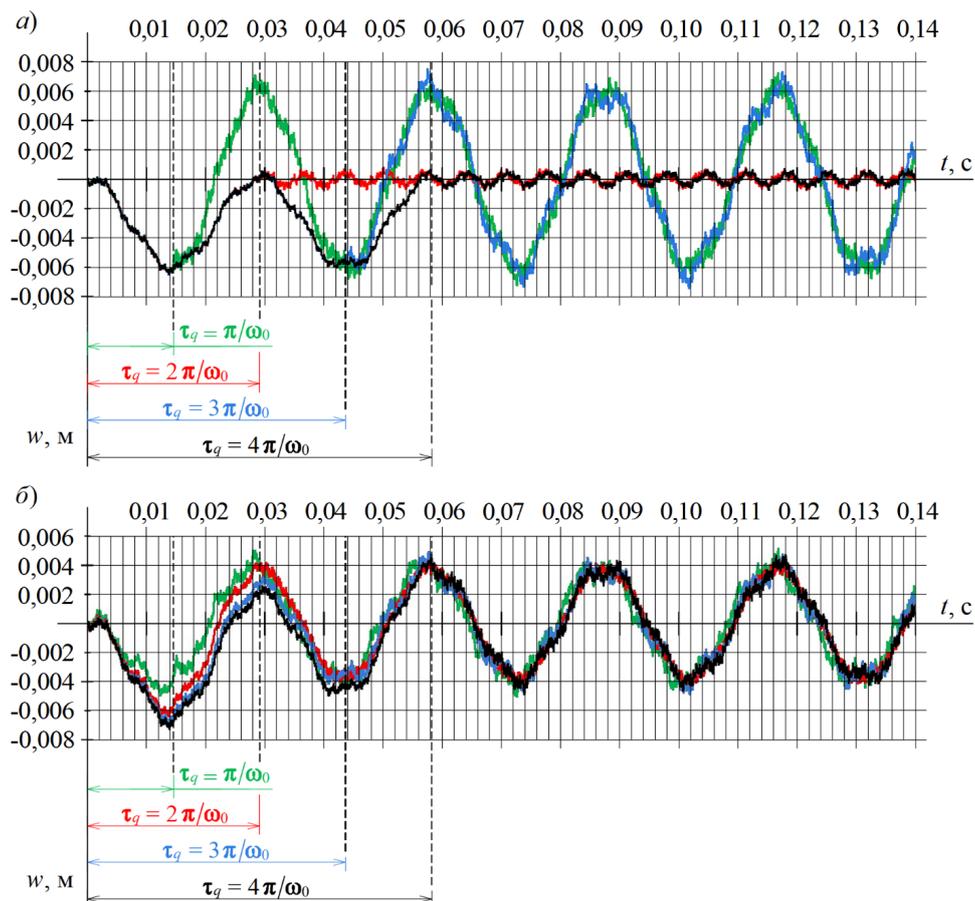


Рисунок 3.1 – Вынужденные колебания ступенчатой пластины «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т» с уширением в центральной части: а) резко снимаемое воздействие; б) линейно убывающее воздействие

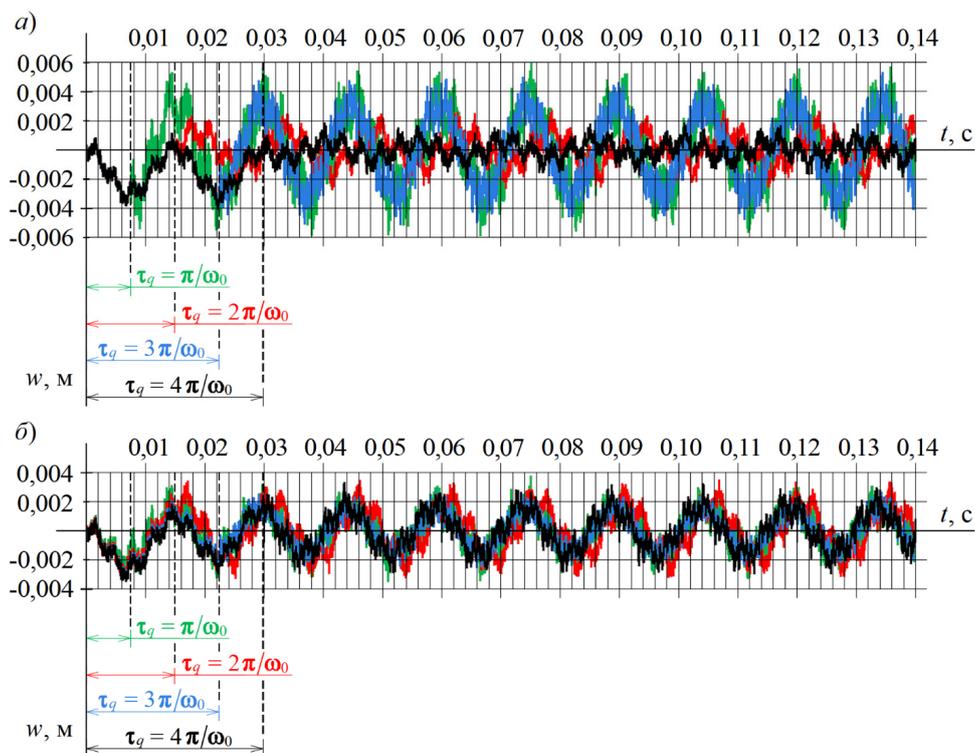


Рисунок 3.2 – Вынужденные колебания ступенчатой пластины «сталь–ПС-1–сталь» с уширением в центральной части: а) резко снимаемое воздействие; б) линейно убывающее воздействие

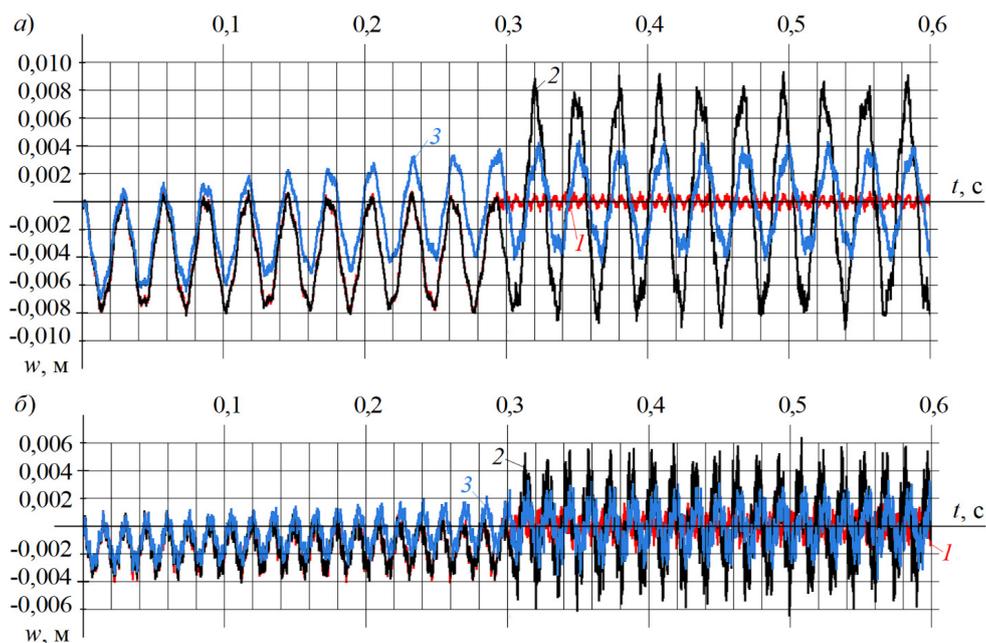


Рисунок 3.3 – Вынужденные колебания ступенчатой пластины с уширением в центральной части:
 а) пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; б) пакет «сталь–ПС-1–сталь»
 1 – резко снимаемое воздействие при чётном k ; 2 – резко снимаемое воздействие при нечётном k ;
 3 – линейно убывающее воздействие

При резком снятии загрузки (рисунок 1.2, а), длительность действия нагрузки оказывает весомое влияние на характер колебаний пластины. Представив длительность воздействия резко прикладываемой и резко снимаемой нагрузки как $\tau_q = k\pi/\omega_0$, можно сформулировать, что амплитуда прогибов на этапе свободных колебаний будет иметь наибольшее значение в случае, когда коэффициент k нечётный, наименьшее – при чётных значениях k . Рассмотрим более длительный интервал приложения внешнего воздействия, так же привязанный к первой частоте собственных колебаний пластин ω_0 и приближенный к 0,3 сек. График изменения прогибов пластин представлен на рисунке 3.3.

Для пакета «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»:

$$\tau_q = \frac{20\pi}{\omega_0} = 0,291 \text{ с}; \quad \tau_q = \frac{21\pi}{\omega_0} = 0,306 \text{ с}.$$

Для пакета «сталь–ПС-1–сталь»:

$$\tau_q = \frac{40\pi}{\omega_0} = 0,298 \text{ с}; \quad \tau_q = \frac{41\pi}{\omega_0} = 0,306 \text{ с}.$$

Из приведённых графиков видно, что равномерное постепенное снятие внешнего воздействия приводит к плавному смещению прогибов пластины в сторону положительных значений (выгибов).

Выводы

Представленная методика позволяет математически моделировать вынужденные колебания

круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины, воспринимающей воздействие удара. Численные исследования показали существенное влияние математического представления функции ударного воздействия на характер колебаний, возникающих в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bauchau, O.* Kirchhoff plate theory / O. Bauchau, J. Craig // Structural analysis. – 2009. – Vol. 163. – P. 819–914.
2. *Timoshenko, S.P.* On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars / S.P. Timoshenko // Philosophical magazine and journal of science. – 1921. – Vol. 21, № 41. – P. 744–746.
3. *Болотин, В.В.* Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.
4. *Болотин, В.В.* К теории слоистых плит / В.В. Болотин // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 65–72.
5. *Новичков, Ю.Н.* Вариационные принципы динамики и устойчивости многослойных оболочек / Ю.Н. Новичков // Труды Московского энергетического ин-та. Динамика и прочность машин. – 1973. – Вып. 164. – С. 14–22.
6. *Григолюк, Э.И.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – Москва: Машиностроение, 1973. – 172 с.
7. *Григолюк, Э.И.* Нелинейные уравнения тонких многослойных оболочек регулярного строения / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков //

Инженерный журнал. Механика твёрдого тела. – 1967. – № 1. – С. 163–169.

8. Зорич, В.А. Математический анализ. Ч. I, изд. 6-е дополн. / В.А. Зорич. – Москва: МЦНМО, 2012. – 710 с.

9. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.

10. Маркова, М.В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М.В. Маркова, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2022. – Вып. 36. – С. 3–10.

11. Маркова, М.В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины / М.В. Маркова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2022. – № 3 (132). – С. 121–127.

12. Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э.И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Вып. 88, № 4. – С. 987–993.

13. Старовойтов, Э.И. Изгиб трёхслойного стержня со ступенчато-переменной границей, частично опёртого на упругое основание / Э.И. Старовойтов, А.А. Поддубный // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 1 (14). – С. 47–55.

14. Старовойтов, Э.И. Деформирование трёхслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. – Москва: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

15. Тонг, К.Н. Теория механических колебаний / К.Н. Тонг. – Москва: Машгиз, 1963. – 351 с.

16. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – Москва: Наука, 1969. – 288 с.

17. Маркова, М.В. Инерционная математическая модель динамического деформирования круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М.В. Маркова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 6 (129). – С. 164–170.

18. Бейтман, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.

19. Ватсон, Г.Н. Теория Бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1949. – 799 с.

20. Arfken, G.B. Mathematical methods for physicists. 6th edition / G.B. Arfken, H.J. Weber. – Oxford: Elsevier Ibc., 2005. – 1182 p.

21. Плещачевский, Ю.М. Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием: [монография] / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – Москва: Физматлит, 2011. – 560 с.

22. СП 5.04.01-2021. Стальные конструкции. – Введ. 29.07.2021. – Минск: Минстройархитектуры, 2021. – 147 с.

23. Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета: [учеб. пособие для инж.-строит. вузов и фак.] / А.М. Иванов [и др.]. – Москва: Высшая школа, 1968. – 220 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22M-072).

Поступила в редакцию 07.07.2022.

Информация об авторах

Маркова Марина Владимировна – аспирантка