**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_86
EDN: HJSCLA

# НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ КОММУТАНТА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

**В.Н. Князина**

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

# NILPOTENCY OF THE DERIVED SUBGROUP OF A FINITE GROUP WITH SEMISUBNORMAL SCHMIDT SUBGROUPS

**V.N. Kniahina**

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Ненильпотентная конечная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа $A$ называется *полунормальной* в группе $G$, если существует подгруппа $B$ такая, что $G = AB$ и $AB_1$ – собственная в $G$ подгруппа для каждой собственной подгруппы $B_1$ из $B$. Если $A$ либо субнормальна в $G$, либо полунормальна в $G$, то подгруппа $A$ называется *полусубнормальной* в группе $G$. Устанавливается нильпотентность коммутанта группы, у которой все подгруппы Шмидта полусубнормальны.

**Ключевые слова:** *конечная группа*, *подгруппа Шмидта*, *полунормальная подгруппа*, *субнормальная подгруппа*.

**Для цитирования:** *Князина*, *В.Н.* Нильпотентность коммутанта конечной группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Князина // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 86–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_86. – EDN: HJSCLA

**Abstract.** A non-nilpotent finite group all of whose proper subgroups are nilpotent is called a Schmidt group. A subgroup $A$ is called *seminormal* in a group $G$ if there exists a subgroup $B$ such that $G = AB$ and $AB_1$ is a proper subgroup of $G$ for each proper subgroup $B_1$ of $B$. If $A$ is either subnormal in $G$ or seminormal in $G$, then the subgroup $A$ is called *semisubnormal* in $G$. We establish the nilpotency of the derived subgroup of a group all of whose Schmidt subgroups are semisubnormal.

**Keywords:** *finite group*, *Schmidt subgroup*, *seminormal subgroup*, *subnormal subgroup.*

**For citation:** *Kniahina*, *V.N.* Nilpotency of the derived subgroup of a finite group with semisubnormal Schmidt subgroups / V.N. Kniahina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 86–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_86 (in Russian). – EDN: HJSCLA

## Введение

В данной статье рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Эти группы впервые были рассмотрены О.Ю. Шмидтом [1], который установил бипримарность таких групп, нормальность одной из силовских подгрупп и цикличность другой. Информация о строении и свойствах групп Шмидта, а также об их приложениях в теории конечных групп имеются в [2], [3].

Поскольку каждая ненильпотентная группа содержит группы Шмидта в качестве собственных подгрупп, то эти группы – универсальные подгруппы конечных групп. Следовательно, свойства содержащихся в группе подгрупп Шмидта существенно влияют на строение самой группы. Группы с фиксированными ограничениями на содержащиеся в них подгруппы Шмидта исследовались в ряде работ. Например, в [4]–[6] изучались группы с субнормальными подгруппами Шмидта, а в [7] – группы, у которых все холловы подгруппы есть подгруппы Шмидта.

Подгруппа $A$ группы $G$ называется *полунормальной*, если существует подгруппа $B$ из $G$ такая, что $G = AB$ и $AB_1$ – собственная подгруппа группы $G$ для каждой собственной подгруппы $B_1$ из $B$. Например, полунормальной является подгруппа простого индекса. Квазинормальная подгруппа (подгруппа, перестановочная с любыми собственными подгруппами группы) также полунормальна. В простой специальной линейной группе $SL(2,4)$ подгруппа $S$, изоморфная знакопеременной группе $A_4$ – полунормальная подгруппа Шмидта, но $S$ не квазинормальна и не субнормальна.

Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены в [8]–[10]. Признаки разрешимости группы с некоторыми полунормальными подгруппами Шмидта установлены в [11].

Введем следующее понятие, которое объединяет субнормальность и полунормальность.

***Определение***. Подгруппа $A$ называется *полусубнормальной* в группе $G$, если $A$ либо субнормальна в $G$, либо полунормальна в $G$.

В работе [4] нами было установлено, что если все подгруппы Шмидта в группе субнормальны, то фактор-группа этой группы по подгруппе Фиттинга абелева. В.А. Ведерников в работе [5] доказал, что в этих условиях фактор-группа по подгруппе Фиттинга циклическая. В настоящей статье мы доказываем, что если в группе $G$ все подгруппы Шмидта полусубнормальны, то фактор-группа по подгруппе Фиттинга абелева.

Приводится пример, доказывающий, что фактор-группа по подгруппе Фиттинга может быть нециклической.

## 1 Вспомогательные результаты

Используемая терминология соответствует [12]–[13]. Запись $M \lessdot G$ означает, что $M$ – максимальная подгруппа группы $G$. Напомним, что $A^G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с $A$ подгруппами группы $G$. Группа с нормальной силовской $p$-подгруппой называется $p$-замкнутой. Если $\pi$ – некоторое множество простых чисел, то группа, порядок которой делится только на простые числа из $\pi$, называется $\pi$-группой. Как обычно, $\Phi(G)$ и $F(G)$ – подгруппы Фраттини и Фиттинга группы $G$ соответственно, а $O_p(X)$ и $O_{p'}(X)$ – наибольшие нормальные $p$- и $p'$-подгруппы группы $G$ соответственно. Условимся называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской $p$-подгруп-пой и циклической силовской $q$-под-группой.

Формации всех абелевых и нильпотентных групп обозначаются через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $G$ – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы $G$, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы $G$. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственные формации, то произведение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\},$$

является наследственной формацией.

Вспомогательные результаты:

***Лемма* 1.1** [12, 2.41; 2.43; 5.31]. *Пусть $H$ – субнормальная подгруппа группы $G$.*

(1) Если $U \le G$, то $U \cap H$ – субнормальная подгруппа в $U$. В частности, если $H \le V \le G$, то $H$ – субнормальная подгруппа в $V$.

(2) Если $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, то $HN/N$ – субнормальная подгруппа в $G/N$.

(3) Если $K$ – субнормальная подгруппа группы $G$, то $H \cap K$ и $\langle H \cup K \rangle$ – субнормальные подгруппы в $G$.

(4) $\pi(H) = \pi(H^G)$.

(5) Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $H \in \mathfrak{X}$, то $H^G \in \mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.2** [4, Лемма 2]. Если $K$ и $D$ – подгруппы группы $G$, подгруппа $D$ нормальна в $K$ и $K/D$ – $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление $L$ к подгруппе $D$ в $K$ обладает следующими свойствами:

(1) $L$ – $p$-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа;

(2) все собственные нормальные подгруппы в $L$ нильпотентны;

(3) $L$ содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что $Q$ не содержится в $D$ и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

***Лемма* 1.3**. [13, 24.2; 24.3] *Если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, $G$ – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то справедливы следующие утверждения*:

(1) $G^{\mathfrak{F}}$ является $p$-группой для некоторого $p \in \pi(G)$;

(2) $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ – главный фактор группы $G$;

(3) $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = F(G)$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть $G$ – разрешимая группа, у которой коммутант ненильпотентен, а коммутант каждой собственной подгруппы группы $G$ нильпотентен. Тогда $G/F(G)$ – минимальная неабелева группа.*

*Доказательство*. Класс $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является насыщенной наследственной формацией [13, с. 36] и совпадает с классом всех групп, обладающих нильпотентными коммутантами. Пусть $G$ – разрешимая группа, у которой коммутант ненильпотентен, а коммутант каждой собственной подгруппы группы $G$ нильпотентен. Ясно, что $G$ является минимальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-группой.

Пусть вначале $\Phi(G) = 1$. Согласно лемме 1.3 (3) подгруппа $G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}} = F(G)$. Поскольку $G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}}$ – $p$-группа для некоторого $p \in \pi(G)$ по лемме 1.3 (1), то $F(G) = O_p(G)$. Так как $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $G/F(G) \notin \mathfrak{A}$. Пусть $U/F(G)$ – собственная фактор-подгруппы $G/F(G)$. Теперь $U'$ нильпотентна и $U/F(U)$ абелева. Так как $G$ разрешимая группа, $O_p(G) = F(G) \le U$, то

$$C_G(F(G)) = Z(F(G)),\ O_{p'}(U) = 1,$$

$$O_p(G) = F(G) \le F(U) = O_p(U).$$

Пусть $H/F(G) = F(G/F(G))$. Так как $G/F(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $G/H$ абелева, следовательно

$$UH/H \simeq U/U \cap H$$

абелева. Поскольку $F(U) = O_p(U)$, $U \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $U/O_p(U)$ абелева. Следовательно

$$U/U \cap H \cap O_p(U) = U/H \cap O_p(U)$$

абелева. Поскольку $H/F(G)$ является $p'$-подгруппой, то $H \cap O_p(U) = O_p(G) = F(G)$ и $U/F(G)$ абелева. Следовательно, все собственные в

$G/F(G)$ подгруппы абелевы и $G/F(G)$ – минимальная неабелева группа.

Пусть $\Phi(G)\neq 1$. Согласно лемме 1.3 (3) подгруппа $F(G)=G^{\mathfrak{NA}}\Phi(G)$. Поскольку $\mathfrak{NA}$ – насыщенная формация, то фактор-группа $G/\Phi(G)\notin\mathfrak{NA}$ и $G/\Phi(G)$ – минимальная не $\mathfrak{NA}$-группа. По условию группа $G$ разрешима, поэтому $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$ по [12, 4.21] и

$$G/F(G)\simeq (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))=$$
$$=(G/\Phi(G))/(F(G/\Phi(G)).$$

Так как $\Phi(G/\Phi(G))=1$, то по доказанному $(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G))$ – минимальная неабелева группа, значит, $G/F(G)$ – минимальная неабелева группа. □

***Пример*** **1.1.** В простой группе $SL(2,4)$ все собственные подгруппы метабелевы. Поэтому условие разрешимости группы в лемме 1.4 не является лишним.

***Лемма*** **1.5.** (1) *Если $H$ – полусубнормальная подгруппа группы $G$ и $H\leq X\leq G$, то $H$ – полусубнормальная подгруппа подгруппы $X$.*

(2) *Если $H$ – полусубнормальная подгруппа группы $G$ и $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, то $HN$ полусубнормальна в $G$ и $HN/N$ полусубнормальна в $G/N$.*

(3) *Если $H$ – полусубнормальная подгруппа группы $G$, а $Y$ – некоторое непустое множество элементов из $G$, то подгруппа $H^Y=\langle H^y\mid y\in Y\rangle$ полусубнормальна в $G$. В частности, подгруппа $H^g$ полусубнормальна в $G$ для любого $g\in G$.*

*Доказательство*. Предположим, что $H$ субнормальна в $G$. Тогда из леммы 1.1 следует справедливость утверждений (1)–(3). Если $H$ полунормальна, то утверждения (1)–(3) доказаны в [11, леммы 2, 5]. □

***Лемма*** **1.6.** *Предположим, что в группе $G$ все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны. Тогда*:

(1) *в подгруппе $H$ группы $G$ все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны*;

(2) *если $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, то в фактор-группе $G/N$ все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны*.

*Доказательство*. 1. Первое утверждение следует из леммы 1.5 (1).

2. Пусть $N$ – нормальная подгруппа группы $G$. Предположим что $S/N$ – $S_{<p,q>}$-подгруппа группы $G/N$ и $L$ – минимальная подгруппа из $S$, обладающая свойством $S=LN$. По лемме 1.2 в $L$ содержится $S_{<p,q>}$-подгруппа $A$ такая, что $L=A^L$. По условию леммы $A$ полусубнормальна в $G$, а по лемме 1.5 (3) подгруппа $L$ полусубнормальна в $G$. Теперь по лемме 1.5 (2) подгруппа $LN/N=S/N$ полусубнормальна в фактор-группе $G/N$. □

***Лемма*** **1.7.** *Пусть в группе все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полусубнормальны. Тогда группа разрешима*.

*Доказательство*. Доказательство проведем индукцией по порядку группы $G$. Если $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, тогда по лемме 1.6 в $N$ и в фактор-группе $G/N$ все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полусубнормальны. Если $N$ – собственная неединичная подгруппа группы $G$, то по индукции и подгруппа $N$, и фактор-группа $G/N$ разрешимы. Следовательно, группа $G$ также разрешима. Поэтому будем считать, что группа $G$ простая. В частности, группа $G$ не содержит субнормальных подгрупп Шмидта. Значит в группе $G$ все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полунормальны. Следовательно группа $G$, в соответствии со следствием из статьи [11], разрешима.

По условию леммы полусубнормальными должны быть три типа подгрупп Шмидта: $S_{<2,3>}$-подгруппы, $S_{<3,2>}$-подгруппы и $S_{<5,2>}$-подгруппы. Мы приводим примеры простых групп, которые показывают, что полусубнормальность каждого их этих типов подгрупп в условии леммы 1.7 необходима.

***Пример*** **1.2.** В $PSL(2,3^3)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<3,2>}$-подгрупп [14], поэтому условие полусубнормальности $S_{<2,3>}$-подгрупп не является лишним.

***Пример*** **1.3.** В $SL(2,8)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<2,3>}$-подгрупп [14], поэтому группы с полусубнормальными $S_{<5,2>}$-подгруппами и $S_{<2,3>}$-подгруппами могут быть неразрешимыми, а условие полусубнормальности $S_{<3,2>}$-подгрупп не является лишним.

***Пример*** **1.4.** Группа $Sz(8)$ не содержит $\{2,3\}$-подгрупп [14]. Значит группы с полусубнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта могут быть неразрешимыми. И условие полусубнормальности 5-замкнутых $S_{<5,2>}$-подгрупп является значимым.

## 2 Основной результат

***Теорема*** **2.1.** *Если в группе $G$ все подгруппы Шмидта полусубнормальны, то коммутант $G'$ нильпотентен*.

*Доказательство*. Группа $G$ разрешима по лемме 1.7. Нильпотентность коммутанта $G'$ равносильна тому, что $G\in\mathfrak{NA}$. Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $G\in\mathfrak{NA}$. Согласно лемме 1.6 в каждой собственной подгруппе группы $G$ все подгруппы Шмидта полусубнормальны. По индукции все собственные подгруппы группы $G$ имеют нильпотентный коммутант. Поэтому $G$ – разрешимая минимальная не $\mathfrak{NA}$-группа. По лемме 1.4 фактор-группа $G/F(G)$ будет минимальной неабелевой группой.

По лемме 1.6 в каждой фактор-группе группы $G$ все подгруппы Шмидта полусубнормальны. По индукции $G/N \in \mathfrak{NA}$ для всех неединичных нормальных подгрупп группы $G$. Поскольку класс $\mathfrak{NA}$ – насыщенная наследственная формация [13, с. 36], то согласно [15, лемма 8] группа $G$ примитивна:

$$G=[N]M,\, M \lessdot G,$$
$$N=F(G)=O_p(G)=C_G(N), p\in \pi(G)$$

и $G/F(G)\simeq M$ – неабелева группа, все собственные подгруппы которой абелевы. Если $M$ непримарна, тогда $M$ является группой Шмидта, и по условию теоремы, $M$ либо субнормальна, либо полунормальная подгруппа группы $G$. Если $M$ субнормальная подгруппа группы $G$, то $M$ нормальна в $G$ и $M\le C_G(N)=N,$ получили противоречие. Если $M$ полунормальная подгруппа группы $G$, то $|G:M|=|N|=p$ – простое число по [11, лемма 7]. Следовательно $G$ сверхразрешима, а значит, $G\in\mathfrak{NA}$.

Пусть $M$ – примарная $q$-группа. Тогда $N$ – силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $G$ – $p$-замкнутая $\{p,q\}$-группа. Если в группе $G$ все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева по [4], а значит, $G\in\mathfrak{NA}$, противоречие. Поэтому в $G$ существует несубнормальная подгруппа Шмидта $S=[P]Q$. По условию она полунормальна в $G$. Если $P=N$, то $S$ субнормальна в $G$, противоречие. Значит, $p$ – собственная подгруппа группы $N$. Из определения полунормальности следует, что $G=SB$ и $S$ перестановочна со всеми собственными подгруппами группы $B$. Поскольку $G=SB$, то $G_q=QB_q$, где $G_q$ и $B_q$ – некоторые силовские $q$-подгруппы из групп $G$ и $B$ соответственно. Из полунормальности подгруппы $S$ следует, что $SB_q=B_qS.$ Так как группа $G$ $p$-замкнута, то $p$ нормальна в $SB_q$. Так как подгруппа $N$ абелева и $P\le N,$ то $p$ нормальна в $N$. Теперь $p$ нормальна в $G$, противоречие с тем, что $1\ne P\ne N,$ и $N$ – минимальная нормальная в $G$ подгруппа. □

***Пример* 2.1.** Пусть $D_n$ – диэдральная группа порядка $n$ и

$$G=D_6\times D_{10}=([\langle x\rangle]\langle a\rangle)\times([\langle y\rangle]\langle b\rangle),$$
$$|x|=3, |y|=5, |a|=|b|=2.$$

Ясно, что $F(G)=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$ и $G/F(G)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ – нециклическая группа. В группе $G$ все подгруппы Шмидта полунормальны и есть несубнормальные подгруппы Шмидта $[\langle x\rangle]\langle ab\rangle,$ $[\langle y\rangle]\langle ab\rangle.$ Поэтому в теореме 2.1 фактор-группа $G/F(G)$ может быть нециклической.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Шмидт*, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Математический сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. *Кузенный*, *Н.Ф.* Конечные группы Шмидта и их обобщения / Н.Ф. Кузенный, С.С. Левищенко // Украинский математический журнал. – 1991. – Т. 43, № 7–8. – С. 963–968.
3. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Украинский математический конгресс: сб. тр. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины. – 2002. – С. 81–90.
4. *Княгина*, *В.Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.
5. *Ведерников*, *В.А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 44, № 6. – С. 669–687.
6. *Al-Sharo, Kh.A.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / Kh.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.
7. *Kniahina*, *V.N.* Finite groups with Hall Schmidt subgroups / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2012. – Vol. 81, № 3–4. – P. 341–350.
8. *Подгорная*, *В.В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В.В. Подгорная // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.–матэм. навук. – 2000, № 4. – С. 22–25.
9. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
10. *Guo*, *W.* Finite groups with seminormal Sylow subgroups / W.Guo // Acta Mathematica Sinica. – 2008. – Vol. 24, № 10. – P. 1751–1758.
11. *Княгина*, *В.Н.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
12. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – Москва: Наука, 1978. – 271 с.
14. *Atlas of finite groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups* / J.H. Conway [et al.] – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 286 p.
15. *Монахов*, *В.С.* Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.


*Поступила в редакцию* 06.07.2022.

**Информация об авторах**

*Княгина Виктория Николаевна* – к.ф.-м.н., доцент