

УДК 535.42+537.86

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_3\\_52\\_13](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_13)

EDN: ARKFHO

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ДЕКАРТОВЫХ ПУЧКОВ КУММЕРА С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С.С. Гиргель

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## ENERGY PERFORMANCES OF THE VECTOR CARTESIAN KUMMER BEAMS WITH TRANSFERABLE TERMINATING POWER

S.S. Girgel

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Предложены новые векторные решения параболического уравнения, описывающие декартовы световые пучки Куммера. Установлены ограничения на параметры, при которых пучки Куммера переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми. Проведено графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии векторных пучков Куммера.

**Ключевые слова:** декартовы пучки, пучки Куммера, квадратичная интегрируемость.

**Для цитирования:** Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–17. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_3\\_52\\_13](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_13). – EDN: ARKFHO

**Abstract.** New vector solutions of the parabolic equation, featuring Cartesian Light Kummer beams have been offered. The restrictions on parameters at which Kummer beams transfer terminating power have been discovered and physically realised. Pictorial modelling of intensity and crossflows of energy of vector Kummer beams has been fulfilled.

**Keywords:** cartesian beams, Kummer beams, square integrability.

**For citation:** Girgel, S.S. Energy performances of the vector cartesian Kummer beams with transferable terminating power / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 13–17. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_3\\_52\\_13](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_13) (in Russian). – EDN: ARKFHO

### Введение

Обычно для параксиальных пучков используется аподизация соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была квадратично интегрируемой (КИ) [1]–[4]. Однако – это не обязательно. Нами в работе [5] было показано, что возможны новые типы скалярных световых пучков (пучков Куммера), у которых гауссова аподизация отсутствует. Однако комплексные амплитуды таких пучков обладают КИ при определенных ограничениях на их свободные параметры и, тем самым, конечной мощностью.

В настоящей работе этот формализм обобщается на векторные декартовы пучки Куммера. Сначала обсуждаются скалярные 3D пучки Куммера. В разделе 2 рассматриваются поляризациянные и энергетические характеристики 3D векторных пучков Куммера. Затем проведено графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии. Выполнен анализ полученных результатов, который подтвердил и проиллюстрировал аналитические расчеты.

### 1 3D скалярные пучки Куммера

Для монохроматических волн вида

$$f(\mathbf{r}, t) = f \exp(ikz - i\omega t)$$

скалярное волновое уравнение в параболическом приближении

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)f = 0 \quad (1.1)$$

после перехода к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0, \quad (1.2)$$

где  $x_0 > 0$ ,  $z_0 = kx_0^2/2$  – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно, приобретает вид

$$(\partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,Y}^2 + 4i\partial_Z)f = 0. \quad (1.3)$$

Чтобы найти решения в виде функций Куммера, произведем в (1.3) следующую замену переменных:

$$X_1 = \sqrt{\frac{i}{Q_X(Z)}} \cdot X; \quad Y_1 = \sqrt{\frac{i}{Q_Y(Z)}} \cdot Y, \quad (1.4)$$

где введены два комплексные параметра пучка  $Q_X(Z) = Z - Q_{0X}$  и  $Q_Y(Z) = Z - Q_{0Y}$ , причем  $Q_{0X} = Q'_{0X} + iQ''_{0X}$ ,  $Q_{0Y} = Q'_{0Y} + iQ''_{0Y}$ . Теперь (1.3) редуцируется к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & \partial_{x_1, x_1}^2 f + \partial_{y_1, y_1}^2 f + \frac{4i}{Q_X} X_1 \partial_{x_1} f + \\ & + \frac{4i}{Q_Y} Y_1 \partial_{y_1} f + 4 Q_X \partial_{Q_X} f + 4 Q_Y \partial_{Q_Y} f = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сейчас переменные разделяются. Следуя подходу [5], находим решение (1.5) в виде произведения двух независимых решений  $f_x$  и  $f_y$  в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$  соответственно, т. е.

$$f = f_x f_y. \quad (1.6)$$

В свою очередь  $f_x = f_{ex} + f_{ox}$  и  $f_y = f_{ey} + f_{oy}$  содержат независимые четные и нечетные решения уравнения (1.6) (и уравнения (1.1)). Последние функции выражаются через функции Куммера  $M$ :

$$\begin{aligned} f_{ex} &= M\left(-\frac{v_X}{2}, \frac{1}{2}, \frac{iX^2}{Q_X(Z)}\right) \left(\frac{Q_X(0)}{Q_X(Z)}\right)^{\frac{v_X}{2}}, \\ f_{ey} &= M\left(-\frac{v_Y}{2}, \frac{1}{2}, \frac{iY^2}{Q_Y(Z)}\right) \left(\frac{Q_Y(0)}{Q_Y(Z)}\right)^{\frac{v_Y}{2}}, \\ f_{ox} &= M\left(\frac{1-v_X}{2}, \frac{3}{2}, \frac{iX^2}{Q_X(Z)}\right) \left(\frac{Q_X(0)}{Q_X(Z)}\right)^{\frac{v_X}{2}} \times \\ & \quad \times \sqrt{\frac{i}{Q_X(Z)}} \cdot X, \\ f_{oy} &= M\left(\frac{1-v_Y}{2}, \frac{3}{2}, \frac{iY^2}{Q_Y(Z)}\right) \left(\frac{Q_Y(0)}{Q_Y(Z)}\right)^{\frac{v_Y}{2}} \times \\ & \quad \times \sqrt{\frac{i}{Q_Y(Z)}} \cdot Y. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Индексы  $o$  и  $e$  характеризуют соответственно четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций  $f_e$  и  $f_o$  относительно изменения знака их аргументов  $X$  и  $Y$ . Функции Куммера  $M$  – это, фактически, конфлюэнтные гипергеометрические функции  ${}_1F_1$  [6]. Поэтому пучки с амплитудами (1.6) естественно называть пучками Куммера. Постоянные разделения переменных  $v_X$  и  $v_Y$  являются, в общем случае, свободными комплексными параметрами:  $v_X = v'_X + iv''_X$ ,  $v_Y = v'_Y + iv''_Y$ . Существенно также, что амплитуды декартовых скалярных пучков Куммера  $f = f_x f_y$  не содержат гауссовой аподизации

Итак, общее решение параксиального уравнения (1.1) –  $f = f_x f_y$ . Получаем четыре типа пучков Куммера:  $f_{ee} = f_{ex} \cdot f_{ey}$ ,  $f_{oe} = f_{ox} \cdot f_{ey}$ ,  $f_{eo} = f_{ox} \cdot f_{oy}$ ,  $f_{oo} = f_{ox} \cdot f_{oy}$ . В общем случае амплитуда 3D скалярного пучка Куммера зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров  $v_X, v_Y, Q_{0X}, Q_{0Y}$ .

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная

интегрируемость (КИ) функций  $f$ . Можно показать, что условия КИ, т. е. физической реализуемости для четных и нечетных мод Куммера одинаковы, поэтому далее индексы  $o$  и  $e$  при амплитудах  $f$  опускаем. Необходимые условия КИ амплитуд пучков Куммера –  $\{Q_0'' > 0\}$ . В работе [5] нами было установлены достаточные условия КИ скалярных пучков Куммера, а именно:  $\{v'_X < -1/2; v'_Y < -1/2\}$ . Во всех случаях мнимые части  $v''_X, v''_Y$  комплексных параметров  $v_X$  и  $v_Y$  не влияют на КИ пучков Куммера.

## 2 Поляризационные и энергетические характеристики 3D векторных пучков Куммера с однородной поляризацией

Обобщим полученные результаты на векторные пучки. Перейдем к обсуждению физических свойств векторных пучков Куммера типа  $f_{ee}$ . С этой целью перейдем к векторному параболическому уравнению

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)\mathbf{E} = 0. \quad (2.1)$$

Начнем с обсуждения векторных пучков Куммера с однородной поляризацией по всему сечению пучка. Для пучков с однородной поляризацией поперечную часть  $\mathbf{E}_\perp$  векторной амплитуды  $\mathbf{E}$  пучка можно представить в виде  $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp f$ , где функция  $f$  – некоторое решение параксиального скалярного уравнения (1.3). Введенный комплексный постоянный нормированный вектор поляризации  $\mathbf{e}_\perp$  не зависит от координат  $(x, y)$ . Его можно разложить по декартовому базису  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ :

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}.$$

Проще всего ввести, следуя Федорову [7], комплексный угол  $\psi = \psi' + i\psi''$  соотношением

$$\eta = \frac{\eta_y}{\eta_x} = tg(\psi' + i\psi'').$$

Тогда азимут поляризации светового пучка равен  $\psi'$ , а его эллиптичность  $\gamma$  (отношение полуосей эллипса поляризации) можно представить как  $\gamma = th \psi''$ .

Полный вектор электрического поля векторного, однородно поляризованного, пучка Куммера можно выразить через  $\mathbf{E}_\perp$  [8]:

$$\mathbf{E} = \Lambda \mathbf{e}_\perp f. \quad \text{Здесь оператор } \Lambda = 1 + \frac{i}{k} \mathbf{e}_z \cdot \nabla_\perp \text{ восстанавливает полное поле по его поперечной части.}$$

Перейдем к расчету энергетических характеристик векторных пучков Куммера. Согласно [8], [9] усредненные плотности энергии продольного и поперечного потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных

пучков с однородной поляризацией соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon |f|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad (2.2)$$

$$S_{\perp} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \left( \text{Im}(f^* \nabla_{\perp} f) + \frac{1}{2} \text{th } 2\psi'' [\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z] |f|^2 \right).$$

Эти общие формулы, разумеется, применимы и к векторным декартовым пучкам Куммера. В выражении для  $S_{\perp}$  целесообразно выделить множителем плотность продольного потока энергии  $S_z$ . Запишем также плотность поперечного потока энергии  $S_{\perp}$  в безразмерных переменных

$$S_{\perp} = S_o + S_s = \theta S_z \cdot \left( \text{Im} \left( \frac{\nabla_{\perp} f}{f} \right) + \text{th } 2\psi'' \left[ \text{Re} \left( \frac{\nabla_{\perp} f}{f} \right), \mathbf{e}_z \right] \right), \quad (2.3)$$

где выражены явно, следуя Берри и Бекшаеву [10]–[12], плотность орбитального  $S_o$  и спинового  $S_s$  потоков энергии. Здесь  $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_R \partial_R + \frac{1}{R} \mathbf{e}_{\phi} \partial_{\phi}$  – поперечный оператор набла в безразмерных координатах,  $\theta = \frac{1}{kx_0} \sim 10^{-4}$  – безразмерный параметр параксиальности пучка.

Видим, что  $\left| \frac{S_z}{S_{\perp}} \right| \ll 1$ , как и следовало ожидать.

Если скалярная амплитуда однородно поляризованного пучка Куммера  $f = f_x f_y$ , где  $f_x = f_x(X)$ ,  $f_y = f_y(Y)$ , тогда плотность орбитального и спинового потоков энергии равны

$$S_o = \theta S_z \cdot \text{Im}(a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y);$$

$$S_s = \theta S_z \cdot \text{Re}(a_x \mathbf{e}_y - a_y \mathbf{e}_x) \cdot \text{th } 2\psi'',$$

где введены, для краткости, обозначения

$$a_x = \frac{\partial_x f_x}{f_x}; \quad a_y = \frac{\partial_y f_y}{f_y}.$$

Например, если  $f_x = f_{ex}$ , то

$$a_x = \frac{-2iX v_x M \left( \frac{1-v_x}{2}, \frac{3}{2}, \frac{iX^2}{Q_x(Z)} \right)}{M \left( -\frac{v_x}{2}, \frac{1}{2}, \frac{iX^2}{Q_x(Z)} \right)}$$

и аналогично  $a_y$ . Здесь использованы преобразования Куммера

$$\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u)$$

[6] для функции Куммера  $M$ .

С помощью системы компьютерной математики «Mathematica» нами было проведено 3D графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии векторных декартовых пучков Куммера с однородной поляризацией и переносимой конечной мощностью. Некоторые результаты изображены на рисунках 2.1–2.3 при различных значениях свободных параметров. Выбирались параметры  $v'_x \leq -1$ ,  $v'_y \leq -1$ , чтобы обеспечить КИ функций  $f$  пучков Куммера и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка. Последнее обеспечивает необходимые условия для физической реализации таких пучков.

На рисунке 2.1 показаны направления поперечных орбитальных потоков энергии  $S_o$  для векторных пучков Куммера. Видно, что если  $v''_x = v''_y = 0$ , то такие потоки строго радиальны. При  $v''_x \neq 0$  возникает составляющая орбитального потока энергии, параллельная оси  $OY$  потока, однако КИ не нарушается. При увеличении продольного расстояния  $Z$  картина немного видоизменяется.

На рисунке 2.2 показаны поперечные спиновые потоки энергии векторных  $S_s$  пучков Куммера для циркулярной поляризации (эллиптичность  $\gamma = 1$ ). В части *a*) видно, что поток  $S_s$

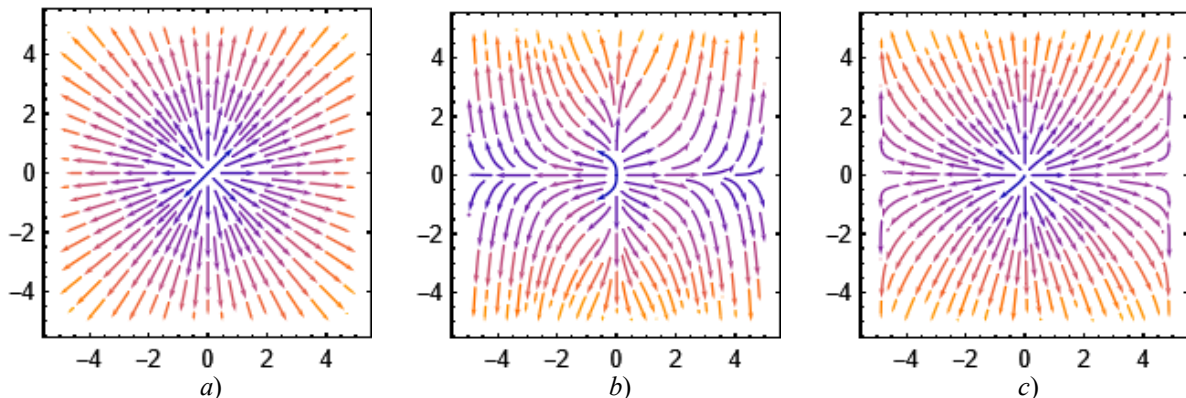


Рисунок 2.1 – Орбитальные потоки энергии  $S_o$  для векторных пучков Куммера:

*a*)  $v''_x = 0, Z = 0,5$ ; *b*)  $v''_x = 1, Z = 0,5$ ; *c*)  $v''_x = 1, Z = 3$ .

Во всех случаях  $v'_x = v'_y = -1, v''_y = 0, Q''_{0x} = Q''_{0y} = 1$ .

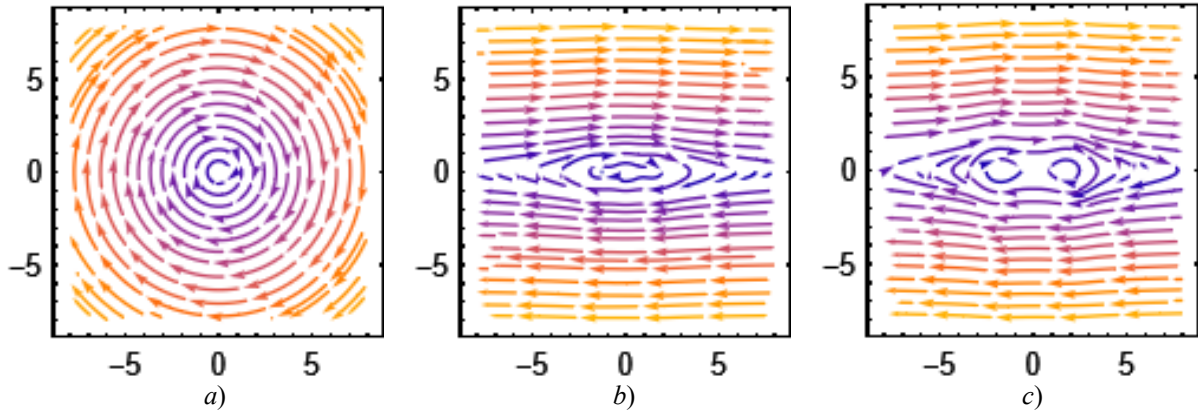


Рисунок 2.2 – Спиновые потоки энергии  $S_s$  для векторных пучков Куммера:  
 а)  $v''_x = 0, Z = 0,5$ ; б)  $v''_x = 1, Z = 0,5$ ; в)  $v''_x = 1, Z = 1$ .  
 Во всех случаях  $v'_x = v'_y = -1, v''_y = 0, Q''_{0x} = Q''_{0y} = 1$ , эллиптичность  $\gamma = 1$ .

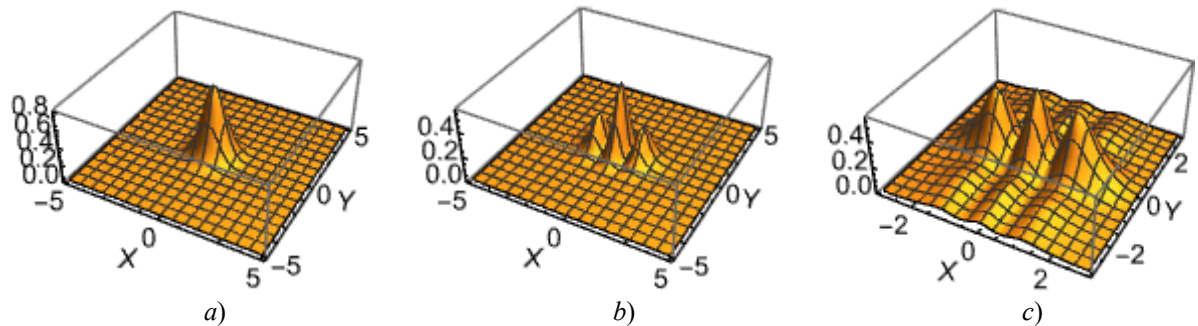


Рисунок 2.3 – 3D интенсивность векторных пучков Куммера:  
 а)  $v'_x = -1, v''_x = 0$ ; б)  $v'_y = -4, v''_x = 0$ ; в)  $v''_x = -4, v''_y = -1$ .  
 Во всех случаях  $Q''_{0x} = Q''_{0y} = 1, v'_y = -1, v''_y = 0, Z = 0,5$ .

направлен азимутально. Однако включение мнимой части  $v''_x$  свободного параметра  $v_x$  приводит к дополнительной компоненте спинового потока энергии  $S_s$ , параллельной оси  $Ox$ . В части 2.2, в) видно, что возрастание расстояния  $Z$  приводит к значительному изменению картины.

На рисунке 2.3 изображена интенсивность в относительных единицах в 3D формате для нескольких значений свободных параметров. Видно, что при малых значениях параметров  $v'_x$  и  $v'_y$  и отсутствии мнимых частей  $v''_x$  и  $v''_y$  свободных параметров  $v_x$  и  $v_y$  картина интенсивности представляет собой гауссовоподобную или колоколообразную поверхность, аналогичную поверхности интенсивности гауссова пучка. Однако уменьшение параметра  $v'_x$  приводит к возникновению двух дополнительных максимумов, которые постепенно растут и при  $v'_x = -4$  видны уже чёткие три максимума. Появление мнимых частей параметров  $v''_x$  и  $v''_y$  свободных параметров  $v_x$  и  $v_y$  приводит к сильной деформации поверхности интенсивности (рисунок 2.3, в), однако КИ по-прежнему сохраняется.

### Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие параксиальные декартовы векторные 3D световые пучки Куммера конечной мощности с однородной поляризацией. Установлено, что имеются четыре типа таких пучков, обозначаемые  $f_{ee}, f_{eo}, f_{oe}, f_{oo}$ . Существенно, что амплитудные векторные функции  $f$  таких пучков явно не содержат гауссиана  $G$ . Тем не менее, такие пучки Куммера обладают конечной переносимой энергией. Показано, что условия физической реализуемости пучков Куммера всех типов одинаковы и сводятся к ограничениям на вещественные части параметров  $v_x, v_y$  и на мнимые части параметров  $Q_{0x}, Q_{0y}$ . При этом мнимые части свободных параметров  $v_x$  и  $v_y$  не влияют на КИ, хотя и изменяют потоки энергии.

Проведенное графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
3. Гиргель, С.С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
4. Гиргель, С.С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.
5. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.
6. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.
7. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.
8. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
9. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
10. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
11. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.
12. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams // A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 01.04.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор