МАТЕМАТИКА

УДК 517.954

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67
EDN: GFUZYC

К ВОПРОСУ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

А.И. Басик[1], Е.В. Грицук[1], Т.В. Копайцева[2]

[1]*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*
[2]*Брестский государственный технический университет*

ON THE QUESTION OF REGULARIZABILITY OF THE OBLIQUE DERIVATIVE TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ODER ELLIPTIC SYSTEMS ON THE PLANE

A.I. Basik[1], E.V. Gricuk[1], T.V. Kapaitsava[2]

[1]*Brest State A.S. Pushkin University*
[2]*Brest State Technical University*

Аннотация. Рассматривается множество $\mathfrak{M}(2;2;2)$ эллиптических систем двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем. Задача типа наклонной производной для системы из $\mathfrak{M}(2;2;2)$ в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ состоит в отыскании решения по заданным граничным значениям производных по некасательным к $\partial\Omega$ направлениям l_1 и l_2. Известно, что множество $\mathfrak{M}(2;2;2)$ имеет три компоненты гомотопической связности. Известно также, что если система из $\mathfrak{M}(2;2;2)$ является системой ортогонального типа и l_1, l_2 – векторные поля, неколлинеарные в каждой точке границы, то задача типа наклонной производной является нетеровой в классической постановке (независимо от гомотопического класса системы). В настоящей статье для каждой компоненты $\mathfrak{M}(2;2;2)$ приводится представитель, обладающий следующими свойствами: каждая компонента произвольного дважды непрерывно дифференцируемого решения является бигармонической функцией и краевая задача типа наклонной производной для этого представителя не является регуляризуемой. Следовательно, регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим классом системы.

Ключевые слова: *эллиптическая система*, *регуляризуемая краевая задача*, *условие Лопатинского*, *гомотопическая классификация*.

Для цитирования: *Басик*, *А.И.* К вопросу регуляризуемости краевой задачи типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка на плоскости / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.В. Копайцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67. – EDN: GFUZYC

Abstract. The set $\mathfrak{M}(2;2;2)$ of elliptic systems of two second-order partial differential equations on the plane with positive characteristic determinant is considered. An oblique derivative type boundary value problem for a system from $\mathfrak{M}(2;2;2)$ in a bounded domain Ω with a smooth boundary $\partial\Omega$ is to find a solution for given boundary values of the derivatives along the directions l_1 and l_2 nontangential to $\partial\Omega$. It is known that the set $\mathfrak{M}(2;2;2)$ has three homotopy connected components. It is also known that if a system from $\mathfrak{M}(2;2;2)$ is a system of orthogonal type and l_1, l_2 are vector fields that are noncollinear at each point of the boundary, then the oblique derivative boundary value problem is Fredholm in its classical formulation (regardless of the homotopy class of the system). In this paper, for each component of $\mathfrak{M}(2;2;2)$, a representative is given that has the following properties: each component of an arbitrary twice continuously differentiable solution is a biharmonic function, and an oblique derivative type boundary value problem for this representative is not regularizable. Consequently, the regularizability of a problem of oblique derivative type boundary value problem for the elliptic systems under consideration is not related to the homotopy class of the system.

Keywords: *elliptic system*, *regularizable boundary value problem*, *Lopatinski condition*, *homotopic classification*.

For citation: *Basik A.I.* On the question of regularizability of the oblique derivative type boundary value problem for second-oder elliptic systems on the plane / A.I. Basik, E.V. Gricuk, T.V. Kapaitsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67 (in Russian). – EDN: GFUZYC

Введение

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим множество равномерно эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка в области Ω

$$\sum_{j,k=1}^{2} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0(x)u = 0, \quad (0.1)$$

здесь $A_{jk}(x)$, $A_j(x)$ и $A_0(x)$ – заданные в Ω достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка, $u:\Omega \to \mathbb{R}^2$ – искомая вектор-функция.

Б.В. Боярский установил [1], что множество эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем имеет три компоненты гомотопической связности. Системы первой компоненты гомотопны паре уравнений Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_2 = 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

Системы второй компоненты гомотопны системе А.В. Бицадзе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

третьей компоненты – сопряженной системе А.В. Бицадзе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ -2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Задача отыскания решения

$$u(x_1,x_2) = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2))^T \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

системы (0.1), удовлетворяющего на границе области Ω краевым условиям

$$p_k \langle l_1; \mathrm{grad} u_1 \rangle + q_k \langle l_2; \mathrm{grad} u_2 \rangle = f_k, \; k = 1,2, \quad (0.5)$$

называется задачей типа наклонной производной; где $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ – заданные функции класса $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$; l_1, l_2 – заданные некасательные к $\partial\Omega$ векторные поля; $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение на плоскости; $C^{n,\alpha}(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка *n* включительно, частные производные порядка *n* которых непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0;1]$ в этой области; $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка *n* включительно, все частные производные которых до порядка *n* включительно допускают непрерывное продолжение на замыкание области и продолжения всех производных непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0;1]$ в $\overline{\Omega}$.

Для произвольной эллиптической системы (0.1) краевая задача типа наклонной производной, вообще говоря, не является нетеровой. Например, в случае $l_1 = l_2$ задача не будет нетеровой [2] для системы (0.3).

В работе [3, с. 74] доказывается, что если (0.1) является системой ортогонального типа и векторы l_1 и l_2 не коллинеарны в каждой точке границы $\partial\Omega$, то задача (0.1), (0.5) при $p_1 = q_2 = 1$ и $p_2 = q_1 = 0$, является нетеровой не зависимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (0.1).

В настоящей статье для каждой компоненты гомотопической связности множества эллиптических систем вида (0.1) приводится представитель, для которого задача типа наклонной производной не является нетеровой. Тем самым мы показываем, что регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим типом системы.

Отметим здесь, что проблема гомотопической классификации впервые была сформулирована И.М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [4]. Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, по ней имеются лишь отдельные результаты. Например, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], кососимметрических эллиптических систем в $\mathbb{R}^3$ [6] и эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ [7]. Также известны классы систем, для которых любые граничные условия не могут образовывать регуляризуемую краевую задачу [8], [9].

1 Примеры систем и некоторые их свойства

Рассмотрим матричные дифференциальные операторы второго порядка на плоскости

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \quad (1.1)$$

$$= \begin{pmatrix} 4\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ -3\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 3\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \quad (1.2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)= \tag{1.3}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

***Теорема* 1.1.** *Каждая из систем*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$$

является эллиптической. Система $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ *гомотопна паре уравнений Лапласа* (0.2), *система* $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ *гомотопна системе А.В. Бицадзе* (0.3), *а система* $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ *гомотопна сопряженной системе А.В. Бицадзе* (0.4).

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\det A(\xi)=\det B(\xi)=\det C(\xi)=\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2>0$$

при всех $\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, что и доказывает эллиптичность каждой из рассматриваемых систем.

В работе [1] по коэффициентам системы (0.1) строится специальный квадратный трехчлен $p(\lambda)$, по расположению корней которого на комплексной плоскости можно определить принадлежность системы (0.1) той или иной компоненте гомотопической связности. Так, для системы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ этот трехчлен имеет вид

$$p_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda\frac{6+15i}{29}+\frac{14+6i}{29}$$

и его корни $\lambda_1=i,\lambda_2=\frac{6-14i}{29}$ имеют мнимые части разных знаков, следовательно [1], система

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

гомотопна паре уравнений Лапласа (0.2).

Для системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ этот трехчлен имеет вид

$$p_B(\lambda)=\lambda^2-2i\lambda-1,$$

корни которого $\lambda_1=\lambda_2=i$ имеют положительные мнимые части, и, следовательно [1], система

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

гомотопна системе А.В. Бицадзе (0.3).

Для системы $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ этот трехчлен имеет вид

$$p_C(\lambda)=\lambda^2+2i\lambda-1,$$

корни которого $\lambda_1=\lambda_2=-i$ имеют отрицательные мнимые части, следовательно [1], система гомотопна системе, сопряженной системе А.В. Бицадзе (0.4). □

В подтверждение доказательству теоремы 1.1, проведем гомотопию системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ в явном виде. Для этого рассмотрим семейство систем, характеристические матрицы которых имеют вид $(t\in[0;1])$

$$B_t(\xi)=\left(\begin{array}{c|c} \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2+ & \\ +(1-t)\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) & \xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 \\ \hline & \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2- \\ -\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+\xi_2^2 & -(1-t)\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) \end{array}\right). \tag{1.4}$$

Так как

$$\det B_t(\xi)=\left(\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2-$$
$$-(1-t)^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2+\left(\xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2\geq$$
$$\geq\left(\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2-\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2+$$
$$+\left(\xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)^2=\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2,$$

то при каждом $t\in[0;1]$ система с характеристической матрицей (1.4) является эллиптической и $B_0=B(\xi)$, а

$$B_1(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 & \xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 \\ -\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+\xi_2^2 & \xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Далее, гомотопия

$$B_{1t}(\xi)=\left(\sqrt{2}\right)^{1-t}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi(1-t)}{4} & \sin\frac{\pi(1-t)}{4} \\ -\sin\frac{\pi(1-t)}{4} & \cos\frac{\pi(1-t)}{4} \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \xi_1^2-\xi_2^2 & -2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2-\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

приводит матрицу (1.5) $\left(B_{10}(\xi)=B_1(\xi)\right)$ к характеристической матрице системы (0.3).

***Теорема* 1.2.** *Каждая компонента произвольного решения любой из систем*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \ C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

в области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ *является бигармонической функцией в* Ω.

Доказательство. Так как рассматриваемые системы являются эллиптическими, то каждая компонента $u_k\,(k=1,2)$ произвольного решения u любой из них является бесконечно дифференцируемой в области Ω функцией [10, c. 141]. Тогда из равенств

$$\begin{pmatrix}\Delta^2 u_1\\ \Delta^2 u_2\end{pmatrix}=\tilde{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta^2 u_1\\ \Delta^2 u_2\end{pmatrix}=\tilde{B}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta^2 u_1\\ \Delta^2 u_2\end{pmatrix}=\tilde{C}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

следует требуемое. Здесь

$$\tilde{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\\ 3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\end{pmatrix}.$$

2 Задача типа наклонной производной для рассматриваемых систем

В этом разделе считаем, если не оговорено противное, что граничные условия (0.5) имеют вид

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial l}\right|_{\partial\Omega}=f_1,\quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=f_2,\qquad (2.1)$$

где ν – единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$; l – единичное поле на $\partial\Omega$, составляющее с нормалью ν ориентированный угол 45° в каждой точке $\partial\Omega$; $f_1, f_2:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

***Теорема* 2.1.** *Для каждой из систем*

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\quad B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\quad C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

задача с граничными условиями (2.1) *не является нетеровой.*

Доказательство. Достаточно показать невыполненность условия Я.Б. Лопатинского, обеспечивающего нетеровость краевой задачи, как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [11]. Это условие известно как условие регуляризуемости краевой задачи и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора. Для задачи (0.1), (0.5) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы Я.Б. Лопатинского

$$L(y,\tau)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Xi(y,\lambda\nu+\tau)\Theta^{-1}(y,\lambda\nu+\tau)\left(E,\lambda E\right)d\lambda,\qquad (2.2)$$

является максимальным. Здесь Θ – характеристическая матрица системы (0.1); Ξ – символ старшей части граничного оператора (0.5); E – единичная матрица размера 2×2; ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y; Γ – простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий находящиеся там λ-корни уравнения

$$\det\Theta(\lambda\nu+\tau)=0.\qquad (2.3)$$

Так как

$$\det A(\lambda\nu+\tau)=\det B(\lambda\nu+\tau)=$$
$$=\det C(\lambda\nu+\tau)=\left(\lambda^2+1\right)^2,$$

то уравнение (2.3) для каждой из рассматриваемых систем имеет корни $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$ кратности 2. Пусть простой замкнутый контур Γ охватывает точку $\lambda_1=i$ и лежит в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$. В точке $\tilde{y}\in\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль ν параллельна оси Ox_2 (т. е. $\nu=(0;1)$) и на векторе $\tau=(1;0)$ матрица Лопатинского (2.2) задачи с граничными условиями (2.1) для системы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$ имеет вид

$$L_A\left(\tilde{y},\tau\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\lambda^2-\lambda+1 & 1\\ 2\lambda^2-3\lambda+3 & \lambda^2+\lambda+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda&0\\0&1&0&\lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

для системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$:

$$L_B\left(\tilde{y},\tau\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-2\lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda-1\\ -\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda&0\\0&1&0&\lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

и для системы $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$:

$$L_C\left(\tilde{y},\tau\right)==\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-2\lambda^2+2\lambda & -\lambda^2-2\lambda+1\\ \lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda&0\\0&1&0&\lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

где $\gamma = \dfrac{\langle l;\tau\rangle}{\langle l;\nu\rangle} = 1.$ Применив основную теорему о вычетах, получим, что

$$L_A(\tilde{y},\tau) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-i & -i & 3i & -i \\ 4+3i & 2-i & -6+3i & 2-i \end{pmatrix},$$

$$L_B(\tilde{y},\tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1-i & -4i & 3+i \\ -1+i & -i & -2-2i & 2-i \end{pmatrix},$$

$$L_C(\tilde{y},\tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1+i & -4i & -3-i \\ 1-i & -i & 2+2i & 2-i \end{pmatrix},$$

Нетрудно видеть, что все миноры второго порядка матриц $L_A(\tilde{y},\tau)$, $L_B(\tilde{y},\tau)$ и $L_C(\tilde{y},\tau)$ равны нулю. Таким образом, в точке $\tilde{y} \in \partial\Omega$ нарушается условие Лопатинского и, следовательно, задача типа наклонной производной (с граничными условиями (2.1)) для каждой из рассматриваемых систем не является регуляризуемой. □

Заключение

Таким образом, в каждой компоненте гомотопической связности множества эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем найдется система, обладающая следующими свойствами:

– все дважды непрерывно дифференцируемые решения этой системы являются бигармоническими вектор-функциями;

– краевая задача типа наклонной производной для этой системы в произвольной ограниченной области с гладкой границей на плоскости не является регуляризуемой.

Последнее означает, что оператор, отвечающий рассматриваемой задаче, не является нетеровским в определенных банаховых пространствах [11], т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боярский*, *Б.В.* О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости / Б.В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, № 9. – P. 565–570.

2. *Жадан*, *М.И.* Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка / М.И. Жадан, А.Т. Усс // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. XXVII, № 6. – С. 489–491.

3. *Жадан*, *М.И.* Гомотопическая классификация и регуляризуемость некоторых классов эллиптических систем и краевых задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.И. Жадан; Институт математики АН БССР. – Минск, 1983. – 111 с.

4. *Гельфанд*, *И.М.* Об эллиптических уравнениях / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

5. *Усс*, *А.Т.* Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

6. *Басик*, *А.И.* Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук // Збірник статей. Математика. Інформаційні технології. Освіта. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

7. *Басик*, *А.И.* Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – DOI: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16

8. *Басик*, *А.И.* О краевых задачах для систем Янушаускаса / А.И. Басик, А.Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26–28.

9. *Басик*, А.И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

10. *Хермандер*, *Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – Москва: Мир, 1965. – 379 с.

11. *Агранович*, *М.С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

Поступила в редакцию 13.05.2022.

Информация об авторах

Басик Александр Иванович – к.ф.-м.н., доцент
Грицук Евгений Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Копайцева Татьяна Владимировна – магистр ф.-м.н.