УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58
EDN: UEJBDP

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ КОРАДИКАЛАМИ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON FINITE GROUPS WITH SEMISUBNORMAL RESIDUALS OF SYLOW NORMALIZERS

A.F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Пусть π – некоторое множество простых чисел, G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Доказано, что если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G, то G π-сверхразрешима.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовский нормализатор*, *полусубнормальная подгруппа*, *нильпотентный корадикал*, π-*сверхразрешимая группа*.

Для цитирования: *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с полусубнормальными корадикалами силовских нормализаторов / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 58–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58 – EDN: UEJBDP

Abstract. Let π be some set of primes, G be a π-soluble group and $G \in \mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$. It is proved that if for any prime $p \in \pi \cap \pi(G)$ and Sylow p-subgroup P from G the normalizer $N_G(P)$ is π-supersoluble and its nilpotent residual is semisubnormal in G, then G is π-supersoluble.

Keywords: *finite group*, *Sylow normalizer*, *semisubnormal subgroup*, *nilpotent residual*, π-*supersoluble group*.

For citation: *Vasil'ev*, *A.F.* On finite groups with semisubnormal residuals of Sylow normalizers / A.F. Vasil'ev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 58–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58 (in Russian). – EDN: UEJBDP

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Изучение принадлежности насыщенной формации $\mathfrak{F}$ групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп лежат в $\mathfrak{F}$, восходит к результату Глаубермана [1] о том, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_q$ – формация всех q-групп и нормализатор любой силовской q-подгруппы группы G принадлежит $\mathfrak{N}_q$ для любого простого делителя q порядка G, то G – примарная группа. В дальнейшем для краткости нормализаторы силовских подгрупп группы будем называть силовскими нормализаторами. В [2] в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, доказано, что $G \in \mathfrak{N}$ всякий раз, как силовские нормализаторы нильпотентны. В [3] установлено, что если $\mathfrak{F}$ – формация всех φ-дисперсивных групп с абелевыми силовскими подгруппами для некоторого упорядочения φ множества всех простых чисел, или $\mathfrak{F}$ – формация всех вполне факторизуемых групп, то группа G с силовскими нормализаторами из $\mathfrak{F}$ сама соответственно принадлежит $\mathfrak{F}$. К этому направлению исследований относятся также работы [4]–[6].

Отметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп, то из сверхразрешимости силовских нормализаторов в группе G уже не следует, что G принадлежит $\mathfrak{U}$. В качестве примера такой группы выступает симметрическая группа S_4 степени 4, в которой силовскими нормализаторами являются силовские 2-подгруппы и подгруппы, изоморфные $[Z_3]Z_2$. При этом $S_4 \notin \mathfrak{U}$, а в S_4 все силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{U}$. Строение группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами было исследовано в работах [7], [8]. Например, для такой группы G в [7] были получены свойства в случае $|\pi(G)| = 2$, в [8] найдены оценки нильпотентной длины в случае разрешимости G.

Группы с формационно субнормальными силовскими нормализаторами исследовались в [9], где, в частности, были найдены наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, содержащие группу с $\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими нормализаторами.

Согласно [10] подгруппа *A* группы *G* называется *полунормальной* в *G*, если существует подгруппа *B* такая, что $G = AB$ и AX – подгруппа в *G* для любой подгруппы *X* из *B*. В [11] подгруппа *A* группы *G* называется *полусубнормальной* в *G*, если *A* субнормальна или полунормальна в *G*.

Понятие полусубнормальной подгруппы в разрешимых группах является частным случаем активно используемого в настоящее время понятия $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы. Напомним [12], что подгруппа *H* группы *G* называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в *G*, если либо $H = G$, либо имеется цепь подгрупп от *H* до *G* с простыми индексами. В разрешимой группе всякая полусубнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, однако обратное неверно.

В настоящей работе для π-разрешимой группы *G*, принадлежащей $\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$, с π-сверхразрешимыми нормализаторами силовских *p*-подгрупп $(p \in \pi \cap \pi(G))$ найдена связь полусубнормальности нильпотентных корадикалов в *G* этих силовских нормализаторов с π-сверхразрешимостью *G*. Получены новые результаты для разрешимой группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами.

1 Предварительные сведения

В работе используются обозначения и определения из [13] и [14].

Через $|G|$ обозначается порядок группы *G*,

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$,

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная *p*-подгруппа *G* для простого числа *p*,

$\mathrm{Core}_G(M) = \cap M^x$ для всех $x \in G$ для любой подгруппы *M* из *G*,

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга из *G*, т. е. наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа *G*,

Z_p – циклическая подгруппа порядка *p*,

1 – единичная подгруппа (группа),

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

В работе используются обозначения классов групп:

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп,

$\mathfrak{E}_{\pi}$ – класс всех π-групп для $\pi \subseteq \mathbb{P}$,

$\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп, где $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$,

$\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'} = (G \mid \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{E}_{\pi}$ и $G / N \in \mathfrak{E}_{\pi'})$.

***Лемма* 1.1.** *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H – субнормальная подгруппа в G*, то $H \cap K$ – субнормальная подгруппа в *K* [13, теорема 7.3].

(2) *Если K – субнормальная подгруппа в H и H – субнормальная подгруппа в G, то K – субнормальная подгруппа в G* [13, лемма 7.1].

(3) *Если H и K – субнормальные подгруппы в G, то* $H \cap K$ *– субнормальная подгруппа в G и* $\langle H, K \rangle$ *– субнормальная подгруппа в G* [13, теоремы 7.4 и 7.5].

(4) *Если H – субнормальная подгруппа в G и K – нормальная подгруппа в G, то* HK / K *субнормальна в* G / K [14, лемма A.14.1 (b)].

***Лемма* 1.2** [11, лемма 3.1]. (1) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и* $H \le X \le G$, *то H полусубнормальна в X.*

(2) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и подгруппа N нормальна в G, то HN полусубнормальна в G и* HN / N *полусубнормальна в* G / N.

(3) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и Y – непустое множество элементов из G, то подгруппа* $H^Y = \langle H^y \mid y \in Y \rangle$ *полусубнормальна в G. В частности,* H^g *полусубнормальна в G для любого* $g \in G$.

***Лемма* 1.3** [11, лемма 3.2 (1)]. *Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G. Если силовская p-подгруппа P из G полусубнормальна в G, то P нормальна в G.*

***Лемма* 1.4** [14, теорема A.15.2]. *Если в группе G существует максимальная подгруппа M с* $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, *то выполняется только одно из утверждений*:

(1) *в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N,* $N = C_G(N)$ *(в частности, N абелева) и M дополняет N в G*;

(2) *в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, N неабелева и M является добавлением N в G*;

(3) *в G имеются только две минимальные нормальные подгруппы* N_1 *и* N_2, *каждая из них добавляема с помощью M в G. Также* $C_G(N_i) = N_{3-i}$ *и* $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$.

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы *G*, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из *G* со свойством $G / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Нильпотентный корадикал – это $G^{\mathfrak{N}}$ для $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$.

***Лемма* 1.5** [13, лемма 1.2] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация, G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $(G / K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K / K$ *для любой* $K \trianglelefteq G$;

(2) *если* $G = HK$, *H – подгруппа из G и* $K \trianglelefteq G$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$.

***Лемма* 1.6** [13, лемма 3.9 (1)]. *Если G – группа, то* $O_p(G / C_G(H / K)) = 1$ *для любого главного фактора* H / K *из G,* $p \in \pi(H / K)$, *и* $F_p(G) \le C_G(H / K)$.

Известные необходимые нам свойства π-сверхразрешимых групп (см., например, [13, с. 35], [15, гл. VI, § 8, 9]) приведем в следующей лемме.

***Лемма* 1.7.** Класс всех π-сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией; если группа G p-сверхразрешима, то она имеет p-нильпотентный коммутант; если группа G сверхразрешима, то G дисперсивна по Оре.

Напомним [13], что *дисперсивная по Оре* группа – это группа G с $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, в которой существуют нормальные подгруппы порядков

$$p_1^{\alpha_1},\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

при естественном упорядочении

$$p_1 > p_2 > \cdots > p_n.$$

Нам потребуется известный результат С.А. Чунихина.

***Лемма* 1.8** [13, теорема 18.3]. *Если G – π-разрешимая группа, то* $G \in (D_\pi \mathfrak{S}) \cap D_{\pi'}$.

2 Основной результат

***Лемма* 2.1.** *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа из G. Если $(N_G(P))^{\mathfrak{N}}$ – полусубнормальная подгруппа в G, то $(N_{G/N}(PN/N))^{\mathfrak{N}}$ – полусубнормальная подгруппа в G/N.*

Доказательство. По свойству силовских подгрупп $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$. Из леммы 1.5 следует, что

$$(N_{G/N}(PN/N))^{\mathfrak{N}} = (N_G(P))^{\mathfrak{N}} N/N.$$

Тогда из полусубнормальности $(N_G(P))^{\mathfrak{N}}$ в G по лемме 1.2 (2) имеем $(N_{G/N}(PN/N))^{\mathfrak{N}}$ – полусубнормальная подгруппа в G/N. □

***Лемма* 2.2.** *Если G – π-сверхразрешимая группа и $|\pi \cap \pi(G)| \geq 1$, то холлова π-подгруппа из G дисперсивна по Оре*.

Доказательство. Из π-сверхразрешимости G по лемме 1.7 следует π-сверхразрешимость холловой π-подгруппы G_π из G. Отсюда с учетом леммы 1.8 G_π дисперсивна по Оре. □

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G, то G π-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Тогда G π-разрешима, для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G ее нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим $(N_G(P))^{\mathfrak{N}}$ полусубнормален в G, а G не является π-сверхразрешимой.

Из π-разрешимости G следует, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа N. Тогда либо N – p-группа для некоторого простого числа p, либо N – π'-группа. Так как N π-сверхразрешима, $N \neq G$.

Рассмотрим любую силовскую s-подгруппу S_1N/N из G/N, $s \in \pi \cap \pi(G)$. В G найдется силовская s-подгруппа S такая, что

$$S_1/N = SN/N.$$

Из π-сверхразрешимости $N_G(S)$ следует, что

$$N_{G/N}(S_1/N) = N_G(S)N/N \cong N_G(S)/N_G(S) \cap N$$

π-сверхразрешим. По лемме 2.1 из полусубнормальности $(N_G(S))^{\mathfrak{N}}$ в G заключаем, что

$$(N_{G/N}(S_1/N))^{\mathfrak{N}} = (N_{G/N}(SN/N))^{\mathfrak{N}}$$

полусубнормален в G/N. Так как G/N π-разрешима, по выбору G имеем G/N π-сверхразрешима.

Если в G существует еще одна минимальная нормальная подгруппа $N_1 \neq N$, то G/N_1 π-сверхразрешима. Так как класс всех π-сверхразрешимых групп является формацией, заключаем, что $G/N \cap N_1 \cong G$ π-сверхразрешима. Это противоречит выбору G.

Итак, N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G.

Допустим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \leq \Phi(G)$. Поэтому $G/\Phi(G) \cong G/N/\Phi(G)/N$ π-сверхразрешима. Из насыщенности формации всех π-сверхразрешимых групп заключаем, что G π-сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G.

Значит, $\Phi(G) = 1$. Тогда G имеет максимальную подгруппу M с $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Для G может выполняться только одно из утверждений (1) или (2) леммы 1.4.

Случай N – π'-группа невозможен, так как G/N π-сверхразрешима.

Предположим, что N – p-группа, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Тогда N абелева и для G выполняется утверждение (1) леммы 1.4. Поэтому $M \cap N = 1$ и $N = C_G(N)$.

Если $|\pi \cap \pi(G)| = 1$, то из $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что силовская p-подгруппа P из G нормальна в G и получаем противоречие $G = N_G(P)$ – π-сверхразрешимая группа.

Таким образом, $|\pi \cap \pi(G)| > 1$.

Отметим, что p является делителем $|M|$. Из леммы 1.6 и $M \cong G/C_G(N)$ следует, что $O_p(M) = 1$. Из $F(G) = N(F(G) \cap M)$ заключаем, что $|F(G) \cap M|$ не делится на p. Поскольку $F(G)$ – p-группа, имеем, что $N = F(G)$. Более того, $N = F_p(G)$, ввиду того, что $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$.

Обозначим через r наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(M)$ и через R силовскую r-подгруппу группы M. Так как $M \cong G/N$ π-сверхразрешима, по лемме 2.2 R нормальна в холловой π-подгруппе M_π из M. Из $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что $M \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Поэтому M_π нормальна в M, а значит, R нормальна в M ввиду характеристичности в M_π.

Если предположить, что $r = p$, то получаем противоречие $1 \neq R \leq O_p(M) = 1$.

Следовательно, $r > p$. Так как $M \leq N_G(R)$ и $\mathrm{Core}G(M) = 1$, заключаем, что $M = N_G(R)$. Индекс $|G : M|$ является p-числом, поэтому R – силовская r-подгруппа группы G и нильпотентный корадикал $M^{\mathfrak{N}}$ полусубнормален в G. Отметим, что $M^{\mathfrak{N}} \neq 1$. Так как в противном случае M была бы нильпотентной подгруппой и в M неединичная силовская p-подгруппа содержалась бы в $O_p(M) = 1$.

Из абелевости M/M' следует, что $M^{\mathfrak{N}} \leq M'$. Ввиду леммы 1.7 M' p-нильпотентен. Так как $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ и $O_p(M) = 1$, имеем $p \notin \pi(M')$. Итак, $p \notin \pi(M^{\mathfrak{N}})$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $M^{\mathfrak{N}}$ субнормален в G. Тогда существует цепь подгрупп

$$M^{\mathfrak{N}} = M_0 \lhd M_1 \lhd \cdots \lhd M_{s-1} \lhd M_s = G.$$

Так как $F_p(M_{i-1})$ характеристична в M_{i-1}, заключаем, что $F_p(M_{i-1})$ нормальна в M_i и $F_p(M_{i-1}) \leq F_p(M_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда

$$M^{\mathfrak{N}} \leq F_p(M_{i-1}) \leq F_p(M_s) = F_p(G) = N.$$

Получили противоречие $1 \neq M^{\mathfrak{N}} \leq M \cap N = 1$.

2. $M^{\mathfrak{N}}$ полунормален в G. Тогда в G существует подгруппа B такая, что $G = M^{\mathfrak{N}}B$ и подгруппа $M^{\mathfrak{N}}$ перестановочна с каждой подгруппой из B. Из $p \notin \pi(M^{\mathfrak{N}})$ следует, что $p \in \pi(B)$ и силовская p-подгруппа P группы G содержится в B. Поэтому $N \leq B$. Пусть $z \in N$ и $|z| = p$. Тогда $M^{\mathfrak{N}}\langle z \rangle$ – подгруппа группы G и

$$M^{\mathfrak{N}}\langle z \rangle \cap N = \langle z \rangle (M^{\mathfrak{N}} \cap N) = \langle z \rangle$$

нормальна в $M^{\mathfrak{N}}\langle z \rangle$.

Предположим, что r делит $|M^{\mathfrak{N}}|$ и M_1 – силовская r-подгруппа из $M^{\mathfrak{N}}$. Заметим, что

$$M_1 = R \cap M^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq M^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq M.$$

Поэтому $M = N_G(M_1)$. Так как $M_1\langle z \rangle$ – подгруппа в $M^{\mathfrak{N}}\langle z \rangle$, M_1 максимальна в $M_1\langle z \rangle$. Из $|M_1\langle z \rangle : N_{M_1\langle z \rangle}(M_1)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r)$ и $r > p$ следует, что M_1 нормальна в $M_1\langle z \rangle$. Отсюда $z \in M_1\langle z \rangle \leq N_G(M_1) = M$. Получили противоречие $1 \neq z \in M \cap N = 1$.

Итак, r не делит $|M^{\mathfrak{N}}|$. Откуда следует, что $|\pi \cap \pi(G)| \geq 3$.

Рассмотрим $H = PR$. Из $P = N(P \cap M)$ следует, что $H = N(P \cap M)R$ является подгруппой в G. Ввиду $N_H(R) \leq N_G(R)$ имеем, что $N_H(R)$ π-сверхразрешим и $(N_H(R))^{\mathfrak{N}} \leq N_G(R)^{\mathfrak{N}}$ – $\{p, r\}'$-подгруппа. Тогда $(N_H(R))^{\mathfrak{N}} = 1$ субнормальна, а значит, полусубнормальна в H.

Отметим, что $N_H(P) = P$. Действительно, если бы в $N_H(P)$ имелась силовская r-подгруппа R_1, то тогда бы $R_1 \trianglelefteq N_H(P)$ ввиду сверхразрешимости $N_H(P)$. Поэтому R_1 централизовала бы N и получалось бы противоречие

$$R_1 \leq C_G(N) = N.$$

Тогда $(N_H(P))^{\mathfrak{N}} = 1$ субнормальна, поэтому и полусубнормальна в H. По выбору G из $|G| > |H|$ следует, что H сверхразрешима и $R \trianglelefteq H$. Поэтому $R \leq C_K(N) \leq C_G(N) = N$. Получили противоречие $1 \neq R \leq M \cap N = 1$. □

3 Заключительные замечания

В работе найдены достаточные условия, при которых π-разрешимая группа G, принадлежащая $\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$, является π-сверхразрешимой, а именно: силовский нормализатор π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G для любой силовской p-подгруппы p из G, где p из $\pi \cap \pi(G)$. Из теоремы 2.1 получаются новые результаты.

***Следствие* 3.1.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G, то G π-сверхразрешима.*

***Следствие* 3.2.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален в G, то G π-сверхразрешима.*

***Следствие* 3.3.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G*

нормализатор $N_G(P)$ *π-сверхразрешим и его коммутант субнормален в* G, *то* G *π-сверхразрешима.*

Для $\pi(G) \subseteq \pi$ теорема 2.1 включает следующие результаты.

***Следствие* 3.4.** *Если в разрешимой группе* G *любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в* G, *то* G *сверхразрешима.*

***Следствие* 3.5.** *Если в разрешимой группе* G *любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в* G, *то* G *сверхразрешима.*

***Следствие* 3.6.** *Если в разрешимой группе* G *любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален в* G, *то* G *сверхразрешима.*

***Следствие* 3.7.** *Если в разрешимой группе* G *любой силовский нормализатор сверхразрешим и его коммутант субнормален в* G, *то* G *сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauberman*, *G.* Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glauberman // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 46–51.
2. *Bianchi*, *M.* On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M. Bianchi, A. Gillio Berta Mauri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47, № 3. – P. 193–197.
3. *Монахов*, *В.С.* Нормальные подгруппы конечных групп и формации с нормализаторными условиями / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 867–870.
4. *Баллестер-Болинше*, *А.* О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах / А. Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 3–5.
5. *D'Aniello*, *A.* Saturated formations closed under Sylow normalizers / A. D'Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, M.D. Pérez-Ramos // Commun. Algebra. – 2005. – Vol. 33, № 8. – P. 2801–2808.
6. *Kazarin*, *L.* On Sylow normalizers of finite groups / L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra Appl. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 1350116–1-20.
7. *Fedri*, *V.* Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / V. Fedri, L. Serena // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50, № 1. – P. 11–18.
8. *Bryce*, *R.A.* Bounds on the Fitting length of finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / R.A. Bryce, V. Fedri, L. Serena // Bull. Austral. Math. Soc. – 1991. – Vol. 44, № 1. – P. 19–31.
9. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Математические заметки. – 2020. – Т. 108, № 5. – С. 679–691.
10. *Su*, *X.* Seminormal subgroups of finite groups / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5–10.
11. *Monakhov*, *V.S.* On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, № 5. – P. 893–911.
12. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
14. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
15. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

Поступила в редакцию 04.04.2022.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., доцент