МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_94
EDN: ZVSWTZ

О ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ПЕРВОГО ТИПА

А.П. Старовойтов, А.Д. Ковалькова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON POLYORTHOGONAL FUNCTIONS OF THE FIRST TYPE

A.P. Starovoitov, A.D. Kovalkova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1,...,\mu_k$, описан процесс полиортогонализации произвольной линейно независимой системы функций $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)\}$, который позволяет для произвольного мультииндекса *n* ввести понятие *n*-ой полиортогональной функции. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых эта полиортогональная функция определяется однозначно, и описан её явный вид. Основная теорема является кратным аналогом теоремы Грама – Шмидта об ортогонализации.

Ключевые слова: *линейно независимая система*, *предгильбертовы пространства*, *полиортогональные многочлены*, *совершенная система*, *ортогонализация Грама – Шмидта*.

Для цитирования: *Старовойтов*, *А.П.* О полиортогональных функциях первого типа / А.П. Старовойтов, А.Д. Ковалькова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 94–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_94 – EDN: ZVSWTZ

Abstract. In pre-Hilbert function spaces generated by the measures $\mu_1,...,\mu_k$, the process of polyorthogonalization of an arbitrary linearly independent system of functions $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)\}$ is described, which allows us to introduce the concept of the *n*th polyorthogonal function for an arbitrary multi-index *n*. Necessary and sufficient conditions are found under which this polyorthogonal function is uniquely determined, and its explicit form is described. The main theorem is a multiple analogue of the Gram–Schmidt orthogonalization theorem.

Keywords: *linearly independent system*, *Pre-Hilbert spaces*, *polyorthogonal polynomials*, *perfect system*, *Gram – Schmidt orthogonalization*.

For citation: *Starovoitov*, *A.P.* On polyorthogonal functions of the first type / A.P. Starovoitov, A.D. Kovalkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 94–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_94 (in Russian). – EDN: ZVSWTZ

Введение

Точно также, как появление ортогональных многочленов связано с исследованиями в теории аппроксимаций Паде марковских функций, полиортогональные многочлены естественным образом возникают в теории аппроксимаций Эрмита – Паде марковских функций (см., например, [1]). Для полиортогональных многочленов условия ортогональности задаются с помощью нескольких мер $\mu_1,...,\mu_k$, и при этом степень участия каждой меры определяется индивидуально весовым коэффициентом. Особое внимание вызывают те меры, для которых известные утверждения общей теории ортогональных многочленов справедливы и для полиортогональных многочленов. В этом направлении исследований получен ряд интересных и глубоких результатов [2]–[6]. В частности, для многих совершенных систем функций полиортогональные многочлены хорошо изучены [1] и нашли приложения в различных областях алгебры, анализа, теории функций, современной физики [7]–[14].

В данной работе дано обобщение понятия полиортогонального многочлена первого типа: вместо полиортогонализации первого типа линейно независимой системы функций $\{1,x,x^2,...\}$ [15] рассматривается полиортогонализация произвольной линейно независимой системы функций $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),...\}$ в предгильбертовых пространствах, порожденных мерами $\mu_1,...,\mu_k$. Основная теорема является обобщением теоремы Грама – Шмидта об ортогонализации [16], [17, гл. 4, § 1]. В ней описывается процесс полиортогонализации системы функций φ и устанавливается явный вид полиортогональных функций первого типа, полученных в результате указанной полиортогонализации. Классическая формула Грама – Шмидта для представления ортогонального многочлена [17, гл. 4, § 1] и формулы для представления полиортогональных многочленов первого типа, полученные в [15], вытекают из доказанной основной теоремы в качестве частных случаев.

1 Полиортогонализация первого типа

Пусть $\mu_1,...,\mu_k$ – положительные борелевские меры на вещественной прямой, носителями которых являются отрезки $\Delta_1,...,\Delta_k$ действительной прямой. Рассмотрим систему функций

$$\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),...\},$$

удовлетворяющую следующим естественным условиям. Считаем, что при всех $j=1,...,k$ каждая функция измерима на Δ_j относительно меры μ_j. Предполагаем также, что система φ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j и

$$\int_{\Delta_j}|\varphi_p(x)|^2\,d\mu_j(x)<+\infty,\ j=1,...,k;\ p=0,1,.... \quad (1.1)$$

При выполнении условий (1.1) будем писать, что $\varphi\in L^2_\mu$, $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$. Обозначим через

$$(f,g)^j=\int_{\Delta_j}h(x)g(x)d\mu_j(x)$$

скалярное произведение функций $h(x)$ и $g(x)$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ_j.

Множество мультииндексов $n=(n_1,...,n_k)$, т. е. упорядоченных наборов k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}^k_+$. Порядком мультииндекса $n=(n_1,...,n_k)$ назовём сумму $|n|:=n_1+...+n_k$.

***Определение* 1.1.** *Пусть* $n=(n_1,...,n_k)\in\mathbb{Z}^k_+$ *– ненулевой мультииндекс, а* $\varphi\in L^2_\mu$. *Функции*

$$\psi_j(x)=\alpha_0^j\varphi_0(x)+\alpha_1^j\varphi_1(x)+...+\alpha^j_{n_j-1}\varphi_{n_j-1}(x),$$
$$j=1,...,k,$$

все одновременно тождественно не равные нулю, будем называть n-ми полиортогональными функциями первого типа для набора мер μ, *порожденными системой* φ, *если*

$$\sum_{j=1}^k\int_{\Delta_j}\psi_j(x)\varphi_\nu(x)d\mu_j(x)=0, \quad (1.2)$$
$$\nu=0,1,...,|n|-2.$$

В определении предполагается, что при $n_j=0$, $\psi_j(x)\equiv0$ и $|n|\neq1$. Если $|n|=1$, то у индекса n только одна компонента $n_{j_0}=1$, остальные равны нулю. Тогда набор n-ых полиортогональных функций первого типа

$$\Psi=\{\psi_1(x),...,\psi_k\}$$

состоит из $\psi_{j_0}(x)\equiv\varphi_{j_0}(x)$ и $\psi_j(x)\equiv0$ при $j\neq j_0$.

Если в этом определении положить $k=1$, либо, что тоже самое, взять мультииндекс $n=(n_1,0,...,0)$, то, отождествляя меру μ_1 с μ, а компоненту n_1 с $n\in\mathbb{Z}^1_+$, придём к классическому определению. В этом случае полиортогональная функция первого типа

$$\psi_1(x)=\alpha_0^1\varphi_0(x)+...+\alpha^1_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

является $(n-1)$-ой ортогональной функцией и для неё справедлива формула Грама – Шмидта [17, гл. 3, § 1], [18]

$$\psi_1(x)=$$
$$=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{n-2}) & (\varphi_1,\varphi_{n-2}) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-2})\\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{n-1}(x)\end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что коэффициент α^1_{n-1} в представлении Грама – Шмидта функции $\psi_1(x)$ равен определителю Грама

$$G_{n-1}=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-2},\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-2},\varphi_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{n-2}) & (\varphi_1,\varphi_{n-2}) & \dots & (\varphi_{n-2},\varphi_{n-2})\end{vmatrix}$$

для системы функций $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-2}(x)\}$. Отметим [17, гл. 3, § 1], что определитель Грама G_{n-1} системы $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-2}(x)\}$ отличен от нуля только в том случае, когда эта система линейно независима на отрезке Δ.

Если $\varphi=\{1,x,x^2,...\}$, то для каждой меры μ_j можно определить функцию Маркова

$$f_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{d\mu_j(x)}{z-x},\ z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j,\ j=1,...,k. \quad (1.4)$$

Её ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид

$$f_j(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{s_p^j}{z^{i+1}},$$

где

$$s_p^j=(x^\alpha,x^\beta)^j=\int_{\Delta_j}x^p d\mu_j(x)(p=0,1,...)$$

– последовательность степенных моментов меры μ_j, а $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^1_+$, $\alpha+\beta=p$. В таком случае n-ые полиортогональные функции $\psi_1(x),...,\psi_k(x)$ первого типа являются n-ми полиортогональными многочленами первого типа $A_1(x),...,A_k(x)$, а соотношения ортогональности (1.2) можно записать в стандартном виде [1]:

$$\sum_{j=1}^k\int_{\Delta_j}A_j(x)x^\nu d\mu_j(x)=0,\ \nu=0,1,...,|n|-2.$$

Полиортогональные функции первого типа условиями (1.2) определяется с точностью до числового множителя: если $\Psi=\{\psi_1(x),...,\psi_k\}$ – набор n-ых полиортогональный функций первого типа для μ, то при $\lambda\neq0$ набор

$$\lambda\Psi:=\{\lambda\psi_1(x),...,\lambda\psi_k\}$$

также состоит из n-ых полиортогональных функций первого типа для μ. На самом деле неединственность может носить и более существенный характер. Приведём пример, подтверждающий это.

***Пример* 1.1.** Пусть $\varphi=\{1,x,x^2,...\}$, $k=2$, $n=(2,2)$, $d\mu_1(x)=dx$, $d\mu_2(x)=-dx$, где dx – мера Лебега, носитель которой $\Delta=[0,1]$. Тогда

$$\psi_1(x)=a+bx,\ \ \psi_2(x)=-a-bx,$$

где a и b – произвольные действительные числа не равные нулю одновременно.

***Определение* 1.2.** *Будем говорить, что n-ые полиортогональные функции* $\psi_1(x),...,\psi_k(x)$ *первого типа однозначно определяются условиями* (1.2), *если для любых двух наборов таких функций*

$$\Psi'=\{\psi_1'(x),...,\psi_k'(x)\},$$

$$\Psi''=\{\psi_1''(x),...,\psi_k''(x)\}$$

найдётся $\lambda\in\mathbb{R}$, *что* $\Psi''\equiv\lambda\Psi'$ *на всех отрезках* Δ_j.

Актуальным является вопрос о том, каковы необходимые и достаточные условия на индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ и системы

$$\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...\},$$

$$\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\},$$

при которых n-ые полиортогональные функции определяются условиями (1.2) однозначно. В случае $k=1$ однозначность вытекает из линейной независимости системы φ [17, гл. 3, § 1]. Пример 1.1 показывает, что уже при $k=2$ это не так. Далее будет установлено, что при сделанных предположениях n-ые полиортогональные функции первого типа всегда существуют, а однозначность их существования равносильна условию максимальности ранга матрицы, которую можно назвать кратным аналогом известной матрицы Грама [17, гл. 3, § 1].

2 Теорема о полиортогонализации

Далее считаем, что порядок мультииндекса $|n|\geqslant 2$. Рассмотрим ненулевой индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$. Для каждого $n_j\neq 0$ определим матрицу порядка $(|n|-1)\times n_j$

$$G^j=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1},\varphi_0)^j\\ (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1},\varphi_1)^j\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{|n|-2})^j & (\varphi_1,\varphi_{|n|-2})^j & \dots & (\varphi_{n_j-1},\varphi_{|n|-2})^j\end{pmatrix},$$

а после этого определим матрицу порядка $(|n|-1)\times|n|$

$$G_n=\begin{bmatrix}G^1 & G^2 & \dots & G^k\end{bmatrix}.$$

В том случае, если $n_j=0$, матрица G_n не содержит блок-матрицу G^j. Определим также функциональные матрицы порядка $1\times|n|$

$$U_j(x)=\left(00\dots0\dots\varphi_0(x)\varphi_1(x)\dots\varphi_{n_j-1}(x)\dots00\dots0\right)$$

и матрицу

$$U(x)=U_1(x)+\ldots+U_k(x)=$$

$$=\left(\varphi_0(x)\dots\varphi_{n_1-1}(x)\ \dots\ \varphi_0(x)\dots\varphi_{n_k-1}(x)\right).$$

Если в матрице G_n добавить ещё одну строку, состоящую из элементов матрицы $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Определитель полученной квадратной матрицы представим в виде

$$det\begin{bmatrix}G_n\\ U_j(x)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\dots. & (\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1},\varphi_0)^j & \dots.\\ \dots. & (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1},\varphi_1)^j & \dots.\\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots.\\ \dots. & (\varphi_0,\varphi_{|n|-2})^j & (\varphi_1,\varphi_{|n|-2})^j & \dots & (\varphi_{n_j-1},\varphi_{|n|-2})^j & \dots.\\ 0...0 & \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{n_j-1}(x) & 0...0\end{vmatrix}.$$

***Определение* 2.1.** *Ненулевой индекс* $n\in\mathbb{Z}_+^k$ *будем называть слабо нормальным для* μ, *если ранг матрицы* G_n *равен* $|n|-1$, *т. е. является максимальным.*

Так, в примере 1.1 индекс $n=(2,2)$ не является слабо нормальным для рассматриваемых в этом примере мер μ_1,μ_2, поскольку $\mathrm{rang}G_n=2$.

***Определение* 2.2.** *Набор* (*систему*) *мер* $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$ *будем называть слабо совершенной, если любой ненулевой индекс* $n\in\mathbb{Z}_+^k$ *является слабо нормальным для* μ.

Основным результатом работы является следующая теорема.

***Теорема* 2.1.** *Для ненулевого индекса* $n\in\mathbb{Z}_+^k$ *и системы мер* $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$ *n-ые полиортогональные функции* $\psi_1(x),...,\psi_k(x)$ *определяются условиями* (1.2) *однозначно тогда и только тогда, когда индекс n является слабо нормальным для* μ, *т. е.* $\mathrm{rang}G_n=|n|-1$.

В том случае, если $\mathrm{rang}\,G_n=|n|-1$, *при соответствующем выборе нормирующего множителя справедливы представления*

$$\psi_j(x)=det\begin{bmatrix}G_n\\ U_j(x)\end{bmatrix},\ j=1,2,...,k. \qquad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $n_j\neq 0$ и функции

$$\psi_j(x)=b_0^j\varphi_0(x)+...+b_{n_j-1}^j\varphi_{n_j-1}(x)$$

удовлетворяют условиям (1.2). По условию система $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j. Поэтому равносильная условиям (1.2) система линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $b_0^j,...,b_{n_j-1}^j$ функций $\psi_j(x)$ в матричной форме может быть записана в виде:

$$G_n \cdot b^T = \theta^T, \qquad (2.2)$$

где $b = (b_0^1 b_1^1 \dots b_{n_1-1}^1 \dots b_0^k b_1^k \dots b_{n_k-1}^k)$ – матрица-строка порядка $1\times|n|$, а θ – нулевая матрица-строка порядка $1\times|n|$ (при $n_j = 0$ матрица b не содержит неизвестных $b_0^j,...,b_{n_j-1}^j$). В силу того, что система (2.2) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, из теоремы Кронекера – Капелли следует, что эта система имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит только из одного фундаментального решения только тогда, когда $\operatorname{rang} G_n = |n|-1$. Все другие ненулевые решения получаются в результате умножения этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Поэтому первое утверждение теоремы 2.1 доказано.

Предположим теперь, что $rang G_n = |n|-1$. Необходимо доказать, что функции $\psi_j(x)$, определённые равенствами (2.1), являются искомыми. Разлагая определитель в (2.1) по элементам последней строки, получим, что функция $\psi_j(x)$ представляется в виде

$$\psi_j(x) = \alpha_0^j \varphi_0(x) + \dots + \alpha_{n_j-1}^j \varphi_{n_j-1}(x),$$

и поскольку $\operatorname{rang} G_n = |n|-1$, то, по крайней мере, одна из этих функций тождественно не равна нулю. Остаётся проверить, что функции $\psi_1(x),...,\psi_k(x)$, определённые равенствами (2.1), удовлетворяют условиям (1.2). Считая, что $n_j \neq 0$, при каждом j применим оператор интегрирования $J_j f := \int_{\Delta_j} f(x)d\mu_j(x)$ к последней строке определителя (2.1), предварительно умножив эту строку на функцию $\varphi_\nu(x)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{\Delta_j}\psi_j(x)\varphi_\nu(x)d\mu_j(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1},\varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_0,\varphi_0)^k & \dots & (\varphi_{n_k-1},\varphi_0)^k \\ (\varphi_0,\varphi_1)^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1},\varphi_1)^1 & \dots & (\varphi_0,\varphi_1)^k & \dots & (\varphi_{n_k-1},\varphi_1)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{|n|-2})^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1},\varphi_{|n|-2})^1 & \dots & (\varphi_0,\varphi_{|n|-2})^k & \dots & (\varphi_{n_k-1},\varphi_{|n|-2})^k \\ (\varphi_0,\varphi_\nu)^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1},\varphi_\nu)^1 & \dots & (\varphi_0,\varphi_\nu)^k & \dots & (\varphi_{n_k-1},\varphi_\nu)^k \end{vmatrix}.$$

Определитель в правой части последнего равенства при $\nu = 0,1,...,|n|-2$ имеет две одинаковые строки, поэтому он равен нулю. Следовательно условия (1.2) выполняются. □

3 Замечания и следствия

Компонента n_j мультииндекса $n = (n_1,\dots,n_k)$ может быть равной нулю. В этом случае, согласно определению 1.1, соответствующая компонента $\psi_j(x)$ вектор-функции Ψ тождественно равна нулю. Из условий ортогональности (1.2) следует, что в этом случае мера $\mu_j(x)$ фактически не участвует в определении n-ых полиортогональных функций. Поэтому, если, например, $n = (n_1,0,\dots,0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то, считая, что мера μ_1 тождественно совпадает с мерой μ, а компонента n_1 совпадает с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$, олучим, что полиортогональная функция $\psi_1(x)$ является $(n-1)$-ой ортогональной функцией и представление (2.1) в точности совпадает с формулой Грама – Шмидта (1.3).

Известно [1, стр. 158], что если носители мер μ_j не перекрываются (их общими точками могут быть только концы отрезков Δ_j), а $A_1(x),...,A_k(x)$ – полиортогональные многочлены первого типа, отвечающие мультииндексу $n = (n_1,...,n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлен $A_j(x)$ имеет внутри отрезка Δ_j ровно $n_j - 1$ простых нулей. В этом случае система марковских функций (1.4) является совершенной. Это значит [1], что при любом ненулевом индексе $n = (n_1,...,n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ для всех $j = 1,...,k$ справедливы равенства $\deg A_j = n_j - 1$. Здесь предполагается, что $\deg A_j = -1$, тогда и только тогда, когда $A_j(x) \equiv 0$. Следующий пример показывает, что если носители мер перекрываются, то система (1.4), состоящая из марковских функций $\mathbf{f} = \{f_1(x),...,f_k(x)\}$, уже может быть несовершенной.

***Пример* 3.1.** Пусть $\varphi = \{1, x, x^2,...\}$, $k = 2$, $n = (1,3)$,

$$d\mu_1(x) = dx, \Delta_1 = [0,1];$$
$$d\mu_2(x) = dx, \Delta_2 = [-1,1],$$

где dx – мера Лебега. Тогда для $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$ при определённом выборе нормирующего множителя

$$A_1(x) = 6x + 4, \ A_2(x) = -4.$$

Поскольку $\deg A_2 = 1$, то соответствующая система $\mathbf{f} = \{f_1(x), f_1(x)\}$ марковских функций не является совершенной.

Сделаем ещё одно замечание. В [15] установлено, что система марковских функций $\mathbf{f} = \{f_1(x),...,f_k(x)\}$ является совершенной тогда и только тогда, когда для любого ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ выполняется условие: $\prod_n = \prod_{j=1}^{k} \tilde{H}_n^{n_j} \neq 0$, где $\tilde{H}_n^{n_j}$ – определитель матрицы, полученной из матрицы G_n выбрасыванием в ней столбца

$$((\varphi_{n_j-1},\varphi_0)^j(\varphi_{n_j-1},\varphi_1)^j,\ldots(\varphi_{n_j-1},\varphi_{|n|-2})^j)^T.$$

Нетрудно заметить, что если для мультииндекса $n\in\mathbb{Z}_+^k$ произведение $\prod_n \neq 0$, то $\operatorname{rang} G_n = |n|-1$.

Поэтому любая совершенная система **f** марковских функций (1.4) является слабо совершенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.
2. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 99, № 1–2. – P. 423–447.
3. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials / A. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 487–524.
4. *Assche*, *W. Van.* Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. 127. – P. 317–347.
5. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – Vol. 355, № 10. – P. 3887–3914.
6. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights / A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky // Comm. Math. Phys. – 2009. – Vol. 286, № 1. – P. 217–275.
7. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде для систем Никишина и иррациональность числа $\zeta(1.3)$ / В.Н. Сорокин // УМН. – 1994. – Т. 49, № 2. – С. 167–168.
8. *Daems*, *E.* Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions / E. Daems, A.B.J. Kuijlaars // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 146, № 1. – P. 91 – 114.
9. *Mukhin*, *E.* Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe Ansatz conjecture / E. Mukhin, A. Varchenko // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, № 11. – P. 5383–5418.
10. *Aptekarev*, *A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
11. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Singular values of products of Ginibre random matrices, multiple orthogonal polynomials and hard edge scalings / A.B.J. Kuijlaars, L. Zhang // Comm. Math. Phys. – 2014. – Vol. 332, № 2. – P. 750–781.
12. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде функции Вейля и её производной для дискретных мер / В.Н. Сорокин // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, № 10. – С. 139–156.
13. *Суетин*, *С.П.* Полиномы Эрмита – Паде и квадратичные аппроксимации Шафера для многозначных аналитических функций / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2020. – Т. 75, № 4 (454). – P. 213–214.
14. *Икономов*, *Н.Р.* Алгоритм Висковатова для полиномов Эрмита – Паде / Н.Р. Икономов, С.П. Суетин // Математический сборник. – 2021. – Т. 212, № 9. – С. 94–118.
15. *Старовойтов*, *А.П.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 424–433.
16. *Schmidt*, *E.* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener / E. Schmidt // Math. Ann. – 1907. – Vol. 63. – P. 433–476.
17. *Натансон*, *И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
18. *Gram*, *I.P.* Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate / E. Schmidt // Journ. für Math – 1883. – Vol. 94. – P. 41–73.

Поступила в редакцию 15.02.2022.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор

Ковалькова Ангелина Дмитриевна – студентка