

## СКОРОСТЬ ВОЛНЫ ПРИ ГИДРОУДАРЕ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТЫХ ФУТЕРОВАННЫХ ТРУБ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## THE WAVE VELOCITY DURING A WATER HAMMER AND THE STRESS-STRAIN STATE OF LAYERED LINED PIPES MADE OF ORTHOTROPIC MATERIALS

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Решается задача расчета напряженно-деформированного состояния ортотропных двухслойных труб из композитов и определения скорости волны при гидроударе применительно к современной CIPP «Cured-in-place pipe». Выведены зависимости, определяющие скорость волны при гидроударе для различных комбинаций упругих ортотропных свойств трубы и футеровки. Приводятся численные результаты о влиянии цилиндрической анизотропии упругих свойств футеровки (или трубы) на скорость волны при гидроударе.

**Ключевые слова:** *скорость волны, гидроудар, футеровка, напряжения, слоистая труба, ортотропный материал.*

**Для цитирования:** *Можаровский, В.В.* Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб из ортотропных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 44–51. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_44](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_44) – EDN: SGFXWP

**Abstract.** The problem of calculating the stress-strain state of orthotropic double-layer pipes made of composites and determining the wave velocity during a water hammer is solved, in relation to the modern CIPP “Cured-in-place pipe” technology. The dependences are derived that determine the wave velocity during a water hammer for various combinations of elastic orthotropic properties of the pipe and lining. The numerical results are given on the effect of cylindrical anisotropy of elastic properties of the lining (or pipe) on the wave velocity during a water hammer.

**Keywords:** *wave velocity, water hammer, lining, stresses, layered pipe, orthotropic material.*

**For citation:** *Mozharovsky, V.V.* The wave velocity during a water hammer and the stress-strain state of layered lined pipes made of orthotropic materials / V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 44–51. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_44](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_44) (in Russian). – EDN: SGFXWP

### Введение

Развитие современной техники требует разработки новых материалов, способных работать в сложных эксплуатационных условиях – при воздействии повышенных давлений, температур и агрессивных сред. К подобным материалам относятся также композиционные материалы с полимерной, металлической или другой матрицей. Волокнистые композиты обладают рядом характерных уникальных свойств – повышенной направленной прочностью, жесткостью, выдерживают высокотемпературные деформации, обладают низким коэффициентом термического расширения. Важно отметить, что такие параметры работоспособности зависят не только от свойств волокон и матрицы, но и от доли фракции волокон, способов их армирования. Применение гетерогенных материалов определяется в большей степени условиями эксплуатации и требованиями к физико-механическим характеристикам

будущей конструкции. Большой практический интерес представляют слоистые структуры, которые способны существенно повлиять на характер распределения нагрузок, что может повысить прочность и износостойкость изделий.

В этой статье предлагаются исследования об определении параметров эксплуатации футерованных труб из современных композиционных материалов согласно новой современной технологии так называемой CIPP «Cured-in-place pipe» по ремонту труб без проведения земляных работ. Эта технология достаточно проста и начала широко применяться во всем мире. Суть этой технологии заключается в том, что в поврежденный участок трубы вводится футеровка из волокнистых композитных материалов со смолой (пропитанная труба, изготовленная из стекловолокна, углеродного волокна или другого пропитанного смолой вещества), которая прикрепляется к трубе под действием давлений воды или

пара, и получается новая слоистая отремонтированная труба. Ключевым моментом этой технологии является расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) в сечении трубы с композитной футеровкой и нахождение допускаемой толщины покрытия, а также определение скорости волны при гидроударе. Некоторое теоретическое решение по расчету (НДС) футерованной трубы из композиционного материала представлено в [1], здесь также дана постановка линейной упругой задачи для ортотропных материалов, геометрические и граничные условия. Поэтому, ради краткости, постановку упругой задачи опускаем, а приведем окончательные дифференциальные уравнения и основные зависимости. Решение задачи о расчете НДС двухслойной ортотропной трубы, слою которой состоят из разных материалов, при действии внутреннего давления и нулевого наружного, представлено в случае плоского напряженного состояния.

### 1 Определение скорости волны жидкости при гидроударе для ортотропной слоистой трубы

Исследования, касающиеся определения скорости волны при течении жидкости по изотропной трубе, известны давно. Теоретическое обоснование теории удара для изотропных труб при течении жидкости принадлежат известным ученым Мариоту, Кортвегу и выдающемуся российскому учёному Н.Е. Жуковскому. [2]–[4]. Согласно их исследованиям величина скорости волны при гидроударе зависит от упругой деформации стенки трубы и деформационных и механических свойств жидкости, то есть является скоростью распространения упругих деформаций. Следовательно, для определения скорости волны при гидроударе нужно определить деформацию в сечении трубы при изменении давления, которая выражается через изменения скорости площади сечения [5]–[7]:

$$\frac{\dot{A}}{A} \approx 2\varepsilon_0|_{r=a},$$

где  $A$  – площадь в сечении трубы, точка над  $A$  обозначает производную по времени  $t$ .

Система уравнений для описания переходного движения сжимаемых жидкостей состоит из дифференциальных уравнений неразрывности и сохранения момента [5], [6]

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho VA)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial(V)}{\partial t} + \rho V \frac{\partial(V)}{\partial x} + \frac{\partial(P)}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Исходя из уравнений (1.1) и (1.2) и классических исследований, представленных в работах [2], [3], следует, что скорость распространения ударной волны определяется по формуле

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial P},$$

где  $P$  – давление внутри трубы;  $V$  – средняя скорость в направлении оси трубы;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\gamma$  – удельный вес жидкости;  $x$  – абсцисса оси трубы;  $c$  – скорость волны от избыточного давления, гидроудара;  $t$  – время;  $A$  – площадь поперечного сечения трубы.

Здесь первое слагаемое характеризует влияние упругих свойств (compressibility) жидкости в трубе на скорость волны, а второе – эффекта жесткости трубы на скорость волны.

Из анализа уравнения следуют два асимптотических случая. Для несжимаемой жидкости  $\frac{\partial \rho}{\partial P} = 0$ , а для сжимаемой жидкости и в жесткой

трубе имеем  $\frac{\partial A}{\partial P} = 0$ , соответственно, скорости

волны будут  $c^2 = \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}$ ,  $c^2 = \frac{\partial \rho}{\partial P}$ . Уравнение

(1.1) получается из выражения [7]

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

или, приняв  $\dot{A}/A \approx 2\varepsilon_0$  и заменив  $\dot{A}/A = P\Omega$ , где  $\Omega$  получаем из решения граничной задачи для слоистой трубы при определении деформации  $\varepsilon_0$  можно уравнения непрерывности записать как

$$\frac{P}{K} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

находим [7]

$$c = \sqrt{\frac{K/\rho}{1+K\Omega}}, \quad (1.3)$$

здесь  $K$  – объемный модуль упругости для жидкости.

Таким образом, исходя из литературных источников и выше приведенных зависимостей, следует, что при течении жидкости в двухслойной ортотропной трубе для нахождения скорости волны при гидроударе необходимо определить деформацию  $\varepsilon_0$ .

### 2 Напряженно-деформированное состояние двухслойной трубы из ортотропных материалов

Математическая постановка и решение задачи определения напряженного-деформированного состояния футерованных труб из ортотропных материалов представлено, например, в статье [1]. Для определения НДС слоистой конструкции трубы при действии давления внутри трубы представим краткое решение задачи расчета напряжений и деформаций в покрытии и в трубе из ортотропных материалов.

Пусть имеется цилиндрическая труба, однослойная и двухслойная, из ортотропных

материалов (внутренний радиус –  $r_a$ , внешний –  $r_c$ , межслойный радиус для двухслойной трубы –  $r_b$ ). Труба находится под действием внутреннего нагружения  $P$ , внешнее давление отсутствует. На рисунке 2.1, а также на рисунках в таблице 2.1 показана модель двухслойной трубы из ортотропных материалов с футеровкой (покрытием), которая может быть и трансверсально-изотропной.

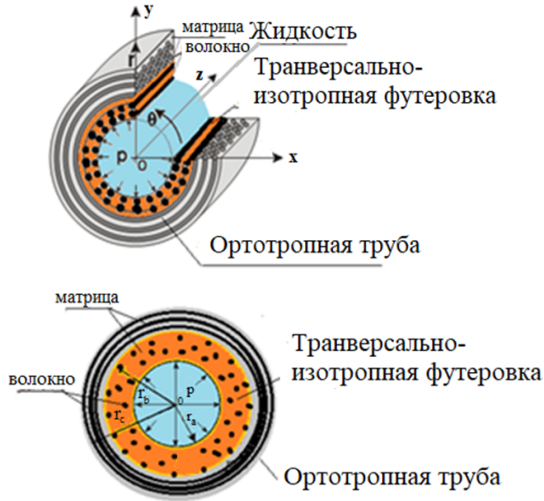


Рисунок 2.1 – Схема расчета двухслойной СТРП трубы

Определим НДС труб из ортотропных материалов. Выпишем основные уравнения, используемые в дальнейшем.

Для ортотропного тела с цилиндрической анизотропией уравнения обобщенного закона Гука (уравнения представлены в главных направлениях ортотропии волокнистого материала) имеют вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \quad \gamma_{\theta z} = a_{44}\tau_{\theta z}, \\ \epsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z, \quad \gamma_{rz} = a_{55}\tau_{rz}, \\ \epsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z, \quad \gamma_{r\theta} = a_{66}\tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$a_{ij}$  – упругие постоянные.

В других (технических) обозначениях уравнения (2.1) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{rz}}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z}, \\ \epsilon_\theta &= -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz}, \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_{zr}}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $E_r, E_\theta, E_z$  – модули Юнга для растяжения (сжатия) по направлениям  $r, \theta, z$  (совпадающим с главными направлениями упругости);  $\nu_{ij}$  – коэффициенты Пуассона, удовлетворяющие условиям:  $\nu_{z\theta}E_z = \nu_{\theta z}E_\theta$ ;  $\nu_{r\theta}E_r = \nu_{\theta r}E_r$ .

Для рассматриваемой задачи запишем уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

решается задача при следующих заданных граничных условиях:

- 1)  $\sigma_r^{(1)} = -p$ , при  $r = r_a$ ;
- 2)  $\sigma_r^{(2)} = 0$ , при  $r = r_c$ ;
- 3)  $\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}$ , при  $r = r_b$ ;
- 4)  $u^{(1)} = u^{(2)}$ , при  $r = r_b$ ;

где  $p$  – интенсивность нагрузки (давления) на внутренней части трубы;  $r_a, r_c$  – внутренний и внешний радиусы трубы;  $r_b$  – радиус границы слоёв трубы;  $\Lambda_1, \Lambda_2$  – области трубы и футеровки соответственно;  $\sigma_r^{(i)}$  и  $u^{(i)}$  – радиальное напряжение и перемещение (индекс  $i, i = 1, 2$  указывает на рассматриваемую область трубы  $\Lambda_i$ ).

В случае отсутствия массовых сил компоненты тензора напряжений для каждого слоя футерованной трубы должны удовлетворять уравнениям равновесия.

Компоненты напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta$  определяются через деформации  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_\theta$

$$\sigma_r = A_{11}\epsilon_r + A_{12}\epsilon_\theta,$$

$$\sigma_\theta = A_{12}\epsilon_r + A_{22}\epsilon_\theta,$$

или, используя соотношения Коши о связи напряжений с деформациями, имеем

$$\begin{cases} \sigma_r = A_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + A_{12} \frac{u}{r}, \\ \sigma_\theta = A_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + A_{22} \frac{u}{r}. \end{cases}$$

В случае плоского напряженного состояния технические постоянные для каждой  $i, i = 1, 2$  области слоистой трубы будут

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_r}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad A_{12} = \nu_{r\theta} \frac{E_\theta}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \\ A_{22} &= \frac{E_\theta}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение равновесия, получаем дифференциальное уравнение в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{A_{22}}{A_{11}} \frac{1}{r^2} u = 0,$$

решение которого ищем в виде

$$u^{(i)} = \begin{cases} C_1^{(i)} r^{k^{(i)}} + C_2^{(i)} r^{-k^{(i)}}, & m^{(i)} > 0, \\ C_1^{(i)} \sin(k^{(i)} \ln r) + C_2^{(i)} \cos(k^{(i)} \ln r), & m^{(i)} < 0, \\ C_1^{(i)} r + C_2^{(i)} r^{-1}, & m^{(i)} = 0, \end{cases}$$

где индекс  $i, i = 1, 2$  указывает на рассматриваемую область трубы  $\Lambda_i$ ,  $m^{(i)} = \frac{A_{22}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}}$ ,  $k^{(i)} = \sqrt{m^{(i)}}$ ,

$C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$  – неизвестные коэффициенты.

На основании формул получаем зависимость напряжений для каждой области  $D_i$

$$\sigma_r = kA_{11}(C_1r^{k-1} - C_2r^{-k-1}) + A_{12}(C_1r^{k-1} + C_2r^{-k-1}),$$

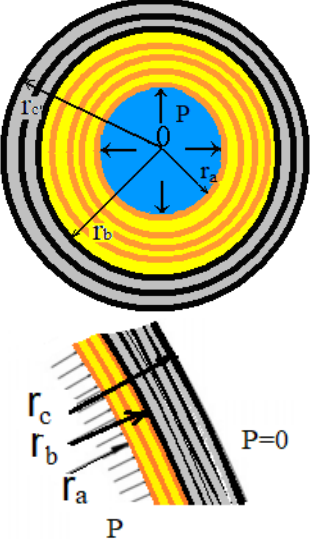
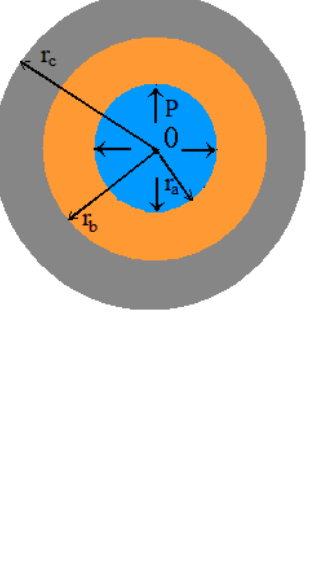
$$\sigma_\theta = kA_{12}(C_1r^{k-1} - C_2r^{-k-1}) + A_{22}(C_1r^{k-1} + C_2r^{-k-1})$$

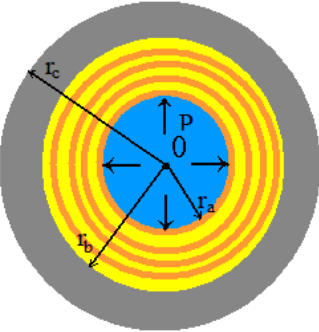
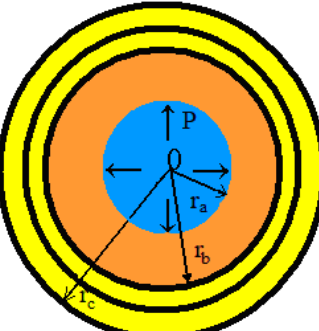
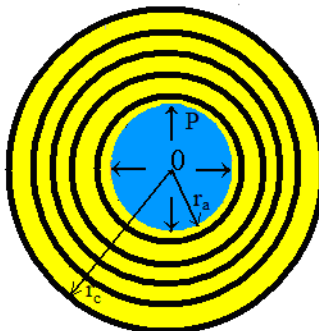
и затем находим деформацию  $\varepsilon_0 = \frac{u}{r}$ .

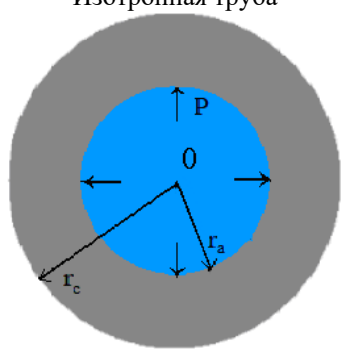
Подставив в формулу (1.3) значение  $\dot{A}/A = P/\Omega$ , получаем скорость волны при гидроударе в слоистой композитной трубе с движущейся жидкостью.

Для удобства создания алгоритма расчета ударной волны, при движении жидкости в слоистой композитной трубе, построена схема расчета различных комбинаций футеровки композитных труб, которая представлена в таблице 2.1. Верхние индексы «1» и «2» характеризуют материалы покрытия и трубы.

Таблица 2.1 – Значение функции  $\Omega$  для различных конструкций трубы

Конструкция трубы	Значение функции $\Omega$ , входящей в формулу для вычисления скорости волны при гидроударе (примеры расчета скорости волны)
<p>Ортотропная труба. Ортотропная футеровка</p> 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[ -1 + \left( -\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \times \right.$ $\left. \alpha \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \right]$ $\times \frac{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)},$ <p><math>\beta = A_{12}^{(1)} - k_1 A_{11}^{(1)}</math>, <math>\alpha = A_{11}^{(1)} k_1 + A_{12}^{(1)}</math>, <math>\gamma = A_{11}^{(2)} k_2 + A_{12}^{(2)}</math>, <math>g = A_{12}^{(2)} - k_2 A_{11}^{(2)}</math>.</p> <p>Труба: <math>E_0 = 167</math> ГПа; <math>E_r = 9,18</math> ГПа; <math>\nu_{0r} = 0,294</math>; <math>\nu_{r0} = 0,0162</math>;  <math>r_c = 0,156</math> м; <math>r_b = 0,15</math> м; толщина <math>r_c - r_b = 0,006</math> м.                  Покрытие: <math>E_0 = 80</math> ГПа; <math>E_r = 4,21</math> ГПа; <math>\nu_{0r} = 0,3</math>; <math>\nu_{r0} = 0,158</math>;  <math>r_b = 0,15</math> м; <math>r_a = 0,147</math> м, толщина <math>r_b - r_a = 0,003</math> м; <math>c = 1173</math> м/с.</p>
<p>Изотропная труба. Изотропная футеровка</p> 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[ -1 + \left( -\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \times \right.$ $\left. \alpha \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \right]$ $\times \frac{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)},$ <p><math>\gamma = \frac{E^{(2)}}{1 - \nu^{(2)}}</math>, <math>g = \frac{-E^{(2)}}{1 + \nu^{(2)}}</math>, <math>\beta = \frac{-E^{(1)}}{1 + \nu^{(1)}}</math>, <math>\alpha = \frac{E^{(1)}}{1 - \nu^{(1)}}</math>,</p> <p>где <math>E^{(2)}</math> и <math>\nu^{(2)}</math> – характеристики изотропной трубы, <math>E^{(1)}</math> и <math>\nu^{(1)}</math> – характеристики изотропной футеровки.</p> <p>Труба стальная: <math>E = 210</math> ГПа, <math>\nu = 0,3</math>; <math>r_c = 0,156</math> м; <math>r_b = 0,15</math> м; толщина <math>r_c - r_b = 0,006</math> м.                  Покрытие fiberglass reinforced: <math>E = 9</math> ГПа, <math>\nu = 0,22</math>; <math>r_b = 0,15</math> м; <math>r_a = 0,147</math> м; толщина <math>r_b - r_a = 0,003</math> м; <math>c = 1183,4</math> м/с.</p>

Конструкция трубы	Значение функции $\Omega$ , входящей в формулу для вычисления скорости волны при гидроударе (примеры расчета скорости волны)
<p>Изотропная труба. Ортогогротная футеровка</p> 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[ -1 + \left( -\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \times \right. \\ \left. \alpha \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)}$ $\beta = A_{12}^{(1)} - k_1 A_{11}^{(1)}, \alpha = A_{11}^{(1)} k_1 + A_{12}^{(1)}, \gamma = \frac{E}{1-\nu}, g = \frac{-E}{1+\nu},$ <p>где <math>E</math> и <math>\nu</math> – характеристики изотропной трубы, <math>k_1</math> – коэффициент для покрытия. Труба стальная: <math>E = 210</math> ГПа, <math>\nu = 0,3</math>; <math>r_c = 0,156</math> м; <math>r_b = 0,15</math> м; толщина <math>r_c - r_b = 0,006</math> м. Покрытие: <math>E_0 = 80</math> ГПа; <math>E_r = 4,21</math> ГПа; <math>\nu_{0r} = 0,3</math>; <math>\nu_{r0} = 0,158</math>; <math>r_b = 0,15</math> м; <math>r_a = 0,147</math> м, толщина <math>r_b - r_a = 0,003</math> м; <math>c = 1210</math> м/с.</p>
<p>Ортогогротная труба. Изотропная футеровка</p> 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[ -1 + \left( -\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \times \right. \\ \left. \alpha \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left( 1 - \left( \frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left( 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)}$ $\beta = \frac{-E}{1+\nu}, \alpha = \frac{E}{1-\nu}, \gamma = A_{11}^{(2)} k_2 + A_{12}^{(2)}, g = A_{12}^{(2)} - k_2 A_{11}^{(2)},$ <p>где <math>E</math> и <math>\nu</math> – характеристики изотропной футеровки. Труба: <math>E_0 = 167</math> ГПа; <math>E_r = 9,18</math> ГПа; <math>\nu_{0r} = 0,294</math>; <math>\nu_{r0} = 0,0162</math>; <math>r_c = 0,156</math> м; <math>r_b = 0,15</math> м; толщина <math>r_c - r_b = 0,006</math> м. Покрытие fiberglass reinforced: <math>E = 9</math> ГПа, <math>\nu = 0,22</math>; <math>r_b = 0,15</math> м; <math>r_a = 0,147</math> м; толщина <math>r_b - r_a = 0,003</math> м; <math>c = 1134</math> м/с.</p>
<p>Ортогогротная труба</p> 	$\Omega = \frac{-2}{1 - (r_c / r_a)^{2k}} \left( \frac{1}{A_{11}k + A_{12}} + \frac{(r_c / r_a)^{2k}}{A_{11}k - A_{12}} \right),$ <p><math>r_c</math> и <math>r_a</math> – внешний и внутренний радиусы трубы соответственно, <math>k = \sqrt{m} = \sqrt{A_{22} / A_{11}}</math>. Труба: <math>E_0 = 167</math> ГПа; <math>E_r = 9,18</math> ГПа; <math>\nu_{0r} = 0,294</math>; <math>\nu_{r0} = 0,0162</math>; <math>r_c = 0,156</math> м; <math>r_a = 0,15</math> м; толщина <math>r_c - r_a = 0,006</math> м; <math>c = 1133</math> м/с.</p>

Конструкция трубы	Значение функции $\Omega$ , входящей в формулу для вычисления скорости волны при гидроударе (примеры расчета скорости волны)
<p>Изотропная труба</p> 	$\Omega = \frac{2}{E} \left( \nu - \frac{1 + (r_c / r_a)^2}{1 - (r_c / r_a)^2} \right),$ $r_c$ и $r_a$ – внешний и внутренний радиусы трубы соответственно, $E$ и $\nu$ – характеристики изотропной трубы [7]. $\Omega = \lambda \frac{D}{Eh}$ для формулы Жуковского Н.Е., Korteweg D.J., $D$ – диаметр трубы, $E$ – модуль упругости, $h$ – толщина трубы, $\lambda$ – коэффициент, характеризующий условия закрепления и коэффициент Пуассона. Труба стальная: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$ ; $r_c = 0,156$ м; $r_a = 0,15$ м; толщина $r_c - r_a = 0,006$ м; $c = 1184$ м/с.

### 3 Примеры расчета скорости волны при гидроударе для слоистой трубы из композита

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния двухслойных композитных труб представлены на рисунке 3.1. Для сравнения и подтверждения правильности расчетов показаны значения напряжений, подсчитанные для изотропной двухслойной трубы ( $E_0 / E_r = 1$ ), и даны в сравнении с [7] (рисунок 3.1, б).

Коэффициенты обобщенного закона Гука определяются по зависимостям, в которых упругие характеристики материала определяются из [8] следующим образом, по правилу смесей:

$$E_r = E_m \frac{1 + \eta V}{1 - \eta V}, \quad E_0 = VE_f + (1 - V)E_m,$$

$$\nu_{r0} = V\nu_f + (1 - V)\nu_m, \quad \eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m},$$

$$G_{r0} = \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V) + G_m V}.$$

В формулах и далее  $E_f, G_f, \nu_f$  – технические постоянные волокна,  $E_m, G_m, \nu_m$  – технические постоянные матрицы,  $V$  – объемное содержание волокон.

В качестве примера для исследования о влиянии анизотропных свойств волокнистого материала футеровки рассмотрим расчет скорости волны при гидроударе для стальной изотропной трубы с модулем упругости  $E = 210$  ГПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ , считая, что модуль упругости футеровки (волокнистый стеклопластик) будет меняться: от  $E_0 = 9$  ГПа до 80 ГПа,  $\nu_{0r} = 0,22$ ;  $E_r = 9$  ГПа; внутреннее давление  $P = 0,9806$  МПа; плотность жидкости  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>; объемный модуль упругости жидкости  $K = 2140$  МПа (рисунок 3.1, а). Для сравнения полученных расчетов скорости волны при гидроударе с расчетами, приведенными в работе для изотропной футеровки [7], проведем расчет для стальной трубы со стеклонаполненной футеровкой, изменяя модули упругости от ортотропного

материала к изотропному. Размеры труб и толщины футеровки соответствуют работе [7] ( $\nu_{0r} = 0,3$ ;  $E_r = 14,804$  ГПа;  $E_0 = 14,804 - 296,08$  ГПа (рисунок 3.1, б). Для изотропного материала представленные расчеты совпадают с результатами работы [7] (рисунок 3.1, б, кривая 5). Анализ полученных результатов расчета на рисунке 3.1 показывает существенное влияние свойств анизотропии материала футеровки на изменения скорости волны при гидроударе в зависимости от толщины покрытия. Кроме того, существенно влияет на скорость волны и соотношения модулей упругости ортотропного материала.

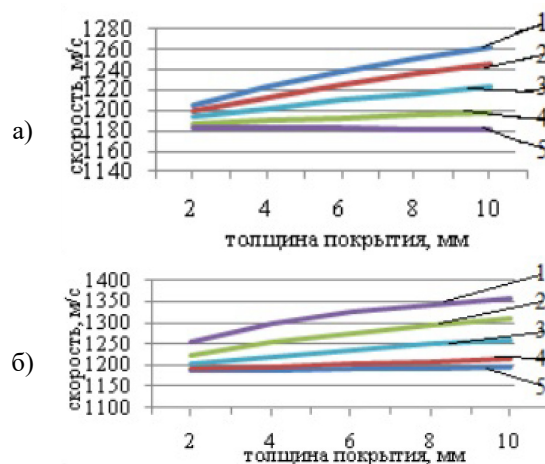


Рисунок 3.1 – Скорости волны при гидроударе для слоистых труб из композита при следующих отношениях модулей упругости  $E_0 / E_r$  :

- а) 1–8,8; 2–6,7; 3–4; 4–2,2; 5–1;
- б) 1–20; 2–10; 3–5; 4–2; 5–1.

На рисунках 3.2 и 3.3 показаны графики зависимостей напряжений  $\sigma_r$ , перемещений  $u_r$  и напряжений  $\sigma_0$  от  $r$  для двухслойной трубы с покрытием из изотропных материалов и двухслойной изотропной трубы с ортотропным покрытием соответственно.

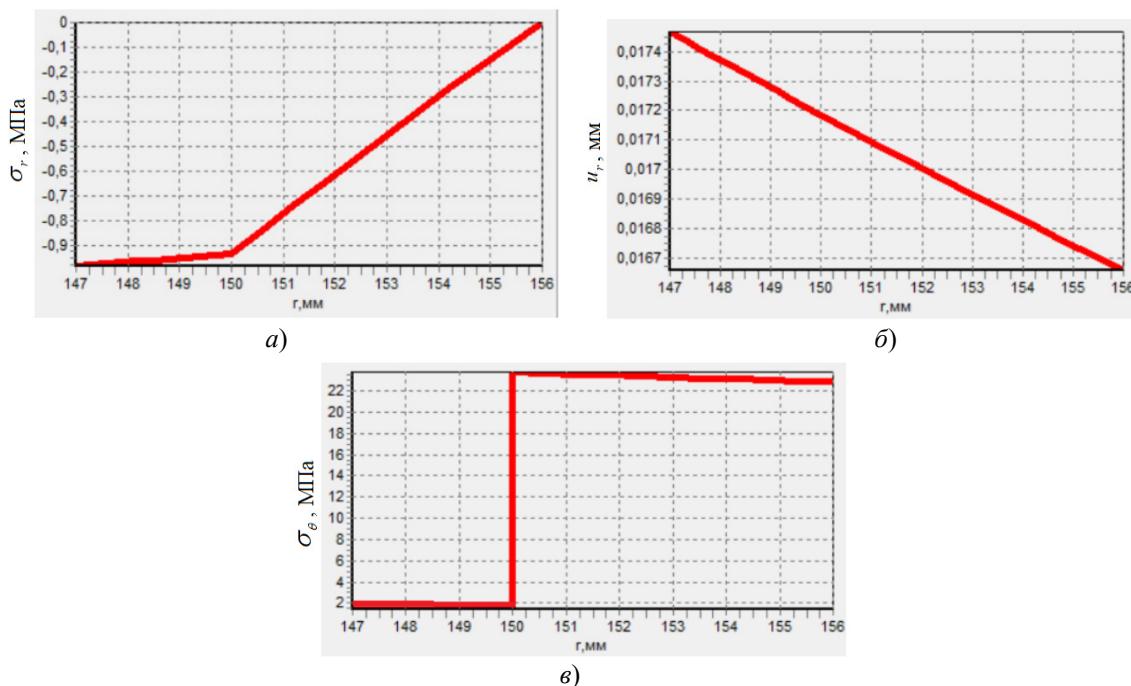


Рисунок 3.2 – Графики зависимостей:

а) напряжений  $\sigma_r$  от  $r$ ; б) перемещений  $u_r$  от  $r$ ;

в) напряжений  $\sigma_\theta$  от  $r$  для двухслойной трубы с покрытием из изотропных материалов (труба стальная:  $E = 210$  ГПа;  $\nu = 0,3$ ;  $r_c = 0,156$  м;  $r_b = 0,15$  м, толщина  $r_c - r_b = 0,006$  м; покрытие:  $\nu_{\theta r} = \nu_{r\theta} = 0,3$ ;  $E_r = E_\theta = 14,804$  ГПа,  $r_b = 0,15$  м,  $r_a = 0,147$  м, толщина  $r_b - r_a = 0,003$  м)

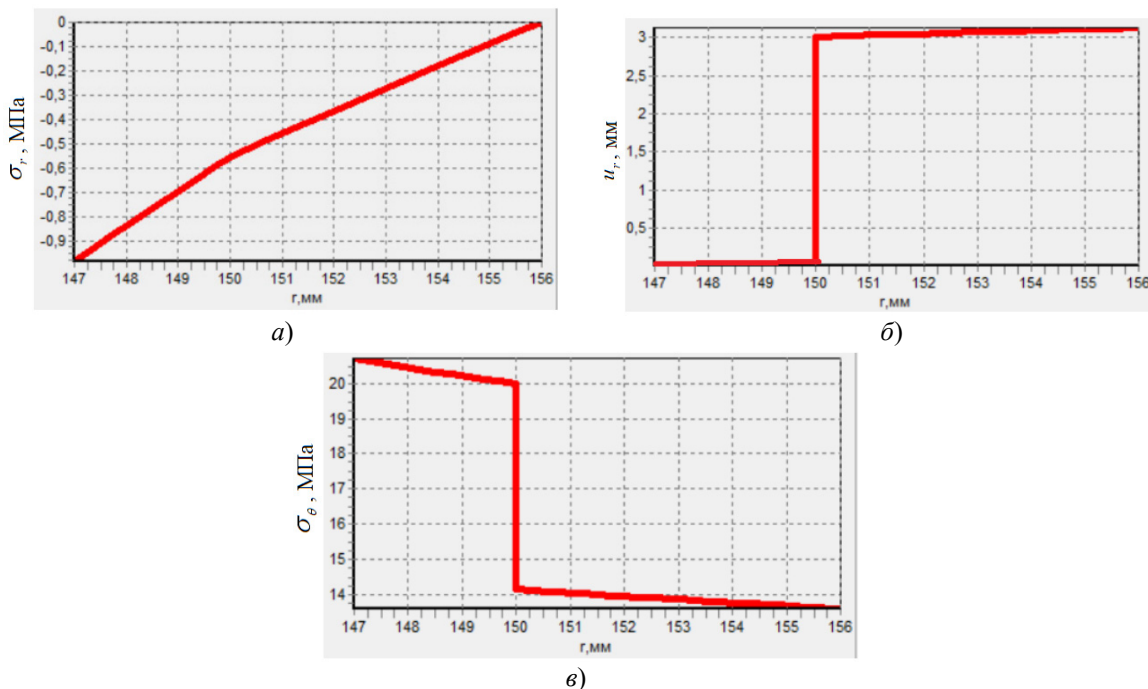


Рисунок 3.3 – Графики зависимостей:

а) напряжений  $\sigma_r$  от  $r$ ; б) перемещений  $u_r$  от  $r$ ;

в) напряжений  $\sigma_\theta$  от  $r$  для двухслойной изотропной трубы с ортотропным покрытием (труба стальная:  $E = 210$  ГПа;  $\nu = 0,3$ ;  $r_c = 0,156$  м;  $r_b = 0,15$  м, толщина  $r_c - r_b = 0,006$  м; покрытие:  $E_\theta = 296,08$  ГПа;  $E_r = 14,804$  ГПа;  $\nu_{\theta r} = 0,3$ ;  $\nu_{r\theta} = 0,015$ ;  $r_b = 0,15$  м,  $r_a = 0,147$  м, толщина  $r_b - r_a = 0,003$  м)

### Заключение

В статье представлена методика расчета скорости волны при гидроударе при течении жидкости в трубах из волокнистых композитов с футеровкой. Математическая модель расчета базируется на решении краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии ортотропной слоистой трубы и на классических подходах о расчете скорости волны при гидроударе при движении жидкости в металлической трубе. Классические результаты получаются как частный случай расчета поставленной задачи при равенстве модулей упругости для ортотропного материала. Представленные формулы для упругих труб являются точными для тонких и толстых, но они могут лишь приближенно определять искомые параметры для армированных труб с намоткой. Когда напряжение преобразуем из главных направлений в направления нагружения, мы делаем поворот на угол  $\theta$  около оси  $z$ . Элементы, модули упругости, входящие в физические уравнения, записываются через некоторый угол в направлении нагружения [8]. Представленные решения рассматриваемых задач легко преобразуются в решения для случая расчета для плоской деформации при замене упругих физических постоянных – модулей упругости и коэффициентов Пуассона [8], [9]. В заключении отметим, что данная методика апробировалась при расчете изотропных труб численными методами [7] и в дальнейшем осталось проверить её экспериментально.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Марьин, С.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистой трубы из ортотропных материалов / С.А. Марьин, В.В. Можаровский // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 16–21.

2. *Korteweg, D.J.* Über die fortpflanzungsgeschwindigkeit des schalles in elastischen rohren / D.J. Korteweg // *Ann. Phys. Chemie.* – 1878. – Vol. 5–12. – P. 525–542.

3. *Joukowski, N. E.* Memoirs of the Imperial Academy Society of St. Petersburg / N.E. Joukowski // *Proc. Amer. Water Works Assoc.* – 1898. – Vol. 9, № 5. – P. 341–424.

4. *Жуковский, Н.Е.* Об гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский; Госиздат технико-теоретической литературы. – Москва – Ленинград, 1949. – С. 525–542.

5. *Lighthill, J.* Waves in Fluids / J. Lighthill. – Cambridge University Press, 1978.

6. *Joseph, E.* Shock Loading and Failure of Fluid-Filled Tubular Structures / E. Joseph, Shepherd and Kazuaki Inaba // *Materials and structures.* – 2010. – Charter 6. – P. 153–190.

7. *Wave celerity in hydraulic transients computation for cipp-rehabilitated pipes* / F. Evangelista [et al.] // *Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas.* – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 326–340.

8. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов: плоские контактные задачи / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 271 с.

9. *Heracovich, C.T.* Mechanics of Fibrous Composites. – University of Virginia, New York, 1998. – 480 p.

Поступила в редакцию 10.03.2022.

### Информация об авторах

*Можаровский Валентин Васильевич* – д.т.н., профессор  
*Киргинцева Светлана Викторовна* – ассистент