МАТЕМАТИКА

УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76
EDN: WQAZZC

О ПАРАХ ЛОКЕТТА И ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА ДЛЯ σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е.Д. Ланцетова

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова

ON LOCKETT PAIRS AND LOCKETT CONJECTURE FOR σ-LOCAL FITTING CLASSES

E.D. Lantsetova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Аннотация. Для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт определил наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп *G* и *H*, и класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех непустых классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Парой Локетта непустых классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют такую упорядоченную пару $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$, для которой справедливо равенство $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*$. Если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. В настоящей работе в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп описаны методы построения пар Локетта для случая, когда $\mathfrak{F}$ обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, для $\mathfrak{F}$ подтверждена гипотеза Локетта.

Ключевые слова: *σ-локальный класс Фиттинга*, *пара Локетта*, *гипотеза Локетта*.

Для цитирования: *Ланцетова*, *Е.Д.* О парах Локетта и гипотезе Локетта для σ-локальных классов Фиттинга / Е.Д. Ланцетова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 76–82. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76 – EDN: WQAZZC

Abstract. For each nonempty Fitting class $\mathfrak{F}$, Lockett defined the smallest Fitting class $\mathfrak{F}^*$ containing $\mathfrak{F}$ such that $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ for all groups *G* and *H* and the Fitting class $\mathfrak{F}_*$ as the intersection of all nonempty Fitting classes $\mathfrak{X}$ for which $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Lockett pair of nonempty Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is an ordered pair $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ such that $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*$. If $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{F}$ is a Lockett class, then $\mathfrak{F}$ is said to satisfy Lockett conjecture in $\mathfrak{H}$. In the present paper, in the universe $\mathfrak{S}$ of all finite soluble groups, the methods for constructing Lockett pairs are described for the case when $\mathfrak{F}$ is a generalized local Fitting class, and, in particular, for $\mathfrak{F}$ confirmed Lockett conjecture.

Keywords: σ-*local Fitting class*, *Lockett pair*, *Lockett conjecture*.

For citation: *Lantsetova*, *E.D.* On Lockett pairs and Lockett conjecture for σ-local Fitting classes / E.D. Lantsetova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 76–82. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76 (in Russian). – EDN: WQAZZC

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными и разрешимыми. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. *Классом групп* называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой *G* и все группы изоморфные *G*. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе *G* существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют $\mathfrak{F}$*-радикалом G* и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

В теории конечных разрешимых групп многие известные результаты посвящены исследованию структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп при помощи операторов «*» и «$_*$», которые были определены Локеттом [2]. Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор «*» сопоставляет наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп *G* и *H* и оператор «$_*$», сопоставляющий $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*=\cap\{\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*\}$. Если $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта*.

Возможность применения операторов Локетта для изучения строения классов Фиттинга в терминах радикалов обусловлена следующими обстоятельствами. Во-первых, семейство классов Локетта обширно, поскольку любой класс Фиттинга, замкнутый относительно гомоморфных образов или относительно подпрямых произведений, и любой класс Фишера [1, теорема X.1.25] являются классами Локетта. Во-вторых, Локеттом [2] была сформулирована следующая проблема, известная в теории классов групп под названием

Гипотеза Локетта [2, проблема стр. 135]. *Верно ли, что для каждого класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *существует нормальный класс Фиттинга* $\mathfrak{X}$ *такой, что* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$?

Напомним, что непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным*, если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называют *наследсвенным*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия подгрупп. Брайс и Косси [3] доказали справедливость гипотезы Локетта для всех локальных наследственных классов Фиттинга и установили, что любой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга.

Развитие и обобщение указанных результатов [3, раздел 5] привело к определению понятия пары Локетта.

Упорядоченная пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется *парой Локетта* или просто *L-парой*, если справедливо равенство

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*.$$

Заметим что, если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – L-пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта, т. е. гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. В частности, если $\mathfrak{H}$ – класс всех разрешимых групп, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – L-пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта.

Брайсом и Косси [3], [1, теорема X.6.12] было установлено, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – локальные наследственные классы Фиттинга, то $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – L-пара. Построению L-пар для случая, когда $\mathfrak{F}$ – локальный класс вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ или $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ ($\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс Фиттинга) и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно $\mathfrak{F}$-инъекторов специального вида, была посвящена работа Бейдлемана и Хаука [4], [1, теоремы X.6.8 и X.6.11]. Кроме того, Бризоном [5] было доказано, что классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ образуют L-пару и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга всех π-групп и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно холловых π-подгрупп. Дёрком и Хоуксом [1] было показано, что $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L-парой в случае, когда $\mathfrak{F}$ либо локальный наследственный класс Фиттинга, либо класс Фиттинга, определяемый локально функцией, все значения которой постоянны, и $\mathfrak{H}$ – локальный наследственный класс Фиттинга. Прогресс в данном направлении исследований был достигнут в работе Н.Т. Воробьева [6], где была подтверждена гипотеза Локетта для произвольного локального класса Фиттинга при помощи построения L-пары для случая, когда класс Фитинга $\mathfrak{F}$ локален и класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ f-инъекторно замкнут (f – функция, определяющая локально $\mathfrak{F}$). Заметим также, что в универсуме $\mathfrak{S}^\pi$ всех π-разрешимых групп в работе [7] были построены L-пары для локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{H}$, состоящего из всех групп таких, холловы π-подгруппы которых нильпотентны.

Все это приводит к *задаче нахождения новых семейств классов Фиттинга, специальным случаем которых является семейство локальных классов Фиттинга, для которых упорядоченная пара* $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *является L-парой, в частности, описания классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$, *для которых* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

В настоящей работе такая задача решена для случая σ-локальных классов Фиттинга. Ориентиром для таких исследований является σ-метод, предложенный Скибой [8], для изучения строения групп и формаций [9]–[11], который был дуализирован для классов Фиттинга в работе [12] и состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G. Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ – класс групп, то символом $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают множество

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \cup\{\sigma(G) : G \in \mathfrak{F}\}.$$

Всякое отображение вида $f : \sigma \to$ {*классы Фиттинга*} называется σ-*функцией Хартли* или просто H_σ-*функцией*. Если f – H_σ-функция, то символом *Supp*(f) обозначают носитель f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно, символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$-корадикал группы G – наименьшая нормальная подгруппа G, факторгруппа по которой σ_i-замкнута.

Определение [12]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется σ-*локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции *f*. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$, то $\mathfrak{F}$ называют *локальным* классом Фиттинга.

1 Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Напомним, что наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу группы G называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G и обозначают $G_\mathfrak{F}$. *Произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *классов групп* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс $(G : \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F})$; *произведением* $\mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс $(G : G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$ [1, стр. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12 (a), (c)].

***Лемма* 1.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга. Тогда*

1) $(G/G_\mathfrak{F})_\mathfrak{H} = G_{\mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}}/G_\mathfrak{F}$ [1, теорема IX.1.12 (b)];

2) *если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $G_\mathfrak{F} \le G_\mathfrak{H}$.

Класс Фиттинга, замкнутый относительно гомоморфных образов, называют *радикальным гомоморфом*. Радикальный гомоморф, являющийся замкнутым относительно подпрямых произведений, называют *радикальной* или *фиттинговой формацией*.

***Лемма* 1.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$ [1, замечание IX.1.11];

2) *если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ *– радикальный гомоморф*, *то* $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$ [4, лемма 5];

3) *если* $\{\mathfrak{H}_i : i \in I\}$ *– множество классов Фиттинга*, *то* $\cap_{i\in I}(\mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}_i) = \mathfrak{F}\Diamond(\cap_{i\in I}\mathfrak{H}_i)$ [6, лемма 4 (2)].

Мы будем использовать следующие свойства операторов Локетта, которые представляет

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга*. *Тогда*

1) $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп [1, теорема X.1.15];

2) *если* $\mathfrak{H}$ *– непустой класс Фиттинга и* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{F}^*$ *и* $\mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}_*$ [3, лемма 3.4, следствие 3.5].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором* группы G, если $V \cap N$ является максимальной подгруппой группы N среди подгрупп, входящих в $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G.

***Лемма* 1.4** [13, теорема 1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга. Тогда в группе G существуют* $\mathfrak{F}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$, $K \le H \le G$ и H/K – *p*-группа (*p* – простое число), следует $H \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.5** [14, теорема 4.4]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фишера. Тогда* $\mathfrak{S}_*$ *замкнут относительно взятия* $\mathfrak{F}$*-инъекторов.*

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Обозначим через $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ класс групп, который определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-инъектор группы G принадлежит $\mathfrak{H}$.

***Лемма* 1.6** [1, теорема IX.2.3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга и* $\pi \subseteq \mathbb{P}$. *Тогда* $(\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi) \uparrow (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_{\pi'})$ *– класс Фиттинга.*

Операция замыкания D_0 для класса групп $\mathfrak{X}$ определяется как

$D_0(\mathfrak{X}) = (G : G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_r$, где $H_i \in \mathfrak{X})$.

***Лемма* 1.7** [1, лемма X.1.36]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга такие*, *что* $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ *также является классом Фиттинга*, *и класс* $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$ *является* D_0*-замкнутым. Тогда* $(\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$, *в частности*, $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$ *– класс Локетта.*

Мы будем использовать следующую классификацию H_σ-функций σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ [12]. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для H_σ-функции *f* и $\Pi = Supp(f)$. Тогда H_σ-функция *f* называется:

1) *приведенной*, если $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;

2) *полной* в случае, когда $f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;

3) *полной приведенной*, если *f* является одновременно полной и приведенной H_σ-функцией.

***Лемма* 1.8** [12, лемма 3.2]. *Каждый* σ-*локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *определяется полной приведенной* H_σ*-функцией.*

***Лемма* 1.9.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *каждый* σ-*локальный класс Фиттинга является классом Фишера* [12, лемма 3.3 (2)];

2) *каждый σ-локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *является классом Локетта* [12, следствие 3.4].

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений.

***Лемма* 1.10** [15, теорема 1.1]. *Любой наследственный класс Фиттинга является формацией.*

2 Основные результаты

Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции *f* и $\Pi = Supp(f)$. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем *f-инъекторно замкнутым*, если $\mathfrak{H} \subseteq f(\sigma_i) \uparrow \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$.

Случаи *f*-инъекторной замкнутости класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ представляют следующие

***Примеры* 2.1.** Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где f – приведенная H_σ-функция и $\Pi = Supp(f)$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ является *f*-инъекторно замкнутым в каждом из следующих случаев:

1) $f(\sigma_i)$ – наследственный класс Фиттинга для всех $\sigma_i \in \Pi$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга;

2) $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, причем $\mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathfrak{Y}$ – наследственный класс Фиттинга;

3) $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ или $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$;

4) $f(\sigma_i)$ – нормальный класс Фиттинга для всех $\sigma_i \in \Pi$, $\mathfrak{H}$ – произвольный класс Фиттинга;

5) $\mathfrak{H}$ – наследственный класс Фиттинга.

Поскольку в случае 1) $f(\sigma_i)$ – наследственный класс Фиттинга, $f(\sigma_i)$ является классом Фишера для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, по лемме 1.5 класс $\mathfrak{H} \subseteq f(\sigma_i) \uparrow \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathfrak{H}$ – *f*-инъекторно замкнутый класс Фиттинга.

Проверим *f*-инъекторную замкнутость класса $\mathfrak{H}$ в случае 2). Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда ввиду разрешимости группы *G* по лемме 1.4 в *G* существует $f(\sigma_i)$-инъектор V для $\sigma_i \in \Pi$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$, то по утверждению 2) леммы 1.1 $G_\mathfrak{X} \le G_{f(\sigma_i)}$ и по определению $f(\sigma_i)$-инъектора $G_{f(\sigma_i)} \le V$. Поскольку $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, $G / G_\mathfrak{X} \in \mathfrak{Y}$. Ввиду того, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ наследственен и $V / G_\mathfrak{X} \le G / G_\mathfrak{X}$, $V / G_\mathfrak{X} \in \mathfrak{Y}$. Так как $G_\mathfrak{X} \trianglelefteq V$, $G_\mathfrak{X} \le V$. Следовательно, $V / G_\mathfrak{X} / V_\mathfrak{X} / G_\mathfrak{X} \cong V / V_\mathfrak{X}$. Отсюда $V / V_\mathfrak{X} \in \mathfrak{Y}$, поскольку по лемме 1.10 класс $\mathfrak{Y}$ – формация. Таким образом, $V \in \mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ и класс $\mathfrak{H}$ *f*-инъекторно замкнут.

В случае 3) если $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, класс $\mathfrak{H}$ *f*-инъекторно замкнут ввиду того, что каждый $f(\sigma_i)$-инъектор группы $G \in \mathfrak{H}$ является $f(\sigma_i)$-подгруппой и, следовательно, $\mathfrak{H}$-подгруппой. Если же $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$, поскольку H_σ-функция f класса $\mathfrak{F}$ приведенная и $\mathfrak{H}$ *f*-инъекторно замкнут по указанному выше.

Напомним, что класс $\mathfrak{X}$ называют *нормальным* [16], если для любой группы *G* ее $\mathfrak{X}$-инъектор является нормальной подгруппой *G*. Поэтому если $G \in \mathfrak{H}$ и V $f(\sigma_i)$-инъектор *G*, то $V \in \mathfrak{H}$ и в случае 4) класс $\mathfrak{H}$ *f*-инъекторно замкнут.

Случай 5) тривиален.

Следующая теорема описывает построения *L*-пар для случая, когда $\mathfrak{F}$ – σ-локальный класс Фиттинга.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F)$ – *σ-локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной* H_σ*-функцией F и* $\mathfrak{H}$ – *класс Фиттинга. Если* $\mathfrak{H}$ – *F-инъекторно замкнутый класс, то* $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ *является L-парой.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, то по утверждению 2) леммы 1.3 $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{H}_*$. Кроме того, по утверждению 1) леммы 1.3

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$.

Докажем обратное включение. Пусть *G* – группа из $\mathfrak{H}$. По лемме 1.4 в *G* существует $F(\sigma_i)$-инъектор V, где $\sigma_i \in Supp(F) = \Pi$. Из того, что $V \in F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ и F – приведенная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, вытекает $V \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$.

Докажем справедливость равенства

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i'})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i'}.$$

Вначале покажем, что

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i'})^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i'}.$$

Если $G \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i'}$, то ввиду утверждения 2) леммы 1.2 следует $G \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i'}$. Следовательно, $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i'} \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ и по утверждению 2) леммы 1.3

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i'})^* \subseteq (((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$

Так как класс Фиттинга $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ – локален, то по утверждению 2) леммы 1.9 $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ является классом Локетта. Кроме того, ввиду утверждения 1) леммы 1.3 $(((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*)^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$ и поэтому $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$ также является классом Локетта. Используя утверждение 1) леммы 1.1 и тот факт, что $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$ и $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ – классы Локетта, получаем следующую цепочку равенств:

$$((G\times H)_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}/(G\times H)_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}=$$
$$=(G/G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}\times H/H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*})_{\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}=$$
$$=(G/G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*})_{\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}\times(H/H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*})_{\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}=$$
$$=G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}/G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}\times H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}/H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}=$$
$$=G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}\times H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}/G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}\times H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}=$$
$$=G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}\times H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}/(G\times H)_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}.$$

Значит,
$$(G\times H)_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}=G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}\times H_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}}$$
для всех групп G и H. Следовательно,
$$((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}=(((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*$$
– класс Локетта и справедливо включение
$$((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*\subseteq((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}.$$

Докажем обратное включение. Пусть G – группа минимального порядка из класса
$$((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}\setminus((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$
По утверждению 2) леммы 1.1 $G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}\le G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}$. Если $G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}$ – нефраттиниевый фактор группы $G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}$, то в ней существует такая максимальная подгруппа $M/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}$, что
$$G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}=(G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*})(M/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}).$$
По утверждению 1) леммы 1.3
$$G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}\le Z(G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*})$$
и, следовательно, $M/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}$ – нормальная подгруппа группы $G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}$. По индукции $M\in((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*$. Поскольку
$$((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\subseteq((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*,$$
$$G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}\in((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$
Следовательно, $G=G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}M\in((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*$, что невозможно.

Пусть $G_{((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*}/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}\subseteq\Phi(G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*})$. Из того, что $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ – насыщенная формация и
$$G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}/\Phi(G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*})\in\mathfrak{S}_{\sigma_i'},$$
следует $G/G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*}\in\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ и $G\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$. Применяя утверждение 1) леммы 1.3, имеем
$$G\in((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$
Полученное противоречие завершает доказательство равенства: $((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*=((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*)^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$.

Далее, используя утверждение 1) леммы 1.3 и утверждение 1) леммы 1.2, получаем
$$\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}\subseteq(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}.$$
Следовательно, $V\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})^*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ и поэтому
$$G\in F(\sigma_i)\uparrow((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$
Итак, справедливо включение
$$\mathfrak{H}\subseteq F(\sigma_i)\uparrow((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$

Так как H_σ-функция является полной, то по лемме 1.6 класс групп $F(\sigma_i)\uparrow((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*$ является классом Фиттинга. Более того, по лемме 1.7 имеет место равенство:
$$F(\sigma_i)\uparrow((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*=(F(\sigma_i)\uparrow(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*.$$
Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.3
$$\mathfrak{H}_*\subseteq((F(\sigma_i)\uparrow(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})^*)_*=$$
$$=(F(\sigma_i)\uparrow(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})_*$$
и имеет место включение
$$(F(\sigma_i)\uparrow(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'})_*\subseteq F(\sigma_i)\uparrow(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}.$$
Итак, нами установлено включение
$$\mathfrak{H}_*\subseteq F(\sigma_i)\uparrow(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$$
для всех $\sigma_i\in\Pi$. Следовательно, для каждого $\sigma_i\in\Pi$ имеет место $F(\sigma_i)\cap\mathfrak{H}_*\subseteq(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$. Используя утверждение 2) леммы 1.2 и ассоциативный закон умножения классов Фиттинга, получаем $(F(\sigma_i)\cap\mathfrak{H}_*)\mathfrak{S}_{\sigma_i'}\subseteq(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$. Значит,
$$\mathfrak{S}_\Pi\cap(\cap_{\sigma_i\in\Pi}(F(\sigma_i)\cap\mathfrak{H}_*)\mathfrak{S}_{\sigma_i'})\subseteq$$
$$\subseteq\mathfrak{S}_\Pi\cap(\cap_{\sigma_i\in\Pi}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}).$$
Ввиду того, что F – полная H_σ-функция, определяющая класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, следует
$$\mathfrak{S}_\Pi\cap(\cap_{\sigma_i\in\Pi}(F(\sigma_i)\cap\mathfrak{H}_*)\mathfrak{S}_{\sigma_i'})=$$
$$=\mathfrak{S}_\Pi\cap(\cap_{\sigma_i\in\Pi}F(\sigma_i)\mathfrak{S}_{\sigma_i'})\cap(\cap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}=$$
$$=\mathfrak{F}\cap(\cap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\sigma_i'}).$$
Тогда, используя утверждение 3) леммы 1.2
$$\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*(\cap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{S}_{\sigma_i'})\subseteq\mathfrak{S}_\Pi\cap(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*(\cap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{S}_{\sigma_i'}).$$
Следовательно,
$$\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\Pi'}\subseteq\mathfrak{S}_\Pi\cap(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\Pi'}.$$
Так как по утверждению 1) леммы 1.2 $\mathfrak{H}_*\subseteq\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\Pi'}$, то $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*\subseteq\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{\Pi'}$. Кроме того, очевидно, $\mathfrak{S}_\Pi\cap(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\Pi'}=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*$. Следовательно, $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*\subseteq(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*$ и справедливо равенство $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*$, т. е. $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ является *L*-парой. □

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F}=LR_\sigma(F)$ *– σ-локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной* H_σ*-функцией F и* $\mathfrak{H}$ *– класс Фиттинга. Тогда если* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$, то ввиду случая 3) из примеров 2.1 класс $\mathfrak{H}$ *F*-инъекторно замкнут. По теореме 2.2 справедливо равенство $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}_*$. Поскольку по утверждению 2) леммы 1.9 $\mathfrak{F}$ является классом Локетта, $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{H}_*$ и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. □

3 Следствия

Из теорем 2.2 и 2.3 получаем следующие следствия.

***Следствие* 3.1.** *Любой σ-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, т. е.* $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$.

Доказательство утверждения вытекает непосредственно из теоремы 2.3 в случае, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$.

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем

***Следствие* 3.2** (Воробьев [6, теорема]). *Если F – полная приведенная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – F-инъекторно замкнутый класс Фиттинга, то пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L-парой. В частности, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

***Следствие* 3.3** (Брайс, Косси [3, теорема 4.17]). *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – локальные наследственные классы Фиттинга, то пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L-парой. В частности, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

***Следствие* 3.4** (Бризон [5, предложение 6.5]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{S}_\pi$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Поскольку класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ определяется локально H-функцией F такой, что

$$F(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

и $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, класс $\mathfrak{F}$ F-инъекторно замкнут (см. пример 2.1.3). Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{F}$ для минимального разбиения σ множества $\mathbb{P}$.

***Следствие* 3.5** (Дерк, Хоукс [1, предложение X.6.10]). *Пусть I – множество индексов и каждому $i \in I$ соответствует некоторое множество простых чисел π_i и класс Фиттинга $\mathfrak{X}_i$. Пусть I – бесконечное множество такое, что для каждого конечного подмножества τ класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\tau$ содержится в конечном числе классов $\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'}$. Тогда если $\mathfrak{H}$ – локальный наследственный класс Фиттинга и для любого $i \in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{X}_i$ либо наследственен, либо $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}$ для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то пара классов Фиттинга $(\cap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'}, \mathfrak{H})$ является L-парой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \cap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'}$ и $\mathfrak{X}_i$ – наследственный класс Фиттинга для всех $i \in I$. Легко видеть, что произведение наследственных классов $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{S}_{\pi_i}$ и $\mathfrak{S}_{\pi_i'}$ – наследственный класс Фиттинга и поэтому $\mathfrak{M}$ – наследственный класс Фиттинга. Следовательно, по теореме [17] класс $\mathfrak{M}$ локален. Так как класс $\mathfrak{H}$ наследственен, то по следствию 1 [18] $\mathfrak{H}$ F-инъекторно замкнут для H-функции F такой, что $F(p) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'} \cap (\cap_{j \neq i} \mathfrak{X}_j \mathfrak{S}_{\pi_j})$ для $p \in \pi_i$.

Если $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}$ для всех $i \in I$, то по следствию 2 [18] класс $\mathfrak{M}$ локален и $\mathfrak{H}$ F-инъекторно замкнут для H-функции F такой, что $F(p) = \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi_i}$ для $p \in \pi_i$. Таким образом, в каждом случае по теореме 2.2 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ – L-пара. □

***Следствие* 3.6** (Дерк, Хоукс [1, следствие X.6.11]). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – наследственный. Тогда пара $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ является L-парой, где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп. В частности, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.2 при минимальном разбиении σ множества $\mathbb{P}$, поскольку класс $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ – локальный, определяемый H-функцией F такой, что $F(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$ и класс $\mathfrak{H}$ F-инъекторно замкнут.

Заключение

В настоящей работе в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп описаны методы построения пар Локетта для случая, когда $\mathfrak{F}$ обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, для $\mathfrak{F}$ подтверждена гипотеза Локетта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. *Lockett*, *F.P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – P. 131–136.

3. *Bryce*, *R.A.* A problem in the Theory of Normal Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141. – P. 99–110.

4. *Beidleman*, *J.C.* Über Fittingklassen und die Lockett – Vermuntung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – P. 161–167.

5. *Brison*, *O.J.* Hall operators for Fitting classes / O.J. Brison // Arch. Math. (Basel). – 1979. – Vol. 33, № 1. – P. 1–9.

6. *Воробьев*, *Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

7. *Lujin Zhu*. On Lockett Pairs and Lockett Conjecture for π-Soluble Fitting Classes / Lujin Zhu, Nanying Yang, N.T. Vorob'ev // Bull. Malays. Sci. Soc. (2). – 2013. – Vol. 36, № 3. – P. 825–832.

8. *Skiba*, *A.N.* On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.

9. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.

10. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble PσT-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

11. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

12. *Guo*, *W.* On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

13. *Fischer*, *B*. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.

14. *Hauck*, *P.* Eine Benerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck // J.Algebra. – 1979. – Vol. 53, № 3. – P. 395–401.

15. *Bryce*, *R.A*. Subgroup closed Fitting classes are formations / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1982. – Vol. 91, № 2. – P. 225–258.

16. *Blessenohl*, *D*. Uber normale Schunk-und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Vol. 118. – P. 1–8.

17. *Воробьев*, *Н.Т.* Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1992. – Т. 51, № 3. – С. 3–8.

18. *Hauck*, *P.* A characterization of dominant local Fitting classes / P. Hauck, V.N. Zahursky // J. Algebra. – 2012. – Vol. 358. – P. 27–32.

Поступила в редакцию 03.02.2022.

Информация об авторах

Ланцетова Екатерина Дмитриевна – аспирантка