МАТЕМАТИКА

УДК 517.9 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_68
EDN: UQMBEZ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Е.В. Кузьмина

Брестский государственный технический университет
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE SECOND EQUATION OF THE RICKATI HIERARCHY

E.V. Kuzmina

Brest State Technical University
Brest State A.S. Pushkin University

Аннотация. В данной работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка иерархии Риккати. Понятие обобщенного решения для такого уравнения не может быть введено в рамках классической теории обобщенных функций ввиду того, что не определено произведение обобщенных функций. Для введения понятия обобщенного решения рассмотрен подход, при котором построение обобщенного решения второго уравнения иерархии Риккати осуществляется с помощью аппроксимации решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями. Общее количество обобщенных решений зависит от начальных условий задачи Коши, а их вид зависит от расположения полюсов аппроксимирующих решений.

Ключевые слова: *обобщенная функция*, *обобщенное решение нелинейного дифференциального уравнения*, *свойство Пенлеве*.

Для цитирования: *Кузьмина*, *Е.В.* Обобщенные решения второго уравнения иерархии Риккати / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 68–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_68 – EDN: UQMBEZ

Abstract. A nonlinear differential equation of the second order of the Riccati hierarchy is considered. The concept of a generalized solution for such an equation cannot be introduced in the classical theory of generalized functions because the product of generalized functions is not defined. To introduce the concept of a generalized solution, an approach is considered in which the construction of a generalized solution of the second equation of the Riccati hierarchy is carried out using approximation by solutions of the Cauchy problem with complex initial conditions. The total number of generalized solutions depends on the initial conditions of the Cauchy problem, and their form depends on the location of the poles of the approximating solutions.

Keywords: *generalized function*, *generalized solution of a nonlinear differential equation*, *Painleve property.*

For citation: *Kuzmina*, *E.V.* Generalized solutions of the second equation of the Rickati hierarchy / E.V. Kuzmina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 68–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_68 (in Russian). – EDN: UQMBEZ

Введение

Дифференциальное уравнение вида

$$w^{(n)}(z) = R\left(z, w, w', ..., w^{(n-1)}\right) \qquad (0.1)$$

можно рассматривать на комплексной плоскости и на вещественной прямой. Пусть решение $w(z)$ задачи Коши на комплексной плоскости с начальными данными в точке вещественной прямой является однозначной аналитической функцией, имеющей особенности на вещественной прямой. Если рассмотреть это же уравнение на вещественной прямой, то решение задачи Коши определено только на части прямой, так как не продолжается через особенность. Но функция $w(z)$ однозначно определена и на других частях прямой и тем самым на прямой определена функция, которую будем называть *формальным решением задачи Коши*.

Как известно, если функция имеет особенность, то ей соответствует семейство обобщенных функций (распределений) [1], которые более детально описывают состояние соответствующей физической системы. Поэтому возникает вопрос: какие из распределений, соответствующих формальному решению, можно считать обобщенными решениями уравнения? Непосредственно подставить обобщенные функции в уравнение нельзя, так как при подстановке возникают произведения обобщенных функций, которые не определены в классической теории, и рассматриваемый вопрос связан с проблемой умножения обобщенных функций [2]–[6].

Получение ответа на этот вопрос требует детального анализа, использующего явное описание обобщенных функций, соответствующих решению. Поэтому ниже рассмотрены конкретные уравнения, для которых формальные решения описываются в явном виде.

Одним из наиболее изученных классов дифференциальных уравнений является класс уравнений со свойством Пенлеве. Особая точка решения дифференциального уравнения (0.1) называется *подвижной*, если её положение на комплексной плоскости зависит от начальных условий. Говорят, что уравнение (0.1) обладает *свойством Пенлеве*, если все подвижные особые точки решений являются полюсами [7]. Одним из способов построения дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве является воздействие специальными операторами на известные уравнения, уже обладающие свойством Пенлеве.

Наиболее простыми для дальнейшего исследования являются рациональные решения. Выделение таких решений фигурирует во многих работах, например в [8], [9]. В частности, такие решения могут быть построены для уравнений из иерархии Риккати.

1 Второе уравнение иерархии Риккати. Формальные решения

Известно, что уравнение первого порядка имеет свойство Пенлеве, если и только если оно является уравнением Риккати, т. е. имеет вид

$$w'(z)=a(z)w^2+b(z)w+c(z).$$

В работе [10] была построена иерархия уравнений со свойством Пенлеве, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z)+\gamma w^2(z)=0.$$

Это уравнения вида

$$D_R^n w=0,\ n=1,2,3,...,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующие по формуле

$$D_R=\frac{d}{dz}+\gamma w,\ z\in\mathbb{C},\ \gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

При $n=1$ получаем уравнение

$$w'(z)+\gamma w^2(z)=0.$$

Применяя преобразование D_R, получаем второе уравнение из иерархии Риккати

$$w''(z)+\gamma^2 w^3(z)+3\gamma w(z)w'(z)=0, \tag{1.1}$$

которое и будет предметом исследования в данной работе.

***Лемма* 1.1.** *Решение задачи Коши для уравнения* (1.1) *с условиями* $w(z_0)=C_1,\ w'(z_0)=C_2$, *где* $C_1,C_2\in\mathbb{C}$, *причем* C_1 *и* C_2 *одновременно не равны нулю, является рациональной функцией и имеет следующий вид*:

1) *если* $C_2\neq-\frac{1}{2}\gamma C_1^2,\ C_2\neq-\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z)=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}\right], \tag{1.2}$$

где

$$a=z_0-\frac{C_1}{\gamma C_1^2+C_2}+\frac{\sqrt{-2\gamma C_2-\gamma^2C_1^2}}{\gamma^2C_1^2+\gamma C_2},$$

$$b=z_0-\frac{C_1}{\gamma C_1^2+C_2}-\frac{\sqrt{-2\gamma C_2-\gamma^2C_1^2}}{\gamma^2C_1^2+\gamma C_2},$$

а знаком $\sqrt{\ }$ *обозначена одна из ветвей двузначной функции*;

2) *если* $C_2=-\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z)=\frac{1}{\gamma(z-a)},\ \text{где}\ a=z_0-\frac{1}{\gamma C_1}; \tag{1.3}$$

3) *если* $C_2=-\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z)=\frac{2}{\gamma(z-a)},\ \text{где}\ a=z_0-\frac{2}{\gamma C_1}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Как показано в [10], уравнению (1.1) удовлетворяет формальный ряд вида

$$w(z)=\frac{1}{\gamma(z-a)}+h_0-\gamma h_0^2(z-a)+ +\gamma^2h_0^3(z-a)^2-\gamma^3h_0^4(z-a)^3+\dots, \tag{1.5}$$

где h_0 – произвольная постоянная. Ряд в (1.5) сходится в области $|z-a|<\rho,\ \rho=\frac{1}{|\gamma h_0|}$, и его сумма может быть найдена в явном виде. Поэтому (1.5) задает функцию

$$w(z)=\frac{1}{\gamma(z-a)}+\frac{h_0}{1+\gamma h_0(z-a)}, \tag{1.6}$$

которая ввиду аналитичности является решением на всей плоскости, кроме точек a и $a-\frac{1}{\gamma h_0}$, являющихся полюсами. Семейство решений (1.6) зависит от двух параметров и эти решения являются рациональными функциями. Если $z_0\neq a$ и $z_0\neq a-\frac{1}{\gamma h_0}$, то решение однозначно определяется по условиям Коши. Связь между полюсами и начальными условиями $w(z_0)=C_1,\ w'(z_0)=C_2$ описывается следующим образом.

1. Пусть $C_2\neq-\frac{1}{2}\gamma C_1^2,\ C_2\neq-\gamma C_1^2$. Используя формулу (1.6), получим

$$h_0=\pm\frac{\gamma^2C_1^2+\gamma C_2}{2\gamma\sqrt{-2\gamma C_2-C_1^2\gamma^2}},$$

$$a=z_0-\frac{C_1}{\gamma C_1^2+C_2}+\frac{\sqrt{-2\gamma C_2-\gamma^2C_1^2}}{\gamma^2C_1^2+\gamma C_2}.$$

Поэтому решение имеет вид

$$w(z)=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}\right],$$

где $b=z_0-\frac{C_1}{\gamma C_1^2+C_2}-\frac{\sqrt{-2\gamma C_2-\gamma^2C_1^2}}{\gamma^2C_1^2+\gamma C_2}$.

2. Пусть $C_2 = -\gamma C_1^2$. В этом случае $h_0 = 0, b = \infty$ и решение имеет следующий вид

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)},\ \text{где}\ a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1}.$$

3. Пусть $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$. Тогда решение не представляется в виде (1.5), но может быть задано формулой (1.2) при $a = b$

$$w(z) = \frac{2}{\gamma(z-z_0) + \dfrac{2}{C_1}} = \frac{2}{\gamma(z-a)},\ \text{где}\ a = z_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

Это решение соответствует $h_0 = \infty$.

Таким образом, решение задачи Коши представляется в одном из трех видов: (1.2), (1.3) или (1.4), и оно однозначно задается своими полюсами, при этом особый вид решение имеет, если $b = \infty$ или если $a = b$. □

Далее будем рассматривать задачу Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и вещественными C_1, C_2. Из леммы 1.1 следует, что формальные решения могут быть разных видов, в зависимости от вида точек a и b. Если точки a и b не лежат на вещественной оси, то формальное решение является гладким на прямой, такое решение будем называть *регулярным*, а в противном случае – *сингулярным*. Будем говорить, что это *сингулярное решение общего положения*, когда оно имеет на прямой два различных полюса. Возможны два вырожденных случая. Таким образом, имеем следующий вид формальных решений.

Регулярный случай имеем, если $C_1^2 > -\frac{2}{\gamma} C_2$. Тогда полюса a и b не лежат на вещественной оси. Решение задачи Коши является гладкой функцией и имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right],$$

где

$$a = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + i\frac{\sqrt{2\gamma C_2 + \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$
$$b = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - i\frac{\sqrt{2\gamma C_2 + \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}$$

есть комплексно-сопряженные числа. Функцию $w(x)$ можно переписать в виде

$$w(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{2(x-p)}{(x-p)^2 + q^2}, \tag{1.7}$$

где $p = x_0 - \dfrac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2}, q^2 = \dfrac{2C_2 + \gamma C_1^2}{\gamma(\gamma C_1^2 + C_2)^2} > 0.$

Решение (1.7) является вещественно-значной гладкой функцией и совпадает с обобщенным решением.

Сингулярный случай общего положения имеем, если $C_1^2 < -\frac{2}{\gamma} C_2$ и $C_2 \neq -\gamma C_1^2$. Точки a и b вещественные и различные, делят прямую на три части. Тогда на вещественной оси решение задачи Коши однозначно определено только на одной из этих трех частей, содержащей точку x_0. Но аналитическая функция $w(z)$ задает на всей прямой однозначно определенное по условию Коши формальное решение

$$w(x) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right], \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} a &= x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}, \\ b &= x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Сингулярный случай бесконечно удаленного полюса имеем, если $C_2 = -\gamma C_1^2$. В этом случае одна из величин a или b обращается в бесконечность, далее считаем, что $b = \infty$, а $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$. На всей вещественной оси однозначно определено вещественно-значное формальное решение задачи Коши

$$w(x) = \frac{1}{\gamma(x-a)},\ \text{где}\ a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}, \tag{1.10}$$

имеющее особенность в точке a.

Сингулярный случай совпадения полюсов имеем, если $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$. Точки a и b совпадают на вещественной прямой. Формальное решение имеет следующий вид

$$w(x) = \frac{2}{\gamma(x-a)},\ \text{где}\ a = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1}. \tag{1.11}$$

2 Обобщенные решения

Если функция на прямой имеет полюса, то ей соответствует не одна, а некоторое семейство обобщенных функций [1].

В частности, сингулярное решение общего положения (1.8) имеет два полюса и ему соответствует двухпараметрическое семейство распределений

$$\begin{aligned} U_{M_1,M_2} &= \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-b}\right) + \\ &+ \frac{1}{\gamma} M_1 \delta_a + \frac{1}{\gamma} M_2 \delta_b, \end{aligned} \tag{2.1}$$

зависящее от двух произвольных постоянных M_1, M_2. Здесь $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$ – дельта-функция Дирака, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle = \text{v.p.}\int \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$$

Распределения (2.1) являются кандидатами на обобщенное решение.

Решение (1.10) имеет один полюс и ему соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций вида

$$U_M = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right)+\frac{1}{\gamma}M\delta_a, \qquad (2.2)$$

где M – произвольная постоянная.

Формальное решение (1.11) имеет один полюс и ему соответствуют распределения

$$\frac{2}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right)+\frac{2}{\gamma}M\delta_a. \qquad (2.3)$$

Как уже отмечалось, распределения (2.1)–(2.3) нельзя подставить в уравнение, хотя бы потому, что куб таких распределений не определен в классической теории обобщенных функций. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений (2.1)–(2.3) и в каком смысле можно считать решениями уравнения (1.1) на прямой.

Вопросу определения понятия обобщенного решения посвящена обширная литература, например [11], [12]. Общая идея введения обобщенных решений основана на построении вспомогательных семейств функций, причем способ построения таков, что если существует предел такого семейства, то его естественно считать обобщенным решением. Часто используется подход, при котором обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Тогда семейство аппроксимирующих уравнений имеет решения, которые являются гладкими функциями, а обобщенным решением исходного уравнения называется предел решений аппроксимирующих уравнений в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Такой подход использовался, например, в работах [13]–[15]. Было обнаружено, что обобщенные решения не всегда существуют даже для простейших линейных уравнений первого порядка с обобщенными коэффициентами.

Уравнение на прямой

$$u''(x)+\gamma^2u^3(x)+3\gamma u(x)u'(x)=0, \qquad (2.4)$$

соответствующее уравнению (1.1), не содержит обобщенных коэффициентов. Поэтому для уравнения (2.4) нужны другие способы построения аппроксимаций. Наиболее естественный из них связан с выходом в комплексную плоскость. Он основан на том, что формальные решения задачи Коши с невещественными начальными условиями являются гладкими функциями и ими можно аппроксимировать формальное решение уравнения (2.4), имеющие особенности на прямой.

Пусть $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon)\in\mathbb{C}$, $C_1(\varepsilon)\to C_1, C_2(\varepsilon)\to C_2$ при $\varepsilon\to 0$, и решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1.1) с условиями

$$w_\varepsilon(x_0)=C_1(\varepsilon),\ w'_\varepsilon(x_0)=C_2(\varepsilon)$$

не имеет особенностей на вещественной оси.

***Определение* 2.1.** Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (2.4) с условиями $u(x_0)=C_1$, $u'(x_0)=C_2$ при заданном способе аппроксимации начальных условий, если $w_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon\to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Исследуем сходимость семейства $w_\varepsilon(x)$ в зависимости от способа приближения $C_1(\varepsilon)$ к C_1, $C_2(\varepsilon)$ к C_2. Для разных видов формальных решений получаем разные результаты.

Сингулярные решения общего положения. Пусть $w(x)$ – сингулярное решение общего положения, имеющее имеет вид (1.8), где точки a и b вещественные и имеют вид (1.9).

***Теорема* 2.1.** *Если* $C_1^2<-\frac{2}{\gamma}C_2,\ C_2\neq -\gamma C_1^2$, *то решения задачи Коши для уравнения* (1.1), *удовлетворяющие невещественным начальным условиям* $w_\varepsilon(x_0)=C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0)=C_2(\varepsilon)$, *где* $C_1(\varepsilon)\to C_1$, $C_2(\varepsilon)\to C_2$ *при* $\varepsilon\to 0$, *при достаточно малых* ε *задаются формулой*

$$w_\varepsilon(x)=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{x-a_\varepsilon}+\frac{1}{x-b_\varepsilon}\right], \qquad (2.5)$$

в которой

$$a_\varepsilon = x_0-\frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)}+q_\varepsilon,$$
$$b_\varepsilon = x_0-\frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)}-q_\varepsilon, \qquad (2.6)$$
$$q_\varepsilon^2=-\frac{2C_2(\varepsilon)+\gamma C_1^2(\varepsilon)}{\gamma(\gamma C_1^2(\varepsilon)+C_2(\varepsilon))^2}.$$

Полюса $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ *не лежат на вещественной прямой и* $a_\varepsilon\to a, b_\varepsilon\to b$ *при* $\varepsilon\to 0$, *а семейство* $w_\varepsilon(x)$ *почти всюду сходится к формальному решению* (1.8).

В пространстве $D'(\mathbb{R})$ *семейство* $w_\varepsilon(x)$ *сходится тогда и только тогда, когда знаки* $\operatorname{Im} a(\varepsilon)$ *и* $\operatorname{Im} b(\varepsilon)$ *постоянны при достаточно малых* ε *и, в зависимости от этих знаков, пределом является одно из четырех распределений*

$$W^{\pm,\pm}=\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right)+\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-b}\right)\pm$$
$$\pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_b. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Согласно лемме 1.1, решения задачи Коши для уравнения (1.1) имеют вид (2.5). То, что $a_\varepsilon \to a, b_\varepsilon \to b$ при $\varepsilon \to 0,$ получаем непосредственно из (2.6), откуда следует и сходимость почти всюду.

Поскольку функция $w_\varepsilon(x)$ представляется в виде суммы двух функций, достаточно проверить сходимость в пространстве распределений каждого слагаемого. Первое слагаемое есть $v_{a_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{x-a_\varepsilon}$. Наиболее простой случай имеем, если $a_\varepsilon = a + i\varepsilon,$ т. е. a_ε приближается к a сверху по вертикали. Тогда получаем семейство

$$v^+_{a_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{x-a-i\varepsilon} = \\ = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2} + i\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}, \quad (2.8)$$

сходимость которого хорошо известна. А именно, семейство гладких функций

$$\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

сходится в пространстве распределений к $P\left(\frac{1}{x-a}\right),$ а семейство

$$\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

сходится к $\pi\delta.$ Поэтому семейство (2.8) сходится к распределению

$$V^+ = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

При $a_\varepsilon = a - i\varepsilon$ получаем другое семейство функций

$$v^-_{a_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2} - i\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2},$$

которое почти всюду сходится к той же функции $\frac{1}{\gamma}\frac{1}{x-a}$, а в пространстве $D'(\mathbb{R})$ сходится к другому распределению, а именно к

$$V^- = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) - i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

Но возможны и другие способы приближения a_ε к a, для которых также следует исследовать сходимость. Любое приближение имеет вид

$$a_\varepsilon = a + h_1(\varepsilon) + ih_2(\varepsilon),$$

где $h_1(\varepsilon) \to 0, h_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0.$ Без ограничения общности можно считать, что $h_2(\varepsilon) = \pm\varepsilon.$ Пусть $h_2(\varepsilon) = \varepsilon,$ случай $h_2(\varepsilon) = -\varepsilon$ исследуется аналогично. Имеем

$$v_{a_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\gamma(x-a_\varepsilon)} = \\ = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a-h_1(\varepsilon)}{[x-a-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2} + i\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{[x-a-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2}. \quad (2.9)$$

Выражение (2.8) получается из выражения (2.9) при $h_1(\varepsilon) = 0.$ Покажем, что семейства (2.8) и (2.9) имеют одинаковые пределы. Разность этих семейств почти всюду сходится к нулю. Если $h_1(\varepsilon)$ мало по сравнению с $\varepsilon,$ то для разности этих семейств можно получить оценки, позволяющие перейти к пределу под знаком интеграла, откуда следует совпадение пределов в пространстве распределений. Но величина $h_1(\varepsilon)$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно по сравнению с ε и может быть существенно большей, чем $\varepsilon.$ Тогда для разности семейств (2.8) и (2.9) нет интегрируемой мажоранты и доказательство сходимость требует дополнительного исследования. Геометрический смысл такой сходимости заключается в том, что полюса a_ε приближаются к точке a, касаясь действительной оси.

Для упрощения обозначений будем считать, что $a = 0, \gamma = 1$ и

$$v_{a_\varepsilon}(x) = \frac{1}{x-a_\varepsilon} = \\ = \frac{x-h_1(\varepsilon)}{[x-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2} + i\frac{\varepsilon}{[x-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2}. \quad (2.10)$$

Если носитель функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ принадлежит промежутку $[-R+1, R-1],$ то распределение $P\left(\frac{1}{x}\right)$ может быть задано выражением

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \int\limits_{|x|<R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Отметим, что при $h \to 0$

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x-h}\right), \varphi\right\rangle \to \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle.$$

Рассмотрим вещественные части функций (2.10) как распределения, т. е. исследуем семейство функционалов

$$I_1(\varepsilon,\varphi) := \int\frac{x-h_1(\varepsilon)}{[x-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx.$$

Так как

$$\int\limits_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)}\frac{x-h_1(\varepsilon)}{[x-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2}dx = 0,$$

то $I_1(\varepsilon,\varphi) = \int\limits_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)}\frac{[\varphi(x)-\varphi(h_1(\varepsilon))][x-h_1(\varepsilon)]}{[x-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2}dx.$

Преобразуем последнее выражение

$$I_1(\varepsilon,\varphi) = \int\limits_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)}\frac{\varphi(x)-\varphi(h_1(\varepsilon))}{x-h_1(\varepsilon)}dx + \\ + \int\limits_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)}[\varphi(x)-\varphi(h_1(\varepsilon))]\times \\ \times\left(\frac{x-h_1(\varepsilon)}{[x-h_1(\varepsilon)]^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{x-h_1(\varepsilon)}\right)dx =$$

$$= \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle + \left[\left\langle P\left(\frac{1}{x - h_1(\varepsilon)}\right), \varphi \right\rangle - \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \right] -$$

$$- \int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} \left[\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon)) \right] \times$$

$$\times \frac{\varepsilon^2}{\{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2\}[x - h_1(\varepsilon)]} dx.$$

Здесь второе слагаемое стремится к нулю. Очевидно, что в последнем интеграле подынтегральные выражения почти всюду сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. В общем случае из этого не следует сходимость к нулю интегралов. Но здесь имеются оценки

$$\frac{\varepsilon^2}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} < 1,$$

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon))}{x - h_1(\varepsilon)} \right| \le const,$$

ввиду которых подынтегральные выражения ограничены одной постоянной и, согласно теореме Лебега, эти интегралы сходятся к нулю. Таким образом,

$$I_1(\varepsilon, \varphi) \to \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Аналогично проверяется, что мнимая часть

$$\int \frac{\varepsilon}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx$$

сходится к $\pi\varphi(0)$. Следовательно, если $\operatorname{Im} a(\varepsilon) < 0$ для достаточно малых ε, то пределом $\frac{1}{\gamma}\frac{1}{x - a_\varepsilon}$ является распределение

$$\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) - i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a;$$

если $\operatorname{Im} a(\varepsilon) > 0$ для достаточно малых ε, то пределом является распределение

$$\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) + i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a.$$

Второе слагаемое $\frac{1}{\gamma}\frac{1}{x - b_\varepsilon}$ имеет такой же вид, что и слагаемое $\frac{1}{\gamma}\frac{1}{x - a_\varepsilon}$, поэтому сходится в пространстве обобщенных функций к одному из двух распределений вида

$$\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - b}\right) \pm i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_b.$$

Таким образом,

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{x - a_\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{x - b_\varepsilon}$$

сходится в пространстве $D'(\mathbb{R})$ к одному из четырех распределений (2.7).

Конкретный вид предела зависит от расположения полюсов аппроксимирующих решений $w_\varepsilon(x)$. □

Согласно доказанному, среди распределений (2.1), соответствующих формальному решению, обобщенными решениями являются только те, у которых $M_1 = \pm i\pi, M_2 = \pm i\pi,$ причем знаки зависят от того, в верхней или в нижней полуплоскости расположены полюса аппроксимирующего решения. Условия на поведение полюсов можно переписать в терминах поведения комплексных начальных условий, но такая запись будет более громоздкой.

Таким образом, в случае сингулярных решений общего положения существуют четыре различных обобщенных решения задачи Коши.

Сингулярный случай бесконечно удаленного полюса. Формальное решение имеет вид (1.10), где точка a вещественная.

Теорема 2.2. *Если* $C_2 = -\gamma C_1^2$, *то решения* $w_\varepsilon(x)$ *задачи Коши для уравнения* (1.1), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon),$$

где $C_1(\varepsilon) \to C_1, C_2(\varepsilon) \to C_2$ *при* $\varepsilon \to 0$, *могут быть двух видов.*

I. *Если* $C_2(\varepsilon) \ne -\gamma C_1^2(\varepsilon)$, *то* $w_\varepsilon(x)$ *есть семейство* (2.5), *где* $a_\varepsilon \to a, b_\varepsilon \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$;

II. *Если* $C_2(\varepsilon) = -\gamma C_1^2(\varepsilon)$, *то*

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}, \text{ где } a_\varepsilon = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1(\varepsilon)} \to a.$$

Семейство $w_\varepsilon(x)$ *почти всюду сходится к формальному решению* (1.10), *а в пространстве* $D'(\mathbb{R})$ *сходимость* $w_\varepsilon(x)$ *зависит от поведения полюсов и возможна только в двух случаях*:

1) *если* $\operatorname{Im} a(\varepsilon) < 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^- = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) - i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a;$$

2) *если* $\operatorname{Im} a(\varepsilon) > 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^+ = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) + i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a,$$

где $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$.

Доказательство. Пусть $C_2(\varepsilon) \ne -\gamma C_1^2(\varepsilon)$. Тогда решения задачи Коши имеют вид (2.5), где полюса a_ε и b_ε заданы с помощью (2.6). Ввиду равенства $C_2 = -\gamma C_1^2$, один из этих полюсов стремится к бесконечности, а второй имеет конечный предел. Будем считать, что $b_\varepsilon \to \infty$, тогда $a_\varepsilon \to a = x_0 - \dfrac{1}{\gamma C_1}$. Так как $b_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, семейство $\dfrac{1}{x - b_\varepsilon}$ сходится к нулю и точечно, и в пространстве распределений, откуда следует, что предел семейства $w_\varepsilon(x)$ совпадает с пределом семейства $\dfrac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}$.

Если

$$C_2(\varepsilon) = -\gamma C_1^2(\varepsilon),$$

то решения задачи Коши для уравнения (1.1) есть

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}, \text{ где } a_\varepsilon = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1(\varepsilon)}. \quad (2.11)$$

Семейство (2.11) точечно сходится к формальному решению (1.10). Полюс a_ε при $\varepsilon \to 0$ сходится к точке a – полюсу формального решения (1.10). Очевидно и обратное: если дан полюс a_ε, то $C_1(\varepsilon)$ однозначно определяется по формуле $C_1(\varepsilon) = \dfrac{1}{\gamma(x_0 - a_\varepsilon)}$. Таким образом, условие, что $C_1(\varepsilon) \to C_1$ эквивалентно тому, полюс a_ε стремится к a – полюсу формального решения.

Условия сходимости и пределы в пространстве распределений семейства $\dfrac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}$ описаны в теореме 2.1, откуда получам требуемое. □

Таким образом, в рассматриваемом случае среди распределений (2.2), соответствующих формальному решению, обобщенными решениями являются только те, у которых $M = \pm i\pi$, и существует только два обобщенных решения задачи Коши.

Сингулярный случай совпадения полюсов. В этом случае $w(x)$ имеет вид (1.11), где точка a вещественная. Этот случай является вырожденным случаем сингулярного решения общего положения при $a = b$.

***Теорема* 2.3.** *Если* $C_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2$, *то решения* $w_\varepsilon(x)$ *задачи Коши для уравнения* (1.1), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon),\ w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon),$$

где $C_1(\varepsilon) \to C_1, C_2(\varepsilon) \to C_2$ *при* $\varepsilon \to 0$, *имеют вид* (2.5), *где* $a_\varepsilon \to a, b_\varepsilon \to a$ *при* $\varepsilon \to 0$. *В частности, если* $C_2(\varepsilon) = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2(\varepsilon)$, *то* $a_\varepsilon = b_\varepsilon$ *и*

$$w_\varepsilon(x) = \frac{2}{\gamma(x - a_\varepsilon)},\ \text{где } a_\varepsilon = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1(\varepsilon)} \to a.$$

В пространстве $D'(\mathbb{R})$ *семейство* $w_\varepsilon(x)$ *сходится в одном из следующих случаев*:

1) *если* $\mathrm{Im}a(\varepsilon) < 0, \mathrm{Im}b(\varepsilon) < 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^- = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) - i\pi \frac{2}{\gamma} \delta_a;$$

2) *если* $\mathrm{Im}a(\varepsilon) > 0, \mathrm{Im}b(\varepsilon) > 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^+ = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) + i\pi \frac{2}{\gamma} \delta_a;$$

3) *если* $\mathrm{Im}a(\varepsilon) \cdot \mathrm{Im}b(\varepsilon) < 0$, *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right),\ \text{где } a = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

Доказательство теоремы 2.3 повторяет рассуждения из доказательства теоремы 2.1.

В рассматриваемом случае среди распределений (2.3), соответствующих формальному решению, существуют три различных обобщенных решения задачи Коши, а именно те, у которых $M = \pm i\pi$ или $M = 0$.

Заключение

Обобщенные решения задачи Коши для второго уравнения иерархии Риккати строятся как пределы комплексно-значных функций, являющихся решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями. Общее количество обобщенных решений зависит от начальных условий задачи Коши и таких решений может быть одно, два, три или четыре. При этом, если ограничиться рассмотрением аппроксимаций формального решения вещественными гладкими решениями, то обобщенное решение существует только при условии $C_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2$, такое решение единственно и есть

$$W = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров*, *В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.

2. *Иванов*, *В.К.* Гиперраспределения и умножение распределений Шварца / В.К. Иванов // Доклады Акададемии наук СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1045–1048.

3. *Егоров*, *Ю.В.* К теории обобщенных функций / Ю.В. Егоров // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 5. – С. 3–40.

4. *Colombeau*, *J.F.* New generalized functions and multiplication of distributions / J.F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 374 p.

5. *Colombeau*, *J.F.* A multiplication of distributions / J.F. Colombeau // Journal of mathematical analysis and applications. – 1983. – № 94. – P. 96–115.

6. *Шагова*, *Т.Г.* Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ / Т.Г. Шагова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 6–17.

7. *Ince*, *E.L.* Ordinary differential equations / E.L. Ince. – New York: Dover Publications, 1944. – 558 c.

8. *Громак*, *В.И.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В.И. Громак, Н.А. Лукашевич. – Минск: Университетское, 1990. – 157 с.

9. *Громак*, *В.И.* О решениях второго уравнения Пенлеве / В.И. Громак // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 753–763.

10. *Грицук*, *Е.В.* Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е.В. Грицук, Е.В. Кузьмина // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.

11. *Решаемые модели в квантовой механике* / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден. – Москва: Мир, 1991. – 568 с.

12. *Данилов*, *В.Г.* Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка / В.Г. Данилов, В.П. Маслов, В.М. Шелкович // ТМФ. – 1998. – Т. 114, №1. – С. 3–55.

13. *Антоневич*, *А.Б.* Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.

14. *Антоневич*, *А.Б.* Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина // Веснік Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Я. Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.

15. *Кузьмина*, *Е.В.* Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 54–61.

Поступила в редакцию 20.04.2022.

Информация об авторах

Кузьмина Елена Викторовна – аспирантка