УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_31
EDN: QSYVXB

ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СВЯЗАННОЙ С ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА

А.Г. Козел

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

THERMAL ELASTIC BENDING OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE, ASSOCIATED WITH THE PASTERNAK FOUNDATION

A.G. Kozel

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. Рассмотрен осесимметричный изгиб упругой трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Учтено воздействие температурного поля. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины принята гипотеза ломанной нормали. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат. Система уравнений равновесия получена с помощью вариационного метода Лагранжа. Ее общее аналитическое решение выписано в перемещениях. Выполнен численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния трехслойной металлополимерной пластины при равномерно распределенной нагрузке. Показано существенное влияние температуры на напряжения в слоях.

Ключевые слова: *термоупругость*, *основание Пастернака*, *трехслойная пластина.*

Для цитирования: *Козел*, *А.Г.* Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 31–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_31 – EDN: QSYVXB

Abstract. An axisymmetric bending of an elastic three-layer circular plate connected to the Pasternak foundation is considered. The effect of the temperature field is taken into account. To describe the kinematics of a plate package asymmetric in thickness, the hypothesis of a broken normal is accepted. The statement of the problem and its solution are carried out in a cylindrical coordinate system. The system of equilibrium equations was obtained using the Lagrange variational method. Its general analytical solution is written out in displacements. A numerical parametric analysis of the stress-strain state of a three-layer metal-polymer plate under a uniformly distributed load has been carried out. The significant influence of temperature on the stresses in the layers is shown.

Keywords: *thermoelasticity*, *Pasternak foundation*, *three-layer plate.*

For citation: *Kozel*, *A.G.* Thermal elastic bending of a circular three-layer plate, associated with the Pasternak foundation / A.G. Kozel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 31–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_31 (in Russian). – EDN: QSYVXB

Введение

В настоящее время в машиностроении, приборостроении и строительстве широко применяются композитные элементы конструкций. Слоистые композиты, в том числе трехслойные, обладают высокой изгибной жёсткостью и прочностью при относительно небольшой массе по сравнению с традиционными листовыми материалами. Трехслойные конструкции обычно выполняют из внешних прочных слоев малой толщины, связанных между собой внутренним, менее прочным и относительно толстым заполнителем. За счет легкого внутреннего слоя обеспечивается совместная работа и устойчивость всей слоистой системы. Для заполнителя используют различные пенопласты, сотовые структуры из металлической фольги или полимерной бумаги, гофровые или ячеистые формы и др. Для несущих слоёв применяют металлические сплавы, а также композиционные и комбинированные материалы.

Несмотря на то, что основы теории многослойных конструкций начали разрабатываться еще с середины прошлого столетия, эта область и сейчас актуальна и продолжает развиваться. Задачи статики и динамики слоистых элементов конструкций при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях с учетом реономных и пластических свойств материалов слоев рассмотрены в работах [1]–[8].

В статье [9] предложен подход к решению задачи деформирования слоистых элементов конструкций из неупругих материалов при сложных видах нагружения. Выполнено сравнение результатов решения стандартным и предложенным способом задачи о циклическом растяжении трехслойных пластин с линейно упругими внешними слоями и вязкоупругим заполнителем.

Изгиб круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем под действием осесимметричных нагрузок произвольного вида исследовалось в работах [10], [11]. Влияние сжимаемости заполнителя на изгиб прямоугольных пластин, в том числе с учетом температуры, изучено в статьях [12], [13]. В обоих случаях аналитические решения получены в конечном виде. Численный анализ напряженно-деформированного состояния исследуемых пластин выполнен в зависимости от геометрических и упругих параметров слоев, величины и вида нагрузок.

В работах [14], [15] рассмотрено деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием осесимметричных и неосесимметричных термосиловых нагрузок.

Изгиб сэндвич-панелей под действием термомеханических нагрузок исследован в статьях [16], [17]. Внешние слои пластины имеют двухкомпонентное (металлокерамическое) распределение материала по толщине, внутренний слой однороден и изготовлен из изотропного керамического материала. Предполагается, что модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения материала слоя изменяются по степенному закону. Получены точные аналитические решения. Численно исследовано влияние термомеханических нагрузок и других параметров на безразмерные прогибы, осевые и поперечные касательные напряжения.

В статье [18] выполнена постановка и приведена методика решения задачи об осесимметричном деформировании несимметричной по толщине упругой трехслойной пологой оболочки, находящейся под действием равномерно распределенной и параболической нагрузок. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении, влияние температурного поля на НДС оболочки.

Большое количество работ в данной области посвящено исследованию деформирования трехслойных пластин, стержней и оболочек, связанных с упругим основанием. В большей части работ при описании реакции основания используется однопараметрическая модель Винклера. Деформирование композитной пластины на упругом основании под действием локальных нагрузок исследовано в статье [19]. В работе [20] рассмотрен термоупругий изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, связанной с упругим основанием. Уравнения равновесия получены с помощью вариационного метода Лагранжа, учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Аналитические решения задачи теории малых упругопластических деформаций получены методом упругих решений Ильюшина. Проведен численный параметрический анализ.

В статье [21] исследован термомеханический изгиб упругопластической круглой (сплошной или кольцевой) многослойной пластины с легким заполнителем, опирающейся на упругое основание. Гипотезы ломаной нормали используются для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластин. Получена система уравнений равновесия и ее точное решение относительно перемещений. Численные результаты получены для многослойной кольцевой металлополимерной пластины.

Анализ ряда экспериментов с плитами, связанными с упругим основанием, показал, что применение двухпараметрической модели основания Пастернака лучше описывает взаимодействие конструкции и основания, чем однопараметрическая модель Винклера [22], [23].

Геометрически нелинейное деформирование произвольной кольцевой пластины с двумя функционально-градиентными пьезоэлектрическими слоями, покоящейся на основании Пастернака, исследовано в работе [24]. Принимается, что все механические и электрические свойства, кроме коэффициента Пуассона, могут непрерывно изменяться по толщине пластины в зависимости от степенной функции. Выведены общие нелинейные уравнения, получены численные результаты в зависимости от параметров основания, показателя неоднородности и граничных условий.

Изотермическое осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих и упругопластических круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, исследовалось в статьях [25]–[28]. Нелинейный изгиб сэндвич-пластины рассмотрен в [29]. Сравнение постановок и решений краевых задач для трехслойных круговых пластин, связанных с основаниями Винклера и Пастернака проведено в статье [30]. Выполнено численное сравнение перемещений и напряжений, полученных по обеим моделям при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины.

В предлагаемой работе, в отличие от предыдущих публикаций автора, учтено воздействие температурного поля на напряженно-деформированное состояние упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака. Приведено аналитическое решение, выполнен численный параметрический анализ влияния температуры на перемещения и напряжения.

1 Постановка краевой задачи

Постановка краевой задачи и её решение проведено в цилиндрической системе координат r, φ, z. Срединная плоскость заполнителя принята за координатную, ось z направлена вверх, перпендикулярно верхнему слою (рисунок 1.1). Для тонких несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа. Для легкого достаточно толстого заполнителя ($h_3 = 2c$) принимается модель Тимошенко, при этом деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ. Работа касательных напряжений в заполнителе не учитывается. На верхний слой пластины действует поперечная осесимметричная нагрузка $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R, действующей на нижний слой пластины, и прогиба принимается согласно модели Пастернака [31]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \qquad (1.1)$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига основания; $w(r)$ – осадка (прогиб) поверхности основания; Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} r}.$$

Реакция основания направлена в сторону, противоположную прогибу.

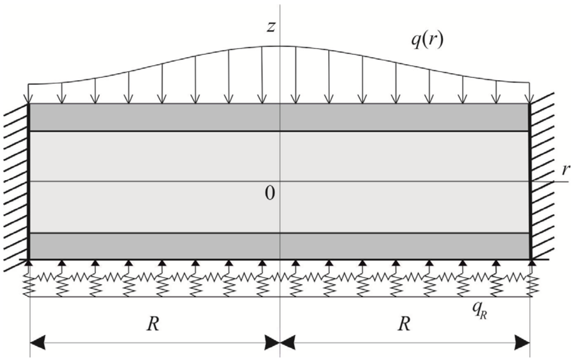


Рисунок 1.1 – Жесткое защемление контура трехслойной пластины на упругом основании

Радиальные перемещения линейно изменяются по толщине слоев, тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k = 1, 2, 3 – номер слоя). Слои несжимаемы по толщине, поэтому в направлении оси z перемещения точек пластины равны прогибу срединной плоскости заполнителя:

$$u_z^{(k)} = w(r).$$

Прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ, т. е. $w = w(r)$, $u = u(r)$, $\psi = \psi(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi(r) = 0$ при $r = R$, R – радиус пластины).

В соответствии с гипотезой прямолинейности нормали заполнителя сдвиговые деформации в нем будут:

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w,_r = \psi.$$

Проинтегрировав это выражение, получим выражения радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw,_r \quad (c \le z \le c + h_1),$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw,_r \quad (-c \le z \le c),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r \quad (-c - h_2 \le z \le -c), \qquad (1.2)$$

где (u + $c\psi$) – величина смещения верхнего несущего слоя за счет деформации заполнителя; (u – $c\psi$) – величина смещения нижнего несущего слоя; z – координата рассматриваемого волокна.

Радиальные и окружные деформации в слоях следуют из (1.2) и соотношений Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - zw,_{rr},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - zw,_r), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - zw,_{rr},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw,_r), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - zw,_{rr},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - zw,_r), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \qquad (1.3)$$

Физические уравнения связи напряжений и деформаций (1.3) принимаются в виде:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k)э_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3)э_{rz}^{(3)}, \quad (\alpha = r, \varphi)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k), \qquad (1.4)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений k-го слоя; $э_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций; $s_{rz}^{(3)}$, $э_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температуро-зависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материалов слоев; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя соотношения (1.2), представим в виде разницы силовой (индекс «e») и температурной (индекс «t») составляющих:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_t^{(k)},$$

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k(T_k)э_\alpha^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)},$$

$$\sigma_t^{(k)} = 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k. \qquad (1.5)$$

Введем внутренние обобщенные усилия и моменты

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)}\,\mathrm{dz},$$

$$M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)}\,\mathrm{dz}, \qquad (1.6)$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right).$$

Используя выражения (1.5) выделим во внутренних усилиях (1.6) силовую и температурную составляющие:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_t^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} T_t^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha e}^{(k)}\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{t}^{(k)}\,\mathrm{d}z,$$

$$M_{\alpha}^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{t}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3}M_{t}^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha e}^{(k)}z\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{t}^{(k)}z\,\mathrm{d}z,$$

$$H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c\left(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}\right),$$

$$H_{t} = M_{t}^{(3)} + c\left(T_{t}^{(1)} - T_{t}^{(2)}\right). \qquad (1.7)$$

Принимаем, что на контуре пластины могут действовать внешние погонные силы T_r^0, Q^0 и моменты H_r^0, M_r^0.

С помощью вариационного принципа Лагранжа, используя выражения (1.1), (1.7), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающую равновесие рассматриваемой пластины, совпадающую с приведенной в [25]:

$$T_r,_r + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0,$$

$$H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0,$$

$$M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) + t_f\Delta w - \kappa_0 w = -q, \quad (1.8)$$

где для простоты индекс «*e*» опущен.

Задача замыкается присоединением граничных термосиловых условий на контуре пластины ($r = R$)

$$T_r = T_r^0 + T_t,\ \ H_r = H_r^0 + H_t,\ \ M_r = M_r^0 + M_t,$$

$$M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \qquad (1.9)$$

Стоит отметить, что температура в явном виде входит только в силовые граничные условия (1.9). В уравнения (1.8) она не включена, так как производные от температурных слагаемых по радиусу равны нулю, а в разностных членах соответствующие добавки взаимно сокращаются.

Выразив внутренние усилия в системе уравнений (1.8) через перемещения, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\mathrm{L}_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r) = 0,$$

$$\mathrm{L}_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r) = 0,$$

$$\mathrm{L}_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r) + t_f\Delta w - \kappa_0 w = -q, \quad (1.10)$$

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$\mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\,\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

a_i – коэффициенты, учитывающие геометрические параметры, зависимость модулей упругости материалов слоев от температуры

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3}K_{k0},\ \ a_2 = c(K_{10} - K_{20}),\ \ a_3 = \sum_{k=1}^{3}K_{k1},$$

$$a_4 = K_{32} + c^2\left(K_{10} + K_{20}\right),$$

$$a_5 = K_{32} + c\left(K_{11} - K_{21}\right),\ \ a_6 = \sum_{k=1}^{3}K_{k2},$$

$$K_{km} = \int_{h_k}\left(K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)\right)z^m\,\mathrm{d}z,\ \ (m = 0,\,1,\,2).$$

К системе (1.10) следует добавить граничные условия в перемещениях. Например, в случае жесткой заделки контура пластины при $r = R$

$$u = 0,\ \ \psi = 0,\ \ w = 0,\ \ w,_r = 0. \qquad (1.11)$$

Здесь также температура в явном виде в краевую задачу (1.10), (1.11) не входит.

2 Общее решение краевой задачи

Рассмотрим процедуру решения системы уравнений (1.10). В силу ее линейности, с помощью первого уравнения исключаем из второго и третьего уравнений функцию *u*. Использование полученного второго уравнения позволяет исключить из первого и третьего функцию ψ. После двукратного интегрирования полученных первых двух уравнений и некоторых преобразований третьего имеем:

$$u = b_1w,_r + C_1r + \frac{C_2}{r},\ \ \psi = b_2w,_r + C_3r + \frac{C_4}{r},$$

$$w,_{rrrr} + \frac{2}{r}w,_{rrr} - \frac{1}{r^2}w,_{rr} + \frac{1}{r^3}w,_r -$$

$$-t_fD(w,_{rr} + \frac{1}{r}w,_r) + \kappa_0Dw = qD, \qquad (2.1)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования; b_1, b_2, D – параметры, зависящие от температуры, через коэффициенты a_i

$$b_1 = \frac{a_3a_4 - a_2a_5}{a_1a_4 - a_2^2},\ \ b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1a_4 - a_2^2},$$

$$D = \frac{a_1(a_1a_4 - a_2^2)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2}.$$

Решение третьего уравнения системы (2.1) получено по методике, предложенной в [28]:

$$w = C_5J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_6H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa r) +$$

$$+ C_7J_0(\sqrt{\overline{a}}\kappa r) + C_8H_0^{(2)}(\sqrt{\overline{a}}\kappa r) + w_p(r), \qquad (2.2)$$

где $J_0(\sqrt{a}\kappa r)$, $J_0(\sqrt{\overline{a}}\kappa r)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa r)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\overline{a}}\kappa r)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка; a и $\overline{a}$ – коэффициенты, зависящие от характеристик упругого основания [28]; $\kappa^4 = \kappa_0 D$, $w_p(r)$ – частное решение третьего уравнения (2.1).

Исходя из условия ограниченности перемещений в начале координат, в решениях (2.1), (2.2) для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$.

3 Изгиб пластины равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим изгиб сплошной упругой трехслойной круговой пластины радиуса R, связанной с основанием Пастернака, под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = q_0 = \text{const}$.

Частное решение третьего уравнения (2.1) может быть принято в виде

$$w_p(r) = \frac{q_0}{\kappa_0}. \qquad (3.1)$$

Тогда решение системы уравнений (2.1), с учетом (3.1) и ограниченности перемещений в начале координат, можно записать в виде:

$$u = b_1 w,_r + C_1 r, \quad \psi = b_2 w,_r + C_3 r,$$

$$w = C_5 J_0\left(\sqrt{a}\kappa r\right) + C_7 J_0\left(\sqrt{\bar{a}}\kappa r\right) + \frac{q_0}{\kappa_0}. \qquad (3.2)$$

Константы интегрирования C_1, C_3, C_5, C_7 следуют из условий закрепления контура пластины.

Используя (1.11), при заделке контура пластины, имеем следующие константы интегрирования

$$C_1 = C_3 = 0,$$

$$C_5 =$$

$$= q_0\sqrt{\bar{a}}J_1\left(\sqrt{\bar{a}}\kappa R\right) / \left(\kappa_0\left[\sqrt{a}J_1\left(\sqrt{a}\kappa R\right)J_0\left(\sqrt{\bar{a}}\kappa R\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\bar{a}}J_1\left(\sqrt{\bar{a}}\kappa R\right)J_0\left(\sqrt{a}\kappa R\right)\right]\right),$$

$$C_7 =$$

$$= q_0\sqrt{a}J_1\left(\sqrt{a}\kappa R\right) / \left(\kappa_0\left[\sqrt{\bar{a}}J_1\left(\sqrt{\bar{a}}\kappa R\right)J_0\left(\sqrt{a}\kappa R\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{a}J_0\left(\sqrt{\bar{a}}\kappa R\right)J_1\left(\sqrt{a}\kappa R\right)\right]\right). \qquad (3.3)$$

Решение (3.2) с константами интегрирования (3.3) описывает термосиловые перемещения в упругой круговой трехслойной пластине при жесткой заделке ее контура, связанной с основанием Пастернака.

4 Численный параметрический анализ

Численная апробация решения выполнена для пластины, материалы слоев которой Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Геометрические параметры пластины $R = 1$ м, $h_1 = h_2 = 0{,}04$ м, $h_3 = 0{,}4$ м. Термомеханические характеристики материалов слоев заимствованы из [8]. Величина интенсивности равномерно распределенной поверхностной нагрузки $q_0 = 1$ МПа. Коэффициенты сжатия и сдвига основания: $\kappa_0 = 100$ МПа/м, $t_f = 1$ МПа·м. Пластина жестко защемлена по контуру.

Для описания зависимости модулей упругости несущих слоев от температуры используется формула, предложенная Дж. Ф. Беллом [3]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\}\varphi(T),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \le 0{,}06, \\ 1{,}03\left(1 - T/(2T_m)\right), & 0{,}06 < T/T_m \le 0{,}57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала, К; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей упругости при нулевой температуре, Па (например, при температуре $T_0 G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$).

Зависимость параметров упругости полимерного материала (заполнителя) от температуры принимается в виде [3]

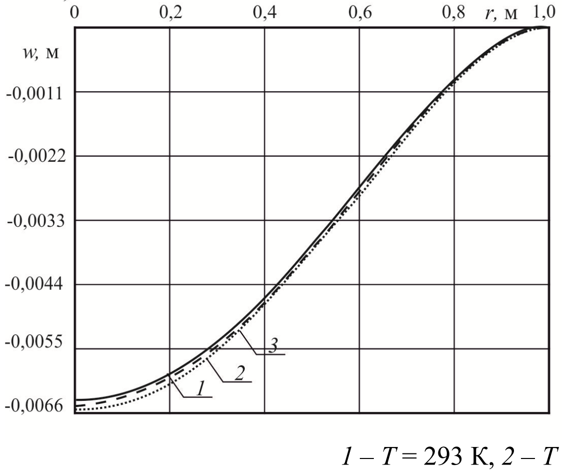
$$\{G(T), K(T)\} = \{G(0), K(0)\} / \varphi_1(T),$$

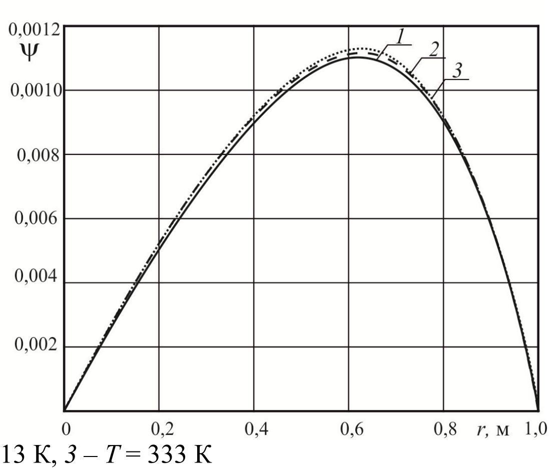
$$\varphi_1(T) = \left(1 + B\left[\Delta T / T_m\right]^\gamma \operatorname{sgn}\Delta T\right),$$

где $\Delta T = T - T_0$, T_0 – начальная температура, К; G_0, K_0 – значения параметров при температуре T_0.

На рисунке 4.1 *а*, *б* показано изменение вдоль радиуса прогиба $w(r)$ и сдвига в заполнителе $\psi(r)$ рассматриваемой пластины при различной температуре слоев: *1* – $T = 293$ K, *2* – $T = 313$ K, *3* – $T = 333$ K. Температурное воздействие на пластину приводит к незначительному увеличению перемещений, что объясняется жесткостью заделки пластины.

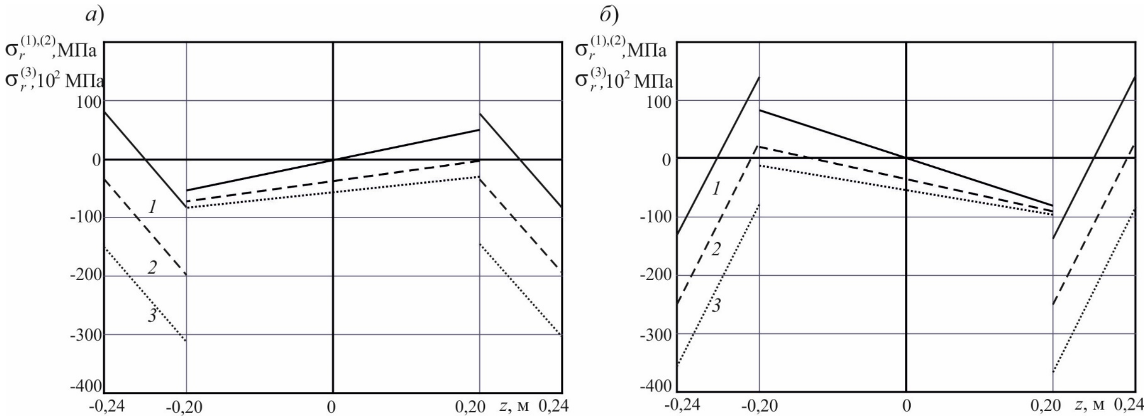
Рисунок 4.2 иллюстрирует изменение радиальных напряжений по толщине упругой трехслойной пластины в центре (*а*) и на ее контуре (*б*)





1 – $T = 293$ K, *2* – $T = 313$ K, *3* – $T = 333$ K

Рисунок 4.1 – Изменение прогиба и сдвига в заполнителе трехслойной пластины

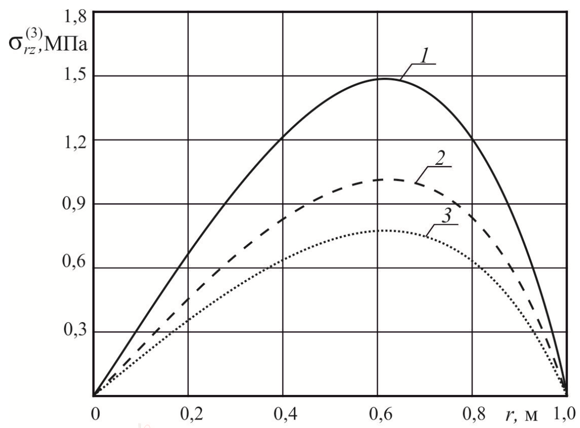


1 – *T* = 293 К, *2* – *T* = 313 К, *3* – *T* = 333 К

Рисунок 4.2 – Изменение радиальных напряжений по толщине пластины в центре (*а*) и на контуре (*б*)

при различной температуре слоев: *1* – *T* = 293 К, *2* – *T* = 313 К, *3* – *T* = 333 К. Для наглядности напряжения в заполнителе увеличены в 100 раз. В слоях напряжения под действием температуры смещаются в отрицательную область. На контуре пластины при повышении температуры на 20 К максимальные напряжения в несущих слоях увеличились по модулю на 80%, в заполнителе – до 76%. При увеличении температуры на 40 К рост напряжений составил 160% и 123% соответственно.

На рисунке 4.3 показано изменение касательных напряжений в заполнителе. Несмотря на то, что сдвиговые деформации незначительно увеличиваются при росте температуры, касательные напряжения уменьшаются. Это объясняется уменьшением величины модуля сдвига G_3. При увеличении температуры на 20 К напряжения уменьшились на – 31,5%, 40 К – 48%.



1 – *T* = 293 К, *2* – *T* = 313 К, *3* – *T* = 333 К

Рисунок 4.3 – Изменение касательных напряжений в заполнителе

Можно отметить, что температурное воздействие на пластину приводит к незначительному увеличению перемещений. В то же время, изменение напряжений при росте температуры существенно.

Заключение

В работе построена математическая модель расчета напряжений и перемещений при изгибе упругой трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Разработанный подход можно применять для нахождения этих параметров различных материалов с учетом температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин*, *В.В.* Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. *Можаровский*, *В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Навука і тэхніка, 1988. – 271 с.

3. *Горшков*, *А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с.

4. *Aghalovyan*, *L.* Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore – London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

5. *Carrera*, *E.* Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. – Academic Press. – 2016. – 410 p.

6. *Журавков*, *М.А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 543 с.

7. *Старовойтов*, *Э.И.* Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Бел. навука, 2017. – 275 с.

8. *Gorshkov*, *A.G* Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.

9. *Паймушин*, *В.Н.* Об одном методе решения задач о неупругом деформировании слоистого композита / В.Н. Паймушин, Р.А. Каюмов,

С.А. Холмогоров // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2021. – № 6. – С. 55–66.

10. *Старовойтов*, *Э.И.* Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26, № 1. – С. 58–73.

11. *Захарчук*, *Ю.В.* Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.

12. *Зеленая*, *А.С.* Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле / А.С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 45–49.

13. *Зеленая*, *А.С.* Термоупругий изгиб трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 93–100.

14. *Нестерович*, *А.В.* Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

15. *Нестерович*, *А.В.* Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

16. *Zenkour*, *A.M.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 7–46.

17. *Zenkour*, *A.M.* Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.

18. *Старовойтов*, *Э.И.* Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

19. *Starovoitov*, *E.I.* Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.

20. *Яровая*, *А.В.* Термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.В. Яровая // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 1. – Режим доступа: http://mathmod.esrae.ru/11-31. – Дата доступа: 12.01.2022.

21. *Leonenko*, *D.V.* Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mech. Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

22. *Fwa*, *T.F.* Use of Pasternak foundation model in concrete pavement analysis / T.F. Fwa, X.P. Shi, S.A. Tan // Journal of transportation engineering. – 1996. – Vol. 122, № 4. – P. 323–328.

23. *Katsikadelis*, *J.T.* Clamped plates on Pasternak-type elastic foundation by the boundary element method / J.T. Katsikadelis, L.F. Kallivokas // Journal of Applied Mechanics. – 1986. – Vol. 53. – P. 909–917.

24. *Arefi*, *M.* Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation / M. Arefi, M.N.M. Allam // Smart Structures and Sestems. – 2015. – Vol. 16, № 1. – P. 81–100.

25. *Козел*, *А.Г.* Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

26. *Козел*, *А.Г.* Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.

27. *Козел*, *А.Г.* Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

28. *Старовойтов*, *Э.И.* Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, №1. – С. 392–406.

29. *Козел*, *А.Г.* Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

30. *Козел*, *А.Г.* Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

31. *Пастернак*, *П.Л.* Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак. – Москва: Госстройиздат. – 1954. – 56 с.

Поступила в редакцию 23.02.2022.

Информация об авторах

Козел Анастасия Григорьевна – к.ф.-м.н.