

## ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF THE LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION WITH A LINEAR POTENTIAL IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATIONAL REPRESENTATION

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Найдены приближённые аналитические решения уравнения Логунова – Тавхелидзе в интегральной форме с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. Полученные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а условие квантования энергии является трансцендентным уравнением.

**Ключевые слова:** уравнение Логунова – Тавхелидзе, релятивистское конфигурационное представление, линейный потенциал, преобразование Лапласа, приближённое аналитическое решение, функция Макдональда, условие квантования энергии.

**Для цитирования:** Гришечкин, Ю.А. Приближённое аналитическое решение уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 22–25. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_22](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22) – EDN: IMQFYS

**Abstract.** The approximate analytical solutions of the Logunov – Tavkheldize equation in integral form with a linear potential in the relativistic configurational representation are found. The obtained wave functions are expressed in terms of the Macdonald function while the energy quantization condition is a transcendental equation.

**Keywords:** Logunov – Tavkheldize equation, relativistic configurational representation, linear potential, Laplace transformation, approximate analytical solution, Macdonald function, energy quantization condition.

**For citation:** Grishechkin, Yu.A. Approximate analytical solution of the Logunov – Tavkheldize equation with a linear potential in the relativistic configurational representation / Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 22–25. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_22](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22) (in Russian). – EDN: IMQFYS

### Введение

Уравнение Логунова – Тавхелидзе для сферически-симметричной волновой функции  $\psi(2E, r)$  системы двух скалярных частиц одинаковой массы  $m$  в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) имеет вид [1], [2]

$$\psi(2E, r) = \int_0^{\infty} G(E, r, r') V(r') \psi(2E, r') dr', \quad (0.1)$$

где параметр  $2E$  – энергия двухчастичной системы,  $r \geq 0$  – координата в РКП,  $V(r)$  – потенциал,  $G(E, r, r')$  – функция Грина, имеющая следующую форму:

$$G(E, r, r') = G(E, r - r') - G(E, r + r'), \quad (0.2)$$

$$G(E, r) = \frac{-i}{m \operatorname{sh} 2\chi} \frac{\operatorname{sh}(\pi/2 + i\chi)mr}{\operatorname{sh}(\pi mr/2)}.$$

Величина  $\chi \geq 0$  в (0.2) связана с энергией  $2E$  по формуле  $2E = 2m \operatorname{ch} \chi$ .

В данной работе мы рассматриваем методы приближённого аналитического и численного решений уравнения (0.1) с линейным потенциалом в РКП следующего вида:

$$V(r) = \lambda r, \quad (0.3)$$

где  $\lambda > 0$  – константа связи.

### 1 Приближённое аналитическое решение

Выполним преобразование Лапласа [3] над уравнением (0.1). В результате получим равенство

$$\varphi(2E, z) = \int_0^{\infty} g(E, z, r') V(r') \psi(2E, r') dr', \quad (1.1)$$

где введены обозначения для изображения волновой функции, определяемого по формуле [3]

$$\varphi(2E, z) = \int_0^{\infty} \exp(-zr) \psi(2E, r) dr, \quad (1.2)$$

и интеграла

$$g(E, z, r') = \int_0^{\infty} \exp(-zr)G(E, r, r')dr. \quad (1.3)$$

Величина  $z$  – комплексная переменная функции-изображения. Вычисление интеграла (1.3) удобно выполнять, используя представление функции Грина в форме интеграла Фурье [1], [2]

$$G(E, r, r') = \frac{-2m}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\chi_p mr) G_{MR}(E, \chi_p) \sin(\chi_p mr') d\chi_p,$$

где мы использовали обозначение для функции Грина в импульсном представлении

$$G_{MR}(E, \chi_p) = \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}^2 \chi_p - E^2 - i0}.$$

После подстановки (1.4) в (1.3) и выполнения двойного интегрирования получим выражение:

$$g(E, z, r') = -\exp(-zr')G_{MR}(E, iz/m) + \frac{2}{\operatorname{sh} 2\chi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\chi_s^{(-)} \exp(i\chi_s^{(-)} mr')}{z^2 + (m\chi_s^{(-)})^2} - \frac{2}{\operatorname{sh} 2\chi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\chi_s^{(+)} \exp(i\chi_s^{(+)} mr')}{z^2 + (m\chi_s^{(+)})^2},$$

где  $\chi_s^{(+)} = \chi + i\pi s$ ,  $\chi_s^{(-)} = -\chi + i\pi + i\pi s$  – полюса функции  $G_{MR}(E, \chi_p)$ . Подстановка потенциала (0.3) и выражения (1.5) в (1.1), а также учёт формулы (1.2) приводит к следующему равенству:

$$\varphi(2E, z) - \lambda G_{MR}(E, iz/m) \varphi_z(2E, z) = \frac{2\lambda}{\operatorname{sh} 2\chi} \sum_{s=0}^{\infty} \left[ \frac{\chi_s^{(+)}}{(m\chi_s^{(+)})^2 + z^2} \varphi_z(2E, -i\chi_s^{(+)} m) - \frac{\chi_s^{(-)}}{(m\chi_s^{(-)})^2 + z^2} \varphi_z(2E, -i\chi_s^{(-)} m) \right],$$

где индексом  $z$  обозначена производная по соответствующей переменной.

Предположим теперь, что в равенстве (1.6) можно пренебречь суммой, стоящей в правой части, тогда это равенство упрощается до следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\varphi_z(2E, z) = \frac{1}{\lambda} G_{MR}^{-1}(E, iz/m) \varphi(2E, z). \quad (1.7)$$

Нахождение общего решения уравнения (1.7) и последующая подстановка полученной функции в формулу для обращения преобразования Лапласа [3]

$$\psi(2E, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(zr) \varphi(2E, z) dz$$

приводит к следующему интегральному выражению для волновой функции:

$$\psi(2E, r) = \frac{m}{2\pi} C \int_0^{\infty} \cos \left[ \left( r - (E^2 - m^2/2)/\lambda \right) \frac{m}{2} t + \frac{m^3}{4\lambda} \operatorname{sh} t \right] dt, \quad (1.8)$$

где  $C$  – неизвестная константа, возникшая при решении уравнения (1.7).

Получим нерелятивистский предел интегральной формулы (1.8). Для этого выполним в ней замену переменной  $x = mt/2$  и устремим массу  $m$  к бесконечности. В результате, после несложных преобразований, мы получим интегральное представление функции Эйри [3], т. е. решение уравнения Шрёдингера с запирающим потенциалом в координатном представлении [4]. Интеграл в формуле (1.8) может быть выражен через функцию Макдональда  $K_\nu(z)$  [3], а волновая функция представлена в виде

$$\psi(2E, r) = \frac{m}{2\pi} C \exp \left( -\frac{\pi m}{4} \left( r - (E^2 - m^2/2)/\lambda \right) \right) \times \times K_{i\frac{m}{2} \left( r - (E^2 - m^2/2)/\lambda \right)} \left( \frac{m^3}{4\lambda} \right).$$

Из уравнения (0.1) следует, что волновая функция обращается в ноль при  $r = 0$ . Взяв формулу (1.9) в указанной точке и приравняв её к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$K_{im/(8\lambda)}(2E^2 - 2m^2) \left( m^3/(4\lambda) \right) = 0, \quad (1.10)$$

которое является условием квантования энергии системы  $2E^{(n)}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, выражения (1.9), (1.10) являются приближённым решением уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным в РКП потенциалом (0.3).

В следующем разделе мы найдём численные решения интегрального уравнения (0.1) с потенциалом (0.3) и выполним их сравнение с решениями, полученными описанным методом, с целью проверки его эффективности.

## 2 Численное решение интегрального уравнения

Для нахождения численного решения интегрального уравнения (0.1) был использован метод, неоднократно применявшийся для нахождения решений ковариантных двухчастичных уравнений в случае резонансных состояний [5]–[8]. Метод состоит в замене интеграла в уравнении (0.1) интегральной суммой по одной из квадратурных формул с последующим сведением полученных таким образом равенств к линейным системам однородных алгебраических уравнений [9]:

$$M\psi = 0;$$

$$M_{mn} = \delta_{mn} - w_n G(2E, r_m, r_n) V(r_n), \quad (2.1)$$

где  $M$  – основная матрица системы,  $\psi$  – вектор, составленный из значений волновой функции в узловых точках  $r_n$  квадратурной формулы,  $w_n$  – весовые коэффициенты квадратурной формулы,  $\delta_{mn}$  – элементы единичной матрицы. Условие

существования ненулевых решений системы уравнений (2.1) – равенство нулю детерминанта матрицы  $M$

$$f(2E) = \det M = 0 \quad (2.2)$$

является уравнением относительно дискретных значений величины  $2E$ . Таким образом, уравнение (2.2), фактически, является условием квантования энергии. Предварительный поиск корней уравнения (2.2) целесообразно представить графически на комплексной плоскости величины  $2E$ . На рисунке 2.1 сплошной линией изображены нули действительной части  $f(2E)$ , штриховой – мнимой части, кружками обведены корни уравнения (2.2).

На рисунке 2.1 видно, что корни расположены на вещественной оси. В таблице 2.1 приведены значения обезразмеренной энергии

$$2\varepsilon_{num} = \frac{2E_{num}}{m},$$

найденные численным решением интегрального уравнения, и значения энергии

$$2\varepsilon_{appr} = \frac{2E_{appr}}{m},$$

полученные численным решением приближённого трансцендентного уравнения (1.10).

Величины энергии найдены с точностью до 6 знаков после запятой и выше. Насколько полученные величины энергии оказываются близкими можно судить по приведенным в таблице 2.1 значениям величины  $\Delta = |2\varepsilon_{appr} - 2\varepsilon_{num}|$ . Как видно, с ростом величины константы связи  $\lambda$  точность значений энергии, найденных при решении уравнения (1.10), снижается, а с ростом номера состояния  $n$  – повышается.

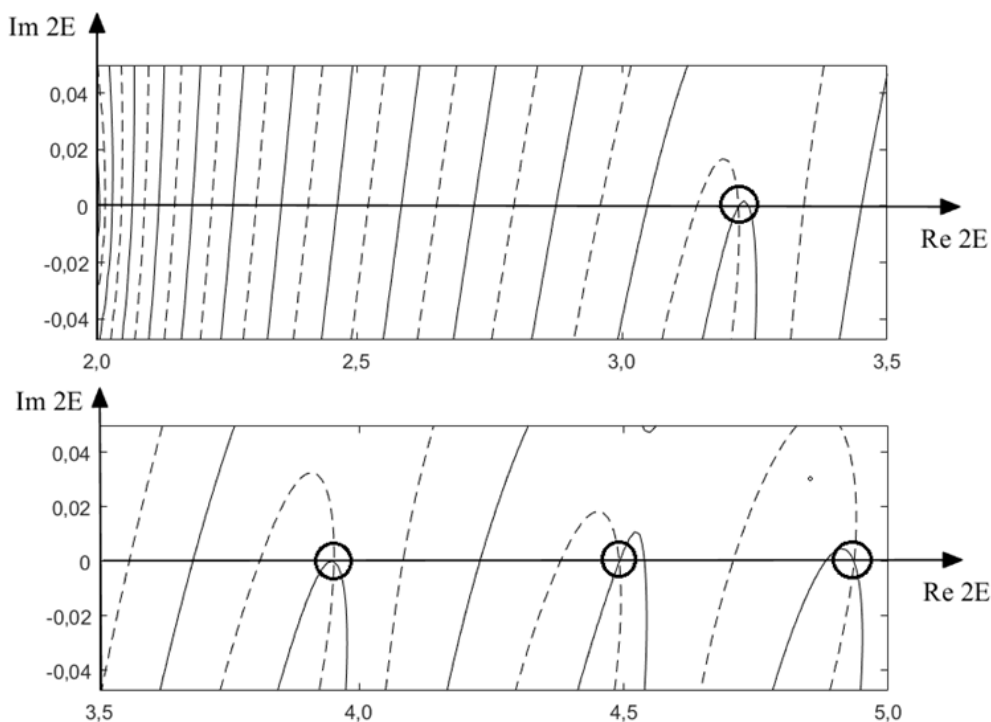


Рисунок 2.1 – Корни уравнения (2.2) при  $m = 1, \lambda = 0,5$

Таблица 2.1 – Значения обезразмеренной энергии  $2E/m$

$n$	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	$\Delta$	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	$\Delta$	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	$\Delta$
$\lambda = 0,5$			$\lambda = 1,0$			$\lambda = 2,0$			
0	3,2193	3,2257	0,0064	3,8014	3,8158	0,0144	4,6203	4,6500	0,0297
1	3,9527	3,9557	0,0030	4,8325	4,8385	0,0060	6,0511	6,0624	0,0113
2	4,4914	4,4934	0,0020	5,5804	5,5841	0,0037	7,0798	7,0863	0,0065
3	4,9349	4,9363	0,0014	6,1925	6,1951	0,0026	7,9185	7,9230	0,0045
$\lambda = 4,0$			$\lambda = 8,0$			$\lambda = 16,0$			
0	5,7570	5,8132	0,0562	7,3200	7,4196	0,0996	9,4574	9,6247	0,1673
1	7,7246	7,7444	0,0198	10,0106	10,0438	0,0332	13,1256	13,1797	0,0541
2	9,1310	9,1422	0,0112	11,9280	11,9463	0,0183	15,7367	15,7660	0,0293
3	10,2755	10,2830	0,0075	13,4868	13,4989	0,0121	17,8594	17,8786	0,0192

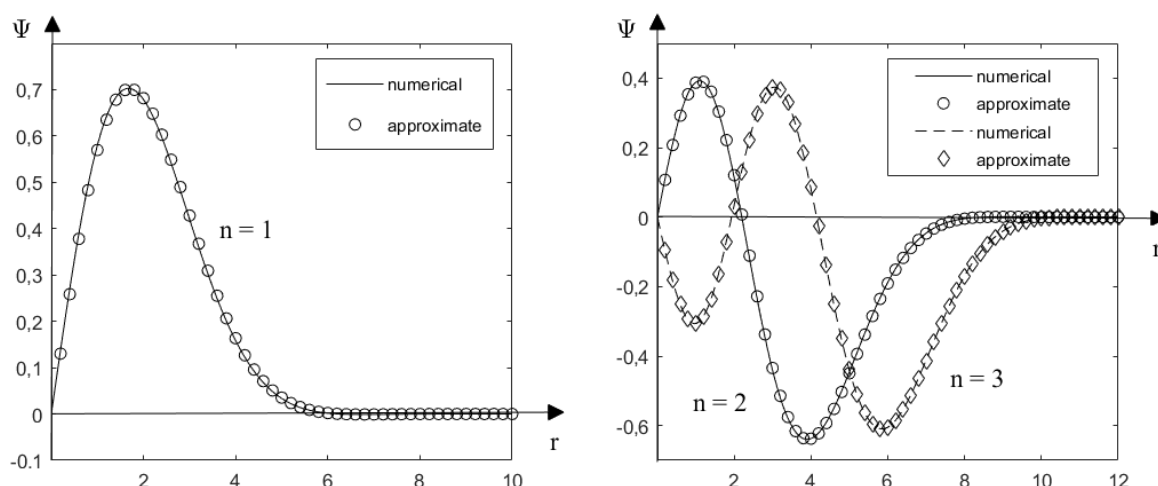


Рисунок 2.2 – Волновые функции первых трёх состояний при  $m = 1$ ,  $\lambda = 1$

На рисунке 2.2 приведены графики волновых функций, найденных аналитически по приближённой формуле (1.9) (approximate) и численным решением интегрального уравнения (numerical). Графики приближённых аналитических волновых функций визуально неотличимы от графиков, построенных на основании численных решений.

Таким образом, рассмотренный метод позволяет найти решения с хорошей точностью для указанных значений константы связи  $\lambda$ .

#### Заключение

Таким образом, в данной работе получены приближённые аналитические решения уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. При этом найденные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а собственные значения энергии являются решениями трансцендентного уравнения. Сравнение полученных решений с численными показало эффективность предложенного метода. В дальнейшем мы планируем выполнить исследования, связанные с критериями применимости рассмотренного в данной работе приближённого аналитического метода, а также использовать этот метод для решения релятивистских двухчастичных уравнений в интегральной форме с другими типами взаимодействий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of  $\delta$ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.
2. Kapshai, V.N. One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two  $\delta$ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

4. Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

5. Kapshai, V. Integral equations for different wave functions and their use for resonance finding / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // J. Phys. B. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044001.

6. Капшай, В.Н. Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма / В.Н. Капшай, К.П. Шильяева // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 10–17.

7. Капшай, В.Н. Резонансные состояния составных систем и ковариантные двухчастичные уравнения теории поля / В.Н. Капшай, К.П. Шильяева, Ю.А. Гришечкин // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности: Сборник научных трудов / Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 2011. – С. 79–88.

8. Гришечкин, Ю.А. Метод комплексного поворота для двухчастичных уравнений в импульсном представлении и резонансные состояния / Ю.А. Гришечкин, М.С. Данильченко, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20) – С. 21–25.

9. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

Поступила в редакцию 04.05.2022.

#### Информация об авторах

Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент  
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент