

3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА БЕЗ ГАУССОВОЙ АПОДИЗАЦИИ С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

KUMMER 3D LIGHT BEAMS WITHOUT THE GAUSSIAN APODIZATION WITH TRANSFERABLE TERMINATING POWER

S.S. Girdel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Получены аналитические выражения для циркулярных 3D световых пучков Куммера без гауссовой аподизации с непрерывным комплексным индексом ν . Найдены ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков, чтобы они обладали конечной мощностью и были физически реализуемыми. Графическое моделирование таких 3D пучков Куммера подтвердило, что, действительно, существуют определенные непрерывные значения свободного комплексного параметра ν , для которых пучки Куммера переносят конечную мощность.

Ключевые слова: параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Куммера.

Для цитирования: Гиргель, С.С. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 18–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_18 – EDN: GMTCSS

Abstract. The analytical expressions for Kummer circular 3D light beams without the Gaussian apodization with the continuous complex coefficient ν are obtained. The restrictions on possible values of the free parameters of such beams provided that they possess transferred power, have been discovered and physically realised. The pictorial modelling of such Kummer 3D beams has confirmed, that, indeed, there are certain continuous values of the free complex parametre ν for which Kummer beams transfer terminating power.

Keywords: paraxial beams, circular beams, Kummer beams.

For citation: Girdel, S.S. Kummer 3D light beams without the Gaussian apodization with transferable terminating power / S.S. Girdel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 18–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_18 (in Russian). – EDN: GMTCSS

Введение

Обычно [1], [2] при описании параксиальных световых пучков используют аподизацию соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была квадратично интегрируемой и поэтому пучок переносил конечную мощность. Так, например, хорошо известны пучки Эрмита – Гаусса, Бесселя – Гаусса, Лагерра – Гаусса и т.д. Однако присутствие гауссиана в комплексной амплитуде параксиального пучка вовсе не обязательно. В [3] нами было предложено новое решение скалярного 2D параболического волнового уравнения. Это решение не содержит аподизацию гауссианом, но, тем не менее, описывает 2D световые пучки Куммера, которые переносят конечную мощность при определённых значениях свободных параметров.

В данной работе этот формализм применяется для нахождения новых решений параболического уравнения. Получены выражения, описывающие циркулярные 3D световые пучки

Куммера с непрерывным комплексным индексом ν без гауссиана и обсуждаются ограничения на значения их свободных параметров.

1 Циркулярные 3D пучки Куммера

Для гармонических волн вида $f(\mathbf{r}, t) = \psi \exp(-i\omega t)$ скалярное параксиальное уравнение, описывающее амплитуду ψ скалярных световых пучков, имеет вид [2]

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)\psi = 0, \quad (1.1)$$

где $k = k_0 n$, $k_0 = \omega/c$. В настоящей работе примененный нами формализм [3] обобщается на 3D скалярные пучки с цилиндрической симметрией. Полезно предварительно перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (1.2)$$

Здесь x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – определенные характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OY соответственно.

Кроме того, осуществим дополнительный переход $Z \rightarrow Q$, где $Q = Z - Q_0$ – введенный безразмерный комплексный параметр пучка: причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Здесь и далее штрихами будем помечать вещественные и мнимые части комплексных величин.

При этом параксиальное уравнение (1.1) в цилиндрической системе координат (R, φ, Z) , где безразмерный радиус $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, можно представить в форме

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4i \frac{\partial}{\partial Q} \right] \psi(R, \varphi, Q), \quad (1.3)$$

Обычно [4]–[5] решения параболического уравнения типа (1.3) ищут в виде функции, содержащей гауссиан [1], [3]

$$G(R, Z) = \frac{1}{Q} \exp\left(i \frac{R^2}{Q}\right),$$

который является фундаментальным решением параксиального уравнения (1.3). В итоге получают [6], [7] решения, описывающие 3D пучки Куммера – Гаусса, содержащие гауссиан Г. Бэндрес [7] называет такие пучки циркулярными.

Однако искать решение уравнения (1.3), включающее гауссиан, вовсе не обязательно. Можно получить решение уравнения (1.3), не содержащее гауссиан явно, но, тем не менее, обладающее квадратичной интегрируемостью (КИ). Такие пучки переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми.

Чтобы найти такого типа решение уравнения (1.3) через функцию Куммера, произведем замену переменных $R = R_1 \sqrt{-iQ}$ в (1.3). Тогда приходим к уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R_1^2} + \left(\frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{\partial}{\partial R_1} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4Q \frac{\partial}{\partial Q} \right] \times \psi_1(R_1, \varphi, Q) = 0. \quad (1.4)$$

Чтобы разделить переменные, введем стандартную подстановку $\psi(R_1, \varphi, Q) = f_1(R_1) f_2(\varphi) f_3(Q)$. Получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{2Q}{f_3} \frac{df_3}{dQ} = m + 2\nu, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (1.6)$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + \left(\frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{d}{dR_1} + 2(m + 2\nu) - \frac{m^2}{R_1^2} \right] f_1 = 0. \quad (1.7)$$

Здесь $(-m^2)$ и $(m + 2\nu)$ – постоянные разделения. Интегрируя (1.5), находим, что

$$f_3 = \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{\nu+m/2}. \text{ Можно считать далее, без потери общности, что } Q'_0 = 0. \text{ Функцию } f_2(\varphi) \text{ (фазовый множитель) можно взять в форме}$$

$f_2 = \cos m\varphi + ib \sin m\varphi$, где b – азимутальный коэффициент модуляции, $b \in [0; 1]$. В уравнении (1.7) одно независимое решение можно записать в виде: $f_1 = (R_1^2)^{m/2} M(-\nu, m+1; R_1^2)$. Теперь запишем искомое решение для функции ψ , учитывая, что $\psi = f_1 f_2 f_3$. Получаем [8]:

$$\psi = R^m M\left(-\nu, m+1; i \frac{R^2}{Q}\right) \cdot \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^\nu \cdot f(m, \varphi). \quad (1.8)$$

Здесь M – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера 1 рода (${}_1F_1$). Выражение (1.8) не содержит явно гауссиана $G(R, Z)$ и описывает новый тип пучков – скалярные циркулярные 3D пучки Куммера. Такие пучки зависят от безразмерных переменных R, φ, Z и четырех параметров ν, m, Q_0, b и, при определенных условиях, могут переносить через свое поперечное сечение конечную мощность.

2 Условия КИ циркулярных световых 3D пучков Куммера без гауссиана

Мы нашли, что при заданных значениях переменных и параметров всегда существует решение (1.8) для амплитуд 3D световых пучков Куммера. Однако эти решения должны описывать физически реализуемые пучкам с переносимой конечной мощностью. Будем считать, как обычно, что $m = 0, 1, 2, \dots$

На практике интерес представляют пучки конечной мощности, которые можно физически реализовать. Амплитуда такого пучка должна быть конечной для всех координат R . Кроме того, при $|R| \rightarrow \infty$ амплитуда ψ пучка должна стремиться к нулю и обладать КИ, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dXdY$ должен быть конечным.

Проведем поиск условий выполнения КИ для циркулярных 3D световых пучков Куммера. Для этого достаточно исследовать свойства амплитуд функций ψ при $R \rightarrow \infty$. Асимптотическое поведение функции $M(a, b, \Phi)$ при $|\Phi| \rightarrow \infty$ описывается формулой [9], [10], [11]

$$M(a, b, \Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \quad (2.1)$$

где $a \neq 0, -1, -2, \dots$ и Γ – гамма-функция. Обсудим условия КИ функции ψ при $R \rightarrow \infty$. Получаем, после некоторых преобразований, что асимптотически

$$\psi \propto \frac{R^{2\nu+m}}{\Gamma(m+1+\nu)} + \frac{\exp(iR^2/Q) R^{-2\nu-m-2}}{\Gamma(-\nu)}$$

и исследуем условия КИ функций (1.8), следуя методике [3]. Анализ показывает, что необходимым условием КИ комплексной амплитуды циркулярных пучков Куммера является ограничение $Q_0'' > 0$. Для удобства необходимые и достаточные условия КИ представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Условия КИ для 3D скалярных циркулярных световых пучков Куммера без гауссиана с непрерывным комплексным индексом

№	Ограничения на индекс ($m = 0, 1, 2, \dots$; $Q_0'' > 0$; $N = 1, 2, 3, \dots$)	Предел $ \psi $ при $ x \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$\nu = -m - N$	$ \psi \rightarrow 0$	да
2.1	$\nu' > -m/2$	$ \psi \rightarrow \infty$	нет
2.2	$\nu' = -m/2$	$ \psi \rightarrow const$	нет
2.3	$\nu' < \left[\frac{1+m}{2}, -\frac{m}{2} \right)$	$ \psi \rightarrow 0$	нет
2.4	$\nu' < -(1+m)/2$	$ \psi \rightarrow 0$	да

Для случая № 1 выражение (1.8) принимает вид

$$\psi_1 = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{-N-m} \times M \left(N+m, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) f(m, \varphi). \quad (2.2)$$

Найденное решение (2.2) для 3D пучков Куммера можно также получить из таблицы 2.1 статьи автора [8], вариант № 3, осуществляя предельный переход $Q_0'' \rightarrow \infty$ и переобозначая $P_0'' \rightarrow Q_0''$.

Применяя далее преобразование Куммера

$$M(a, b; x) = \exp(x) M(b-a, b; -x)$$

[8] к (2.2), получаем

$$\psi_1 = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{-N-m} \exp \left(i \frac{R^2}{Q} \right) \times M \left(-n, m+1; -i \frac{R^2}{Q} \right) f(m, \varphi).$$

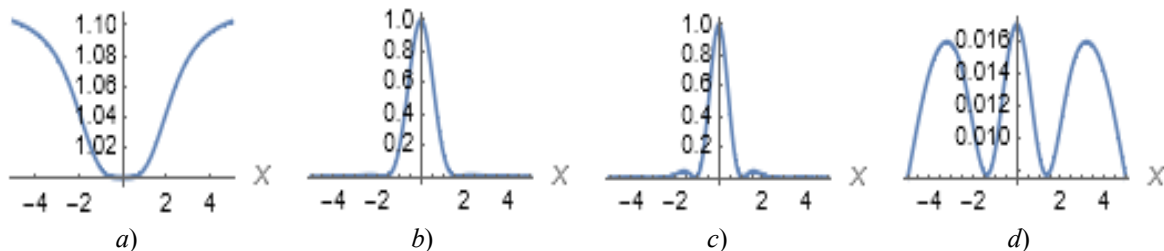


Рисунок 3.1 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка:

- a) $\nu' = 0$; $\nu'' = 0,26$; $Z = 0$; $Q_0'' = 2$; b) $\nu' = -1,6$; $\nu'' = 0$; $Z = 0$; $Q_0'' = 2$;
 c) $\nu' = -3$; $\nu'' = 0$; $Z = 0$; $Q_0'' = 2$; d) $\nu' = 0$; $\nu'' = -0,1$; $Z = 3,4$; $Q_0'' = 2$. Во всех случаях $m = 0$.

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$. Но, как известно [10],

$$M(-n, m+1; x) = \frac{\Gamma(m+1) n! R^2}{\Gamma(m+n+1)} L_n^m(x),$$

где $L_n^m(x)$ – присоединенный полином Лагерра. Поэтому, с точностью до постоянных несущественных множителей,

$$\psi_1 = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{-n-m-1} L_n^m \left(n, -i \frac{R^2}{Q} \right) \times \exp \left(i \frac{R^2}{Q} \right) \cdot f(m, \varphi). \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что последнее выражение описывает элегантные пучки Лагерра – Гаусса (eL-G) [12].

Заметим, что решения 2.1–2.4 таблицы 2.1 соответствуют случаям 5.1–5.4 из таблицы 2.1 статьи [8] после последующих переобозначений $P_0'' \rightarrow Q_0''$. Эти решения пока не исследовались и представляют значительный интерес. Несложно видеть, что пучки варианта 1 таблицы 2.1 являются частными случаями пучков варианта 2.4. Однако, поскольку условия 1 описывают пучки Куммера, эквивалентные eL-G пучкам с целыми индексами ν , а ограничения 2.1–2.4 характеризуют пучки Куммера с непрерывными комплексными значениями индекса ν , то мы их разделяем.

3 Графическое моделирование картин интенсивности скалярных циркулярных пучков Куммера комплексного индекса ν без гауссовой аподизации

Нами проводилось аналитическое и графическое исследование пучков Куммера. На рисунках 3.1 и 3.2 представлены результаты графического моделирования картин интенсивности пучков Куммера непрерывного комплексного индекса ν , где взят, для простоты, азимутальный параметр модуляции $b = 1$. В последнем случае картина интенсивности пучка не зависит от азимута, поэтому на рисунках изображены только продольные сечения пучка вдоль оси Z .

Рисунок 3.1, а) иллюстрирует, что, действительно, при $\nu' = 0$ (вариант 2.2) при возрастании R амплитуда пучка $\psi \rightarrow const$. При этом мнимая часть ν'' параметра ν не влияет на условия КИ, деформируется лишь поверхность интенсивности.

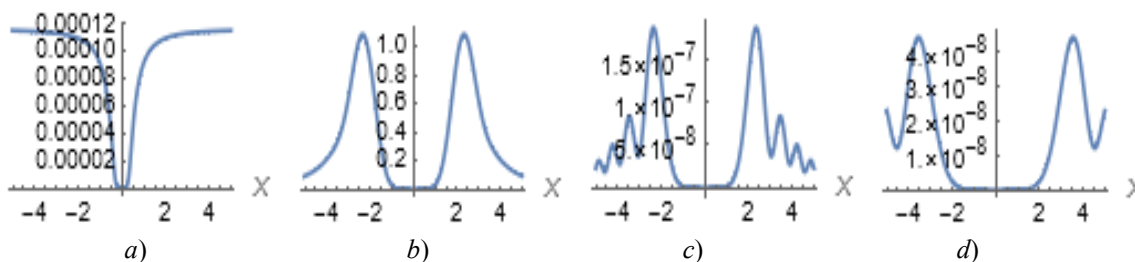


Рисунок 3.2 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка:
 а) $v' = -2$; $v'' = 0$; $Z = 0,02$; $Q_0'' = 0,03$; б) $v' = -3$; $v'' = 0,1$; $Z = 0,9$; $Q_0'' = 0,7$;
 в) $v' = -3$; $v'' = 0$; $Z = 0,9$; $Q_0'' = 0,03$; д) $v' = -3$; $v'' = 0$; $Z = 2$; $Q_0'' = 0,03$. Во всех случаях $m = 4$.

Для пучков Куммера с КИ всегда есть центральный пик (рисунок 3.1, б), с увеличением Z или Q_0'' появляется и растет дополнительно концентрическое кольцо (рисунок 3.1, с и д).

На Рисунке 3.2 везде параметр $m = 4$ и поэтому все пучки полые. Рисунок 3.2, а) иллюстрирует, что, действительно, при $v' = -2$ (вариант 2.2) при возрастании R амплитуда пучка $\psi \rightarrow const$. Картины интенсивности пучков Куммера с КИ всегда представляют собой кольцо (рисунок 3.2, б). При малых значениях параметра Q_0'' вокруг главного кольца появляются небольшие дополнительные кольца, которые возрастают с увеличением Z (рисунок 3.2, с и д).

Заключение

В настоящей работе получены выражения, характеризующие новые типы пучков – 3D скалярные циркулярные световые пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν без гауссовой аподизации. Они характеризуются тремя свободными параметрами: двумя вещественными – (b , m) и двумя комплексными параметрами (Q_0, ν). Введенные здесь пучки можно считать предельными случаями известных 3D циркулярных пучков [7]–[8].

Найдены условия физической реализуемости (конкретнее, КИ) новых типов пучков Куммера с переносимой конечной мощностью. Графическое моделирование их интенсивности подтвердило эти выводы.

Переход от пучков Куммера – Гаусса к новым пучкам Куммера с комплексными значениями параметра ν расширяет класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией. Это создает дополнительные возможности для выбора пучков с наперед заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.

2. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

3. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

4. Bandres, M.A. Vector Helmholtz – Gauss and vector Laplace – Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2157.

5. Gori, F. Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.

6. Гиргель, С.С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.

7. Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

8. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38) – С. 16–20.

9. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – Москва: Мир, 1974. – 418 с.

10. Справочник по специальным функциям; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – Москва: Наука, 1977. – 342 с.

12. Zauderer, E. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams / E. Zauderer // JOSA. A. – 1986. – Vol. 3, № 4. – P. 465–469.

Поступила в редакцию 11.02.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор