УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_63
EDN: UJHSDS

ИДЕМПОТЕНТЫ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

IDEMPOTENTS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются идемпотенты в полиадических группоидах специального вида. Основной результат получен для l-арной группы специального вида, то есть для полиадической группы с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n-арной операции η. В качестве следствий получены результаты для полиадических групп специального вида с $(2s+1)$-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определена на декартовой степени A^k тернарной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, и тернарной операции η.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *идемпотент*, *подстановка.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Идемпотенты в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_63 – EDN: UJHSDS

Abstract. The article focuses on idempotents in polyadic groups of a special form. The main result was obtained for l-ary group of a special form, i. e. for polyadic group with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of a special form and is defined on Cartesian power A^k of n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$, satisfying the condition $\sigma^l = \sigma$, and n-ary operation η. As corollaries there were obtained the results for polyadic groups of a special form with $(2s+1)$-ary operation$\eta_{s,\sigma,k}$, which is defined on Cartesian power A^k of ternary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ which satisfies the condition $\sigma^{2s+1} = \sigma$, and ternary operation η.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary group*, *idempotent*, *substitution.*

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Idempotents in polyadic groupoids of special form / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_63 (in Russian). – EDN: UJHSDS

Введение

Данная статья посвящена изучению идемпотентов в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ специального вида с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, называемой полиадической операцией специального вида. Основной результат будет доказан для l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Определение l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$, можно найти в [1]. При этом на A^k вначале определяется n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$, а затем с помощью неё – l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$.

Можно показать (см., например, [1]), что l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$ можно определить покомпонентно следующим образом. Если $< A, \eta >$ – n-арный группоид,

$$n \geq 2,\ s \geq 1,\ l = s(n-1)+1,\ k \geq 2,\ \sigma \in \mathbf{S}_k.$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_{\mathrm{k}}),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}$$

$$\eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\, \eta(\ldots$$

$$\ldots \eta\,(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots$$

$$\ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ \ldots))).$$

Если n-арная операция η ассоциативна, то

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$

$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}),\ j = 1, \ldots, k,$$

откуда для подстановки σ из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, следует

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\, x_{lj}).$$

Для бинарной операции η l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s+1$, совпадает с $(s+1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$, обозначаемой также символом

$[\ ]_{l,\sigma,k}$. Изучению этой операции посвящена книга [2]. Частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, соответствующими циклу $\sigma = (12 \ldots k)$, являются две полиадические операции Э. Поста [3]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

1 Используемые результаты

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1} влечёт за собой перенос ассоциативности с n-арной операции η на l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$.

***Теорема* 1.2** [1]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

Тождественность подстановки σ^{l-1} переносит с n-арной группы $< A, \eta >$ на l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не только ассоциативность, но и свойство быть «полиадической группой».

***Теорема* 1.3** [1]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа.*

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называют её *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{k(n-1)}x) = x,\ \ \eta(xe_1 \ldots e_{k(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Критерии нейтральности последовательности элементов n-арной группы содержатся в следующем предложении.

***Предложение* 1.1** [3]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, $k \geq 1$, $e_1, \ldots, e_{k(n-1)} \in A$, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$ – нейтральная*;

2) *существует элемент $a \in A$ такой, что* $\eta(e_1 \ldots e_{k(n-1)}a) = a$;

3) *существует элемент $a \in A$ такой, что* $\eta(ae_1 \ldots e_{k(n-1)}) = a$.

Множество всех идемпотентов полиадического группоида $< A, \eta >$ будем обозначать символом $\mathbf{I}(A, \eta)$.

Определения и основные свойства n-арной группы, а также более подробную информацию о нейтральных и обратных последовательностях можно найти в книгах [4], [5].

2 Общий случай

Легко проверяется, что для любого идемпотента ε n-арного группоида $< A, \eta >$ элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})$ является идемпотентом в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Это следует и из следующего предложения.

***Предложение* 2.1.** *Если $< A, \eta >$ – n-арный группоид, то элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется условие*

$$\eta(\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}$$
$$\eta(\varepsilon_{\sigma^{n-1}(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\eta(\ldots$$
$$\ldots \eta(\varepsilon_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ \ldots))) = \varepsilon_j. \qquad (2.1)$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{\varepsilon}$ – идемпотент в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \ldots \boldsymbol{\varepsilon}}_{l}) = \boldsymbol{\varepsilon},$$

то есть

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \ldots (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)}_{l}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k).$$

Применив к последнему равенству приведённое во введении определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, получим равенство (2.1).

Если теперь компоненты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ определяются равенством (2.1), то верно последнее равенство, то есть $\boldsymbol{\varepsilon}$ – идемпотент в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Предложение доказано.

***Следствие* 2.1.** *Если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям*

$$\eta(\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-1}(1)}) = \varepsilon_1,$$
$$\ldots \qquad (2.2)$$
$$\eta(\varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\varepsilon_{\sigma^2(k)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-1}(k)}) = \varepsilon_k.$$

Если в следствии 2.1 положить $n = 2$, то получим предложение 3.8.1 из [2].

Для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, элементы $\varepsilon_{\sigma^{l-1}(j)}$ в (2.2) заменяются элементами ε_j. При этом l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, согласно теореме 1.2, становится l-арной полугруппой.

***Следствие* 2.2.** *Если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l-арной полугруппе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям*

$$\eta(\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}\varepsilon_1) = \varepsilon_1,$$
$$\ldots \qquad (2.3)$$
$$\eta(\varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\varepsilon_{\sigma^2(k)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)}\varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

Если в следствии 2.2 положить $n = 2$, то получим следствие 3.8.2 из [2].

Применяя к следствию 2.2 теорему 1.3, получим

***Следствие* 2.3.** *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ является* *идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *удовлетворяют условиям* (2.3).

Ввиду предложения 1.1, следующие два следствия равносильны следствию 2.3.

***Следствие* 2.4.** *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, последовательности*

$$\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}, \ldots, \varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)}$$

являются нейтральными в $< A, \eta >$.

***Следствие* 2.5.** *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, последовательности*

$$\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\sigma(k)}\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)}\varepsilon_k$$

являются нейтральными в $< A, \eta >$.

Если в следствиях 2.4 и 2.5 положить $n = 2$, то получим следствие 3.8.3 из [2].

В качестве подстановки σ в следствиях 2.2 – 2.5 можно взять любую подстановку σ из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющую условию $\sigma^n = \sigma$, так как она будет удовлетворять и условию

$$\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma.$$

В частности, можно взять любой цикл σ длины $n - 1$ из $\mathbf{S}_k$, если $n \leq k + 1$. Например, цикл $\sigma = (12 \ldots n - 1)$.

3 Основной результат

В достаточном утверждении следствия 2.3 число равенств в (2.3) можно уменьшить. Для этого нам понадобится

***Лемма* 3.1.** *Пусть* $l \geq 2$, $k \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$, $\sigma^l = \sigma$, $\sigma(j) = m$ *для некоторых* $j, m \in \{1, \ldots, k\}$, $a_1, \ldots, a_k$ *– элементы n-арной группы* $< A, \eta >$. *Если*

$$\eta(a_ja_{\sigma(j)}a_{\sigma^2(j)}\ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}a_j) = a_j, \quad (3.1)$$

то

$$\eta(a_ma_{\sigma(m)}a_{\sigma^2(m)}\ldots a_{\sigma^{l-2}(m)}a_m) = a_m. \quad (3.2)$$

Доказательство. Так как $\sigma(j) = m$, то

$$a_{\sigma(j)} = a_m,\ a_{\sigma^s(j)} = a_{\sigma^{s-1}(\sigma(j))} = a_{\sigma^{s-1}(m)}$$

для любого $s \geq 2$, в частности,

$$a_j = a_{\sigma^{l-1}(j)} = a_{\sigma^{l-2}(m)}.$$

Поэтому из (3.1) следует

$$\eta(a_ja_ma_{\sigma(m)}\ldots a_{\sigma^{l-3}(m)}a_{\sigma^{l-2}(m)}) = a_j,$$

откуда

$$\eta(\beta\eta(a_ja_ma_{\sigma(m)}\ldots a_{\sigma^{l-3}(m)}a_{\sigma^{l-2}(m)})a_m) = \eta(\beta a_ja_m),$$

где β – любая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для элемента a_j. Из полученного равенства ввиду нейтральности последовательности βa_j следует (3.2). □

***Замечание* 3.1.** В качестве обратной последовательности β из леммы 3.1 можно взять последовательность $\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}$ при $n \geq 3$ или обратный элемент a_j^{-1} для элемента a_j при $n = 2$.

***Следствие* 3.1.** *Пусть* $l \geq 2$, $k \geq 2$, σ *– цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины* k, $\sigma^l = \sigma$, $a_1, \ldots, a_k$ *– элементы n-арной группы* $< A, \eta >$. *Если равенство* (3.1) *верно для некоторого* $j \in \{1, \ldots, k\}$, *то оно верно для любого* $j \in \{1, \ldots, k\}$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k,$$

$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p$ *– разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *если элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *является идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *то для каждой компоненты* ε_m, *индекс которой подстановка* σ *оставляет неподвижным, верно равенство*

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_m \ldots \varepsilon_m}_{l}) = \varepsilon_m, \quad (3.3)$$

а для каждого цикла σ_r $(r = 1, \ldots, p)$ *верно равенство*

$$\eta(\varepsilon_{i_r}\varepsilon_{\sigma(i_r)}\varepsilon_{\sigma^2(i_r)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)}\varepsilon_{i_r}) = \varepsilon_{i_r}, \quad (3.4)$$

где i_r *– любой символ, входящий в запись цикла* σ_r;

2) *если для каждой компоненты* ε_m, *индекс которой подстановка* σ *оставляет неподвижным, верно равенство* (3.3), *а для каждого цикла* σ_r $(r = 1, \ldots, p)$ *верно равенство* (3.4), *где* i_r *– некоторый символ, входящий в запись цикла* σ_r, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *является идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Доказательство. Дополним разложение из формулировки теоремы циклами длины 1:

$$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p\sigma_{p+1} \ldots \sigma_t,$$

где $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_t$ – все циклы длины 1. Пусть

$$X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_t$$

– σ-орбиты, соответствующие циклам $\sigma_1, \ldots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_t$, то есть

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_p \cup X_{p+1} \cup \ldots \cup X_t,$$

$$X_r \cap X_s = \varnothing,\ r \neq s,$$

где $X = \{1, 2, \ldots, k\}$. Через l_r обозначим длину цикла σ_r $(r = 1, \ldots, t)$ или, что то же самое, мощность орбиты X_r. Ясно, что

$$l_{p+1} = \ldots = l_t = 1.$$

Кроме того, положим

$$X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \ldots, X_t = \{i_t\},$$

то есть $i_{p+1}, \ldots, i_t$ – все символы, которые подстановка σ оставляет неподвижными.

1) Согласно следствию 2.3, компоненты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ идемпотента $\boldsymbol{\varepsilon}$ удовлетворяют равенствам (2.3). В этих равенствах каждому из неподвижных символов $i_{p+1}, \ldots, i_t$ соответствует равенство (3.4) для $r = p + 1, \ldots, t$, которое совпадает с равенством

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_{i_r} \ldots \varepsilon_{i_r}}_{l}) = \varepsilon_{i_r},$$

то есть верны равенства (3.3), если $m \in \{i_{p+1}, \ldots, i_t\}$.

Для переставляемых символов равенства (3.4) содержатся среди равенств (2.3).

2) Если подстановка σ оставляет неподвижным индекс m компоненты ε_m, то равенство (3.3) совпадает с равенством

$$\eta(\varepsilon_m\varepsilon_{\sigma(m)}\varepsilon_{\sigma^2(m)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(m)}\varepsilon_m) = \varepsilon_m.$$

Пусть теперь $\sigma(m) \neq m$, и пусть для определённости символ m принадлежит σ-орбите X_r для некоторого $r \in \{1, \ldots, p\}$. Если i_r – некоторый элемент σ-орбиты X_r, то

$$\sigma_r = (i_r\ \sigma(i_r)\ \sigma^2(i_r) \ldots \sigma^{l_r-1}(i_r)).$$

Для сокращения записей положим

$$m_1 = i_r,$$
$$m_2 = \sigma(i_r) = \sigma(m_1),$$
$$m_3 = \sigma^2(i_r) = \sigma(m_2),$$
$$\ldots$$
$$m_{l_r} = \sigma^{l_r-1}(i_r) = \sigma(m_{l_r-1}).$$

По лемме 3.1 из равенства (3.4), справедливого для некоторого символа $m_1 = i_r$, входящего в запись цикла σ_r, следуют $l_r - 1$ равенств для остальных символов этого цикла:

$$\eta(\varepsilon_{m_2}\varepsilon_{\sigma(m_2)}\varepsilon_{\sigma^2(m_2)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(m_2)}\varepsilon_{m_2}) = \varepsilon_{m_2},$$
$$\ldots$$
$$\eta(\varepsilon_{m_{l_r}}\varepsilon_{\sigma(m_{l_r})}\varepsilon_{\sigma^2(m_{l_r})} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(m_{l_r})}\varepsilon_{m_{l_r}}) = \varepsilon_{m_{l_r}},$$

то есть равенство (3.4) верно для любого символа i_r, входящего в запись цикла σ_r.

Таким образом, все компоненты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям (2.3) независимо от того оставляет подстановка σ их индексы неподвижными или переставляет. По следствию 2.3 элемент **ε** является идемпотентом в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. □

***Замечание* 3.2.** Ясно, что каждому циклу σ_r $(r = 1, \ldots, p)$ длины $l_r \geq 2$ в (2.3) соответствует l_r равенств. Из теоремы 3.1 следует, что в достаточном утверждении следствия 2.3 эти l_r равенств можно заменить одним равенством. Следовательно, число равенств в (2.3) можно уменьшить на $l_1 + \ldots + l_p - p$. Таким образом, в достаточном утверждении следствия 2.3 k равенств в (2.3) можно заменить следующими t равенствами

$$\eta(\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{\sigma(i_1)}\varepsilon_{\sigma^2(i_1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_1)}) = \varepsilon_{i_1},$$
$$\ldots$$
$$\eta(\varepsilon_{i_p}\varepsilon_{\sigma(i_p)}\varepsilon_{\sigma^2(i_p)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_p)}) = \varepsilon_{i_p},$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_{i_{p+1}} \ldots \varepsilon_{i_{p+1}}}_{l}) = \varepsilon_{i_{p+1}}, \ldots, \eta(\underbrace{\varepsilon_{i_t} \ldots \varepsilon_{i_t}}_{l}) = \varepsilon_{i_t}.$$

Так как цикл σ из $\mathbf{S}_k$ длины k имеет порядок k, то условие $\sigma^l = \sigma$ равносильно равенству $l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$. Поэтому теорема 3.1 позволяет сформулировать

***Следствие* 3.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа*, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k$, *σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $l - 1 = tk$ *для некоторого* $t \geq 1$. *Тогда*:

1) *если элемент* **ε** *является идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *то*

$$\eta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{t}\varepsilon_j) = \varepsilon_j \tag{4.3}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, *где*

$$\alpha = \varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)};$$

2) *если для некоторого* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *верно* (4.3), *то элемент* **ε** *является идемпотентом в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Следствие 3.2 можно сформулировать иначе, явно указав множество $\mathbf{I}(A^k, \eta_{s,\sigma,k})$ всех идемпотентов l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Следствие* 3.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $l - 1 = tk$ *для некоторого* $t \geq 1$. *Тогда*

$$\mathbf{I}(A^k, \eta_{s,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)} \ldots \varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)}}_{t}\varepsilon_j) = \varepsilon_j\}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. *В частности,*

$$\mathbf{I}(A^k, \eta_{s,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)} \ldots \varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)}}_{t}\varepsilon_1) = \varepsilon_1\}.$$

Полагая в следствии 3.3 $\sigma = (1\ 2 \ldots k)$, $j = 1$, получим

***Следствие* 3.4.** *Если* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, k делит* $l - 1$, *то*

$$\mathbf{I}(A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k \ldots \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k}_{t}\varepsilon_1) = \varepsilon_1\}.$$

Считая в теореме 3.1 и следствии 3.4 $< A, \eta >$ – группой $(n = 2)$, получим в качестве следствий соответственно теорему 3.8.5 и следствие 3.8.9 из [2].

Полагая в следствиях 3.3 и 3.4 $k = n - 1$, получим ещё два следствия.

***Следствие* 3.5.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, σ – цикл длины n – 1 из* $\mathbf{S}_{n-1}$. *Тогда*

$$\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} \mid$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)} \ldots \varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}}_{s}\varepsilon_j) = \varepsilon_j\}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, n - 1\}$. *В частности,*

$$\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} \mid$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(1)} \ldots \varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(1)}}_{s}\varepsilon_1) = \varepsilon_1\}.$$

***Следствие* 3.6.** *Если* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, то*

$$\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,(12\ldots n-1),n-1}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} \mid$$
$$\eta(\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \ldots \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}}_{s}\varepsilon_1) = \varepsilon_1\}.$$

***Замечание* 3.3.** Теорема 3.1 и следствия из неё могут быть переформулированы на языке нейтральных последовательностей.

4 Тернарный случай ($n = 3$)

Сформулируем следствия из результатов, полученных в разделах 2 и 3, считая $< A, \eta >$ тернарным группоидом.

Предложению 2.1 и следствиям 2.1–2.5 соответствуют следующие следствия.

***Следствие* 4.1.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарный группоид, то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *выполняется условие*

$$\eta(\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\,\eta(\varepsilon_{\sigma^2(j)}\varepsilon_{\sigma^3(j)}\,\eta(\ \ldots$$

$$\eta\,(\varepsilon_{\sigma^{2(s-1)}(j)}\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(j)}\varepsilon_{\sigma^{2s}(j)})\ \ldots\ ))) = \varepsilon_j.$$

***Следствие* 4.2.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная полугруппа, то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *удовлетворяют условиям*

$$\eta(\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\,\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s}(1)}) = \varepsilon_1,$$

$$\ldots$$

$$\eta(\varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\,\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s}(k)}) = \varepsilon_k.$$

***Следствие* 4.3.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная полугруппа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арной полугруппе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *удовлетворяют условиям*

$$\eta(\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\,\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(1)}\varepsilon_1) = \varepsilon_1,$$

$$\ldots$$

$$\eta(\varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\,\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(k)}\varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

***Следствие* 4.4.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *удовлетворяют равенствам из следствия* 4.3.

***Следствие* 4.5.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, последовательности*

$$\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\,\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(1)},\ \ldots,\ \varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\,\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(k)}$$

являются нейтральными в $< A, \eta >$.

***Следствие* 4.6.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, последовательности*

$$\varepsilon_{\sigma(1)}\ \varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(1)}\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{\sigma(k)}\ \varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(k)}\varepsilon_k$$

являются нейтральными в $< A, \eta >$.

Теореме 3.1 соответствует следующее

***Следствие* 4.7.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа,* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k$, $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p$ – *разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$. *Тогда*:

1) *если элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *то для каждой компоненты* ε_m, *индекс которой подстановка* σ *оставляет неподвижным, верно равенство*

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_m\ldots\varepsilon_m}_{2s+1}) = \varepsilon_m, \tag{4.1}$$

а для каждого цикла σ_r $(r = 1, \ldots, p)$ *верно равенство*

$$\eta(\varepsilon_{i_r}\varepsilon_{\sigma(i_r)}\varepsilon_{\sigma^2(i_r)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(i_r)}\varepsilon_{i_r}) = \varepsilon_{i_r}, \tag{4.2}$$

где i_r – *любой символ, входящий в запись цикла* σ_r;

2) *если для каждой компоненты* ε_m, *индекс которой подстановка* σ *оставляет неподвижным, верно равенство* (4.1), *а для каждого цикла* σ_r $(r = 1, \ldots, p)$ *верно равенство* (4.2), *где* i_r – *некоторый символ, входящий в запись цикла* σ_r, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *является идемпотентом в* $(2s + 1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Следствию 3.6 соответствует следующее

***Следствие* 4.8.** *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, то*

$$\mathbf{I}(A^2, \eta_{s,(12),2}) =$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in A^2 \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_1\varepsilon_2}_{s}\varepsilon_1) = \{\varepsilon_1\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

2. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Издательский центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. *Русаков, С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

5. *Гальмак, А.М. n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 14.04.2022.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор