**МАТЕМАТИКА**

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_89

# ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

**А.П. Старовойтов**

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

# POLYORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS

**A.P. Starovoitov**

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** В статье введены в рассмотрение кратные аналоги определителей и матриц Грама, изучается возможность построения полиортогональных систем функций с помощью процесса полиортогонализации произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$ в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1,...,\mu_k$. Доказанные утверждения являются обобщением теоремы Грамма – Шмидта об ортогонализации.

**Ключевые слова:** *аппроксимации Padé*, *полиортогональные многочлены*, *нормальный индекс*, *совершенная система*, *определители Грама*.

**Для цитирования:** *Старовойтов*, *А.П.* Полиортогональные системы функций / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 89–93. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_89

**Abstract.** This article introduces multiple analogs of determinants and Gram matrices, studies the possibility of constructing polyorthogonal systems of functions using the process of polyorthogonalization of an arbitrary finite subsystem of a linearly independent system of functions $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$ in Pre-Hilbert function spaces generated by measures $\mu_1,...,\mu_k$. The proven statements are a generalization of the Gram – Schmidt orthogonalization theorem.

**Keywords:** *Padé approximations*, *polyorthogonal polynomials*, *normal index*, *perfect system*, *Gram determinant*.

**For citation:** *Starovoitov*, *A.P.* Polyorthogonal systems of functions / A.P. Starovoitov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 89–93. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_89 (in Russian)

## Введение

В работах [1], [2] найдены явные детерминантные представления полиортогональных многочленов I и II типов, обобщающие классическую формулу Грама – Шмидта [3, гл. 4, § 1] для представления ортогонального многочлена, полученного в результате ортогонализации линейно независимой системы функций $\{1,x,...,x^n\}$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой $\mu$ [4]. Доказательство формулы Грама – Шмидта в случае произвольной линейно независимой системы функций

$$\varphi^n=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$$

(см., например, монографию [3, гл. 3, § 1]) существенно опирается на свойствах определителей и матриц, введенных в рассмотрение Й. Грамом [5]. В данной статье определены кратные аналоги определителей и матриц Грама и изучается возможность построения полиортогональных систем функций с помощью процесса *полиортогонализации* произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций

$$\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$$

в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1,...,\mu_k$.

Выбор функциональных пространств объясняется лишь желанием приблизить формулировки утверждений к классическим. На самом деле, все основные результаты статьи справедливы и в случае, когда предгильбертовы пространства задаются произвольными скалярными произведениями.

## 1 Полиортогональные функции

Будем придерживаться терминалогии монографии [6]. Пусть $\mu_1,...,\mu_k$ – положительные борелевские меры на вещественной прямой, носителями которых являются отрезки $\Delta_1,...,\Delta_k$. Рассмотрим систему функций

$$\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\},$$

каждая из которых измерима на отрезке $\Delta_j$ относительно меры $\mu_j$ при всех $j=1,...,k$. Будем считать, что система $\varphi$ линейно независима на каждом из отрезков $\Delta_j$ и

$$\int_{\Delta_j}|\varphi_p(x)|^2\,d\mu_j(x)<+\infty,\ j=1,...,k;\ p=0,1,.... \quad (1.1)$$

Если выполняются условия (1.1), то кратко будем писать, что $\varphi\in L^2_\mu$, $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$. Скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой $\mu_j$, обозначим через

$$(f,g)^j = \int_{\Delta_j} f(x)g(x)d\mu_j(x).$$

Везде в дальнейшем предполагаем, что $\varphi \in L^2_\mu$. Множество $k$-мерных мультииндексов (индексов) $n=(n_1,...,n_k)$, т. е. упорядоченных $k$ целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $n=(n_1,...,n_k)$ – это сумма $|n|:=n_1+...+n_k$.

***Определение* 1.1.** *Пусть* $n=(n_1,...,n_k)\in\mathbb{Z}^k_+$ – *ненулевой мультииндекс. Тогда*

$$\psi_n(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+...+\alpha_{|n|}\varphi_{|n|}(x),$$

*где* $\alpha_j\in\mathbb{R}$ *и* $\alpha_0^2+...+\alpha_{|n|}^2\neq 0$, *будем называть n-ой полиортогональной функцией для набора мер* $\mu$, *порожденной системой* $\varphi$, *если*

$$\int_{\Delta_j}\psi_n(x)\varphi_p(x)d\mu_j(x)=0,\quad p=0,1,...,n_j-1;\ j=1,...,k. \tag{1.2}$$

*Здесь предполагается, что* $n_j\neq 0$. *Если* $n_{j_0}=0$, *то в* (1.2) *индекс j пробегает значения* $\{1,...,j_0-1,j_0+1,....,k\}$, *т. е. мера* $\mu_{j_0}$ *в определении полиортогональной функции* $\psi_n(x)$ *не учитывается.*

В том случае, когда $\varphi=\{1,x,x^2,...\}$, каждой мере $\mu_j$ можно поставить в соответствие марковскую функцию

$$f_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{d\mu_j(x)}{z-x}, z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j, j=1,...,k \tag{1.3}$$

разложение которой в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид

$$f_j(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{s_p^j}{z^{i+1}},$$

где

$$s_p^j=(x^\alpha,x^\beta)^j=\int_{\Delta_j}x^p d\mu_j(x)(p=0,1,...)$$

– последовательность степенных моментов меры $\mu_j$ (предполагается, что $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^1_+$, $\alpha+\beta=p$). При этом $n$-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является $n$-ым полиортогональным многочленом $Q(x)=Q_{|n|}(x)$ и соотношения ортогональности (1.2) примут вид

$$\int_{\Delta_j}Q(x)\cdot x^p d\mu_j(x)=0, p=0,1,...,n_j-1; j=1,2,...,k.$$

Если в определении 1.1 положить $k=1$ (либо, что тоже самое, индекс $n=(n_1,0,...,0)$), то отождествляя меру $\mu_1$ с $\mu$, а $n_1$ с $n\in\mathbb{Z}^1_+$, будем находится в классической ситуации, т. е. $n$-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является $n$-ой ортогональной функцией и для неё имеет место формула Грама – Шмидта [3, гл. 3, § 1]

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \dots & (\varphi_n,\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_n,\varphi_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{n-1}) & (\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_n,\varphi_{n-1})\\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x)\end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

В представлении

$$\psi_n(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x),$$

которое легко получить из формулы (1.4), коэффициент $\alpha_n$ равен определителю Грама

$$G_n=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{n-1}) & (\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})\end{vmatrix} \tag{1.5}$$

системы функций $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x)\}$. Хорошо известно [3, гл. 3, § 1], что определитель Грама $G_n$ системы $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x)\}$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта система линейно независима на отрезке $\Delta$.

Полиортогональная функция условиями (1.2) определяется не однозначно, а с точностью до числового множителя. Эта неединственность может быть и более существенной. Приведём соответствующий пример.

***Пример* 1.1.** Пусть $k=2$, $n=(2,1)$, $d\mu_1(x)=dx$, $d\mu_2(x)=xdx$, где $dx$ – мера Лебега, носитель которой $\Delta=[0,1]$. Тогда

$$\psi_n(x)=ax^3+bx^2-\left(b+\frac{9a}{10}\right)x+\frac{a}{5}+\frac{b}{6}$$

где $a$ и $b$ – любые действительные числа не равные нулю одновременно.

***Определение* 1.2.** *Будем говорить, что n-я полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *однозначно определяется условиями* (1.2), *если для любых двух таких функций* $\psi_n(x)$, $\psi_n^*(x)$ *найдётся действительное число* $\lambda$, *что* $\psi_n(x)\equiv\lambda\psi_n^*(x)$ *на всех отрезках* $\Delta_j$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n\in\mathbb{Z}^k_+$ и систему $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$, при которых $n$-я полиортогональная функция определяется однозначно. В одномерном случае однозначность вытекает из линейной независимости системы $\varphi$. Пример 1.1 показывает, что уже при $k=2$ это не так. Далее будет установлено, что $n$-ая полиортогональная функция всегда существует, а её однозначность равносильна условию, при котором соответствующая кратная матрица Грама имеет максимальный ранг.

**2 Критерий единственности. Теорема о полиортоганализации**

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для каждого $n_j \neq 0$ определим матрицу порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^j \\ (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_1)^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_j-1})^j & (\varphi_1,\varphi_{n_j-1})^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_j-1})^j \end{vmatrix},$$

а затем определим матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^k \end{bmatrix}.$$

При $n_j = 0$ матрица $F_n$ не содержит блок-матрицу $F^j$. Если, например, мультииндекс $n = (n_1, 0, ..., 0)$, то матрица $F_n$ состоит только из одного блока $F^1$ и является матрицей Грама: она состоит из элементов определителя (1.4), стоящих выше последней строки этого определителя.

Если к матрице $F_n$ добавить в качестве последней строки строку

$$E(x) = \left(\varphi_0(x)\varphi_1(x)...\varphi_{|n|}(x)\right),$$

то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$det\begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^1 & (\varphi_1,\varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_1-1})^1 & (\varphi_1,\varphi_{n_1-1})^1 & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_1-1})^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_0)^k & (\varphi_1,\varphi_0)^k & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_k-1})^k & (\varphi_1,\varphi_{n_k-1})^k & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_k-1})^k \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_{|n|}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

***Определение* 2.1.** *Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ будем называть слабо нормальным для $\mu$, если ранг матрицы $F_n$ максимальный, т.е. равен $|n|$.*

В примере 1.1 индекс $n = (2,1)$, а $\text{rang}F_n = 2$. Поэтому этот индекс не является слабо нормальным для рассматриваемых в этих примерах мер.

***Определение* 2.2.** *Систему мер $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ будем называть слабо совершенной, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются слабо нормальными для $\mu$.*

Сформулируем и докажем основной результат.

***Теорема* 2.1.** *Для того, чтобы для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и системы мер $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ определялась условиями* (1.2) *однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был слабо нормальным для $\mu$, т. е. $\text{rang}F_n = |n|$.*

*Если $\text{rang}F_n = |n|$, то при определённом выборе нормирующего множителя n-ая полиортогональная функция представима в виде*

$$\psi_n(x) = det\begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

*Доказательство*. Пусть функция

$$\psi_n(x) = b_0\varphi_0(x) + ... + b_{|n|}\varphi_{|n|}(x),$$

где $b_0^2 + ... + b_{|n|}^2 \neq 0$, удовлетворяет условиям (1.2). В силу того, что $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ линейно независима на каждом из отрезков $\Delta_j$, а коэффициенты $b_0, ..., b_{|n|}$ все одновременно не равны нулю, функция $\psi_n(x)$ на каждом из отрезков $\Delta_j$ тождественно не равна нулю. Тогда условия (1.2) равносильны системе линейных уравнений для определения $b_0, ..., b_{|n|}$, которая в матричной форме примет вид:

$$F_n \cdot b^T = \theta^T, \quad (2.3)$$

где $b = (b_0, b_1, \dots, b_{|n|})$ – матрица-строка, а $\theta$ – матрица-строка порядка $1 \times (|n|+1)$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (2.3) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то, согласно теореме Кронекера – Капелли, она имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rang}F_n = |n|$. В этом случае все её ненулевые решения можно получить умножением фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 2.1 доказана.

Пусть теперь $\text{rang}F_n = |n|$. Покажем, что в этом случае функция $\psi_n(x)$, определённая формулой (2.2), действительно является *n*-ой полиортогональной функцией. Разлагая определитель в (2.2) по элементам последней строки и, учитывая, что $\text{rang}F_n = |n|$, легко заметить, что справедливо представление

$$\psi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + ... + \alpha_{|n|}\varphi_{|n|}(x) \text{ и } \alpha_0^2 + ... + \alpha_{|n|}^2 \neq 0.$$

Остаётся доказать, что эта функция $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям (1.2). Для этого, предположив, что $n_j \neq 0$, умножим последнюю строку определителя в (2.2) на $\varphi_p(x)$ и применим оператор интегрирования $J_j f := \int_{\Delta_j} f(x)d\mu_j(x)$ к последней строке полученного в результате домножения определителя. Таким образом приходим к равенству

$$\int_{\Delta_j} \psi_n(x)\varphi_p(x)d\mu_j(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^j \\ (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_1)^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_j-1})^j & (\varphi_1,\varphi_{n_j-1})^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_j-1})^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0,\varphi_p)^j & (\varphi_1,\varphi_p)^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_p)^j \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

При $p = 0,1,...,n_j - 1$ определитель в (2.4) имеет две одинаковые строки. Поэтому он равен нулю. Следовательно условия (1.2) для функции $\psi_n(x)$ выполняются. □

### 3 Замечания и следствия

В первую очередь отметим, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является слабо нормальным для $\mu$, то функция, определённая равенством (2.3), не являются $n$-ой полиортогональной функцией для $\mu$. Так, для набора $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ из примера 1.1 при $n = (2,1)$

$$\psi_n(x) = ax^3 + bx^2 - \left(b + \frac{9a}{10}\right)x + \frac{a}{5} + \frac{b}{6},$$

однако, если эту функцию находить по формуле (2.3), то получим, что $\psi_n(x) \equiv 0$.

Из теоремы 2.1 легко получить

***Следствие.*** *Полиортогональная функция $\psi_n(x)$ определяется однозначно для всех ненулевых мультииндексов $n \in \mathbb{Z}_+^k$ тогда и только тогда, когда система $\mu$ является слабо совершенной.*

Заметим, что компонента $n_j$ мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ определяет насколько значима мера $\mu_j$ в определении полиортогональной функции: чем больше $n_j$, тем больше условий в (1.2) с участием меры $\mu_j$. Таким образом, число $n_j$ количественно характеризует вклад меры $\mu_j$ в построение $n$-ой полиортогональной функции $\psi_n(x)$. В частности, если, например, $n = (n_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то мы находимся в условиях теоремы Грама – Шмидта, и формула (2.2) в точности совпадает с классической формулой (1.4).

Рассмотрим мультииндексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$, имеющие заданный порядок $m$. Число таких мультииндексов равно $C_{m+k-1}^m$. Поэтому при $k > 1$ на множестве всех $n$-ых полиортогональных функций с фиксированным порядком индекса $n$ нельзя ввести естественную нумерацию, как это имеет место, когда $k = 1$.

Подробнее рассмотрим случай, когда $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$. Тогда $n$-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является $n$-ым полиортогональным многочленом $Q(x) = Q_{|n|}(x)$. Особый интерес представляет набор мер $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$, при которых система $\mathbf{f} = \{f_1(x), ..., f_k(x)\}$, состоящая из функций Маркова (1.3), является совершенной.

***Определение* 3.1.** *Пусть $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$. Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называют нормальным для набора $\mu$ (для системы марковских функций $\mathbf{f}$), если для любого $n$-го полиортогонального многочлена $Q_{|n|}(x)$ имеем $\deg Q_{|n|} = |n|$.*

*Систему мер $\mu$ (систему марковских функций $\mathbf{f}$) называют совершенной, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для $\mu$.*

Отметим, что при $n \in \mathbb{Z}_+^1$ $n$-ый ортогональный многочлен $Q(x)$ является знаменателем $n$-ой подходящей дроби (или, что тоже самое, $n$-ой аппроксимации Паде) так называемой чебышёвской непрерывной дроби марковской функции. Точно также при $n \in \mathbb{Z}_+^k$ $n$-ый полиортогональный многочлен $Q_{|n|}(x)$ можно определить (см., например, [6]) как общий знаменатель совместных аппроксимаций Паде для системы $\mathbf{f}$. Для некоторых известных совершенных систем $\mathbf{f}$ полиортогональные многочлены хорошо изучены и нашли применение в различных областях алгебры, анализа, теоретической физики, в том числе, в рамках теории аппроксимаций Паде (см., например, [7]–[16]).

Доказано [6, с. 158], что $n$-ый полиортогональный многочлен $Q_{|n|}(x)$ имеет ровно $n_j$ простых нулей внутри отрезка $\Delta_j$, $j = 1, ..., k$. Поэтому, если отрезки $\{\Delta_j\}_{j=1}^k$ попарно не перекрываются (не имеют общих внутренних точек), то система $\mathbf{f}$, состоящая из марковских функций (1.3), совершенна.

Приведём пример несовершенной системы марковских функций, носители мер которых перекрываются.

***Пример* 3.1.** Пусть $k = 2$, $n = (1,1)$,

$$d\mu_1(x) = dx, \ \Delta_1 = [0,1];$$

$$d\mu_2(x) = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \ \Delta_2 = [0,1],$$

где $dx$ – мера Лебега. Тогда при определённом выборе нормирующего множителя

$$Q_2(x) = \frac{1}{24}x - \frac{1}{48}.$$

Поскольку $\deg Q_2 = 1$, то индекс $n = (1,1)$ не является нормальным, а соответствующая система $\mathbf{f} = \{f_1(x), f_1(x)\}$ марковских функций не является совершенной.

Как уже было сказано, система функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)\}$ линейно независима на отрезке ортогональности $\Delta$ тогда и только тогда, когда определитель Грама $G_n \neq 0$. Кратным аналогом определителя $G_n$ является определитель

$$G_n^k = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)^1 & (\varphi_1, \varphi_0)^1 & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_0)^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_1-1})^1 & (\varphi_1, \varphi_{n_1-1})^1 & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_{n_1-1})^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_0)^k & (\varphi_1, \varphi_0)^k & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_0)^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_k-1})^k & (\varphi_1, \varphi_{n_k-1})^k & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_{n_k-1})^k \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $G_n^1 = G_n$. Можно показать, что если $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{|n|-1}(x)\}$ линейна зависима на каждом из отрезков $\Delta_j$, то $G_n^k = 0$. Обратное утверждение не верно. В подтверждение приведем пример.

***Пример* 3.2.** Пусть $k=2$, $d\mu_1(x) = dx$, $\Delta_1 = [0,1]$; $d\mu_2(x) = dx$, $\Delta_2 = [-1,1]$, а $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$, где $dx$ – мера Лебега. Тогда для мультииндексов $n$ равных (1,2), (1,4), (1,6) определитель $G_n^2 = 0$.

В заключении сделаем ещё одно замечание. В [1] доказано, что индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для системы марковских функций (1.3) тогда и только тогда, когда $G_n^k \neq 0$. Если $G_n^k \neq 0$, то $\operatorname{rang} F_n = |n|$. Поэтому любой нормальный индекс для системы $\mathbf{f}$ марковских функций (1.3) является слабо нормальным для $\mathbf{f}$, а любая совершенная система $\mathbf{f}$ является слабо совершенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старовойтов*, *А.П.* О явном виде полиортогональных многочленов / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Известия вузов. Математика. – 2021. – № 4. – С. 80–89.

2. *Старовойтов*, *А.П.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 424–433.

3. *Натансон*, *И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

4. *Schmidt*, *E.* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener / E. Schmidt // Math. Ann. – 1907. – Vol. 63. – P. 433–476.

5. *Gram*, *I.P.* Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate / I.P. Gram // Journ. für Math. – 1883. – Vol. 94. – P. 41–73.

6. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.

7. *Beukers*, *F.* A note on the irrationality of $\zeta(1.2)$ and $\zeta(1.3)$ / F. Beukers // Bull. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 11. – P. 268–272.

8. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде для систем Никишина и иррациональность числа $\zeta(1.3)$ / В.Н. Сорокин // УМН. – 1994. – Т. 49, № 2. – С. 167–168.

9. *Калягин*, В.А. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.

10. *Aptekarev*, *A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

11. *Daems*, *E.* Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions / E. Daems, A.B.J. Kuijlaars // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 146, № 1. – P. 91–114.

12. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Singular values of products of Ginibre random matrices, multiple orthogonal polynomials and hard edge scalings / A.B.J. Kuijlaars, L. Zhang // Comm. Math. Phys. – 2014. – Vol. 332, № 2. – P. 750–781.

13. *Mukhin*, *E.* Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe Ansatz conjecture / E. Mukhin, A. Varchenko // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, № 11. – P. 5383–5418.

14. *Суетин*, *С.П.* Полиномы Эрмита – Паде и квадратичные аппроксимации Шафера для многозначных аналитических функций / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2020. – Т. 75, № 4 (454). – С. 213–214.

15. *Икономов*, *Н.Р.* Алгоритм Висковатова для полиномов Эрмита – Паде ряда / Н.Р. Икономов, С.П. Суетин // Матем. сб. – 2021. – Т. 212, № 9. – С. 94–118.

16. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде функции Вейля и её производной для дискретных мер / В.Н. Сорокин // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 10. – С. 139–156.

*Поступила в редакцию* 17.12.2021.

**Информация об авторах**

*Старовойтов Александр Павлович* – д.ф.-м.н., профессор