

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА****В.М. Селькин<sup>1</sup>, В.С. Закревская<sup>1</sup>, Н.С. Косенок<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*<sup>2</sup>*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель***FINITE GROUPS WITH GIVEN SCHMIDT SUBGROUPS****V.M. Sel'kin<sup>1</sup>, V.S. Zakrevskaya<sup>1</sup>, N.S. Kosenok<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Francisk Skorina Gomel State University*<sup>2</sup>*Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives, Gomel*

**Аннотация.** В статье рассматриваются только конечные группы. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{U}_p$ -нормальной в  $G$  ( $p$  – простое число), если каждый главный фактор группы  $G$  между  $H^G$  и  $H_G$  является либо циклическим, либо  $p'$ -группой. В статье доказывается, что если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  либо субнормальна, либо  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ , то производная подгруппа  $G'$  группы  $G$   $p$ -нильпотентна. Также обобщаются некоторые известные результаты.

**Ключевые слова:** конечная группа, нильпотентная группа, субнормальная подгруппа,  $\mathfrak{U}_p$ -нормальная подгруппа, группа Шмидта.

**Для цитирования:** Селькин, В.М. Конечные группы с заданными подгруппами Шмидта / В.М. Селькин, В.С. Закревская, Н.С. Косенок // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 84–88. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_1\\_50\\_84](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84)

**Abstract.** Throughout the article, all groups are finite and  $G$  always denotes a finite group. A subgroup  $H$  of the group  $G$  is called  $\mathfrak{U}_p$ -normal in  $G$  ( $p$  is a prime) if every chief factor of the group  $G$  between  $H^G$  and  $H_G$  is either cyclic or a  $p'$ -group. In this article, we prove that if each Schmidt subgroup of the group  $G$  is either subnormal or  $\mathfrak{U}_p$ -normal in  $G$ , then the derived subgroup  $G'$  of  $G$  is  $p$ -nilpotent. Some well-known results are generalized.

**Keywords:** finite group, nilpotent group, subnormal subgroup,  $\mathfrak{U}_p$ -normal subgroup, Schmidt group.

**For citation:** Sel'kin, V.M. Finite groups with given Schmidt subgroups / V.M. Sel'kin, V.S. Zakrevskaya, N.S. Kosenok // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 84–88. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_1\\_50\\_84](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84) (in Russian)

**Введение**

В данной статье мы рассматриваем только конечные группы; подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *модулярной* в  $G$  [2], если выполняются следующие условия:

- (i)  $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$  для всех  $X \leq G$ ,  $Z \leq G$  таких, что  $X \leq Z$  и
- (ii)  $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$  для всех  $Y \leq G$ ,  $Z \leq G$  таких, что  $A \leq Z$ .

Мы говорим, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{U}_p$ -нормальной [3] в  $G$ , если каждый главный фактор группы  $G$  между  $H^G$  и  $H_G$  является либо циклическим, либо  $p'$ -группой.

Напомним также, что  $G$  называется *группой Шмидта*, если сама группа  $G$  не является нильпотентной, но каждая её собственная подгруппа нильпотентна. Изучение групп Шмидта и их применение нашло своё отображение в большом

числе работ (см., например, [4]–[7] и, в первую очередь это обосновано тем, что каждая ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта. Поэтому изучение таких групп является важной задачей общей теории конечных групп.

В.Н. Семенчук в своей работе [8] доказал, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы  $G$  субнормальна в  $G$ , то  $G$  метанильпотентна, т. е.  $G/F(G)$  нильпотентна. Это важное наблюдение было развито в различных направлениях. Так, например, В.С. Монахов и В.Н. Княгина в статье [9] доказали, что в группах  $G$ , в которых выполняется такое условие, производная подгруппа  $G'$  будет нильпотентной. А в работе [10] В.А. Веденников получил полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта. В работе [11] И.В. Близнец и В.М. Селькин доказали, что если в ненильпотентной группе

$G$  каждая подгруппа Шмидта модулярна в  $G$ , то производная подгруппа  $G'$  нильпотенна.

В течение последних лет исследования большого числа авторов (см., в частности, [13]–[24]) были связаны с изучением и применениеми  $\sigma$ -субнормальных подгрупп [13]. Напомним, что подгруппа  $A$  в  $G$  называется  $\sigma$ -субнормальной в  $G$  [13], если в  $G$  существует цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ , где либо  $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ , либо  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной, т. е.  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ , для всех  $i = 1, \dots, n$ .

Приведённые выше результаты [8], [9], [11] получают дальнейшее развитие также в теории  $\sigma$ -субнормальных подгрупп. Так, например, в работе [15] К.А. Аль-Шаро и А.Н. Скиба доказали, что если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$   $\sigma$ -субнормальна, то  $G'$  является  $\sigma$ -нильпотентной группой, т. е. является прямым произведением  $\sigma$ -примарных групп. Развивая этот результат, в статье [22] утверждается и доказывается, что в каждой группе  $G$ , удовлетворяющей такому условию, имеется нормальная  $\sigma$ -нильпотентная подгруппа  $N$  с циклической факторгруппой  $G/N$ . Более того, согласно работе [16],  $G'$  является  $\sigma$ -нильпотентной группой и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  является либо  $\sigma$ -субнормальной, либо модулярной в  $G$ .

В этой работе мы докажем следующий результат в данном направлении.

**Теорема 0.1.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  либо субнормальна, либо  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ , то производная подгруппа  $G'$  группы  $G$  является  $p$ -нильпотентной.*

Следствиями данной теоремы являются несколько известных результатов.

**Следствие 0.2** [9, теорема]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  субнормальна в  $G$ , то производная подгруппа  $G'$  нильпотенна.*

**Следствие 0.3** [9, теорема]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  модулярна в  $G$ , то производная подгруппа  $G'$  группы  $G$  нильпотенна.*

**Следствие 0.4** [8, теорема 2]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  субнормальна в  $G$ , то  $G/F(G)$  нильпотенна.*

**Следствие 0.5** [12, теорема 1.9]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы  $G$  либо  $\mathfrak{U}$ -нормальна, либо субнормальна в  $G$ , то производная подгруппа  $G'$  нильпотенна.*

## 1 Вспомогательные результаты

При построении доказательства основной теоремы были использованы следующие леммы.

**Лемма 1.1.** *Пусть  $A$  и  $N \leq E$  – подгруппы группы  $G$ , где  $N$  – нормальна и  $A$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ . Тогда:*

(1)  $AN/N$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G/N$ .

(2) *Если  $E/N$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G/N$ , то  $E$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ .*

(3)  $A \cap E$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $E$ .

(4) *Если  $E$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ , то  $\langle A, E \rangle$  –  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ .*

*Доказательство.* См. доказательство предложения 1.8 и леммы 3.3 в [1] или доказательство теоремы 1.1 и леммы 2.2 в [25].  $\square$

**Лемма 1.2** [26, глава А, леммы 14.1, 14.2, 14.3 и теорема 14.4]. *Пусть  $A$  и  $N \leq E$  являются подгруппами в  $G$ , где  $N$  является нормальной и  $A$  субнормальной подгруппами группы  $G$ . Тогда:*

(1)  $AN/N$  – субнормальна в  $G/N$ .

(2) *Если  $A \leq E$ , то  $A$  является субнормальной в  $E$ .*

(3) *Если  $E/N$  является субнормальной в  $G/N$ , то  $E$  является субнормальной в  $G$ .*

(4) *Если  $E$  является субнормальной в  $G$ , то  $\langle A, E \rangle$  – субнормальна в  $G$ .*

**Лемма 1.3** [4, III, теорема 5.2] или [5, VI, теорема 24.2]. *Если  $G$  – группа Шмидта, тогда  $G = P \rtimes Q$ , где  $P = G^{\mathfrak{N}}$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $G$  и  $Q = \langle x \rangle$  – циклическая силовская  $q$ -подгруппа группы  $G$ ,  $p \neq q$ . Помимо этого,  $\langle x^q \rangle \leq \Phi(G)$  и  $p$  имеет экспоненту  $r$  или 4 (если  $p$  – неабелева 2-группа).*

Факт, который мы приведём дальше, хорошо известен (в частности, см. [5, I, следствие 7.7.2]). Здесь он доказан без применения теории формаций.

**Лемма 1.4.** *Если  $A$  является субнормальной подгруппой группы  $G$ , то для каждого простого  $p$   $O_p(A) \leq O_p(G)$ .*

*Доказательство.* Согласно условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_{t-1} \leq A_t = G$$

такая, что  $A_i$  нормальна в  $A_{i+1}$  для всех  $i = 1, \dots, t-1$ . Тогда по индукции мы получаем  $O_p(A) \leq O_p(A_{t-1})$ . С другой стороны,  $O_p(A_{t-1})$  характеристична в  $A_{t-1}$  и поэтому нормальна в  $A_t = G$ . Следовательно,  $O_p(A_t) \leq O_p(G)$ .  $\square$

## 2 Доказательство теоремы 1.1

*Доказательство.* Предположим, что эта утверждение неверно, и пусть  $G$  будет контрприимером минимального порядка.

(1) *Если  $E$  является собственной подгруппой группы  $G$ , тогда  $E' \leq F_p(E)$  (исходя из леммы 1.2 (2) и выбора  $G$ ).*

(2) *Если  $N$  является минимальной нормальной подгруппой группы  $G$ , тогда  $(G/N)' \leq F_p(G/N)$ .*

Следовательно,  $N \leq G'$  and  $O_{p'}(G) = 1$ .

Здесь используется цепочка рассуждений из работы [27] А.Н. Скибы (см. также в статье [12] доказательство теоремы 1.9).

Если  $G/N$  является  $p$ -нильпотентной, тогда это очевидно. Но предположим, что  $G/N$  не  $p$ -нильпотентна, и пусть  $E/N$  является произвольной подгруппой Шмидта в  $G/N$ . Пусть  $H$  является минимальным добавлением к  $N$  в  $E$ . Тогда  $H/(H \cap N) \simeq HN/N = E/N$  – группа Шмидта и  $H \cap N \leq \Phi(H)$ . Пусть  $\Phi = \Phi(H)$  и  $A$  является подгруппой Шмидта в  $H$ .

Мы получаем из леммы 1.3, что

$$(H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) =$$

$= (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \simeq H/\Phi = P \times Q$ , где  $P$  является силовской  $p$ -подгруппой,  $Q$  является силовской  $q$ -подгруппой в  $H/\Phi$  и  $|Q| = q$  для некоторых простых чисел  $p \neq q$ . Тогда, опять же по лемме 1.3, получаем, что  $A = A_p \rtimes A_q$ , где  $A = (A_q)^A$ . Тогда  $A_q \not\leq \Phi$ , так как  $\Phi$  нильпотентна. Следовательно,  $\Phi A_q / \Phi$  является силовской  $q$ -подгруппой в  $H/\Phi$ , и поэтому

$$(\Phi A_q / \Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi / \Phi = H / \Phi.$$

Следовательно,  $(A_q)^H = H$ , поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно леммам 1.1 (4) и 1.2 (4),  $(A_q)^H = A^H$  является либо субнормальной либо  $\mathfrak{U}_p$ -нормальной подгруппой в  $G$  и, следовательно,  $E/N = (A_q)^H NN$  является либо субнормальной, либо  $\mathfrak{U}_p$ -нормальной в  $G/N$ , согласно леммам 1.1 (1) и 1.2 (1).

Тогда гипотеза будет верной для  $G/N$ , соответственно, из выбора  $G$  мы имеем  $G'N/N = (G/N)' \leq F_p(G/N)$ . Если  $N \cap G' = 1$ , то  $G'N/N \simeq G'/(G' \cap N) = G'/1 \simeq G'$  является  $p$ -нильпотентной группой, что противоречит выбору группы  $G$ . Следовательно,  $N \leq G'$ .

Предположим, что  $N \leq O_{p'}(G)$ . Тогда  $F_p(G/N) = F_p(G)/N$  и  $G'N/N = G'/N$ , поэтому  $G'/N = (G/N)' \leq F_p(G/N)$  и тогда  $G' \leq F_p(G)$ . Этим противоречием мы завершаем доказательство утверждения (2).

### (3) Группа $G$ – $p$ -разрешима.

Согласно пунктам (1) и (2) нам нужно лишь показать, что группа  $G$  не является неабелевой простой группой. Допустим предположение, что это утверждение является неверным, и пусть  $A$  будет произвольной подгруппой Шмидта группы  $G$ . Согласно условию подгруппа  $A$  является либо субнормальной, либо  $\mathfrak{U}_p$ -нормальной в группе  $G$ . С другой стороны,  $G$  является неабелевой

простой группой. Тогда  $A$   $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$  и  $A_G = 1$ . Но тогда  $1 < A^G$  и каждый главный фактор  $G$  ниже  $A^G = G$  будет либо циклическим, либо  $p'$ -группой. Из этого следует, что  $G$  не является неабелевой простой группой. Это противоречие заканчивает доказательство пункта (3).

(4) Если  $R$  является минимальной нормальной подгруппой группы  $G$ , то  $R \not\leq \Phi(G)$  и  $R = C_G(R) = O_p(G) = F_p(G)$ . Помимо этого,  $|R| > p$  и для некоторой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$  правило равенства  $G = R \times M$ .

Вначале отметим, что, ввиду утверждений (2) и (3), имеет место  $R \leq O_p(G)$ . Согласно пункту (2) производная подгруппа

$$(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$$

группы  $G/R$  является  $p$ -нильпотентной. Допустим, что в  $G$  существует минимальная нормальная подгруппа  $L \neq R$ . Значит,  $G'/(G' \cap L)$  является  $p'$ -нильпотентной и тогда

$$G' = G' / ((G' \cap R) \cap (G' \cap L)) = G' / (R \cap L)$$

является  $p$ -нильпотентной. Поэтому  $G/F(G)$  является абелевой, что противоречит выбору  $G$ . Следовательно,  $R$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  и  $R \not\leq G'$ . Помимо этого,  $R \not\leq \Phi(G)$ , иначе, в противном случае,  $G'$  нильпотента согласно [26, глава А, лемма 13.2]. Значит,  $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$  согласно [26, глава А, теорема 15.6 (2)]. Заметим также, что  $R$  не циклическая группа, потому что иначе группа  $G/C_G(R) = G/R = G/F(G)$  является циклической. Следовательно, мы имеем (4).

(5)  $M \simeq G/R$   $p$ -замкнута. Следовательно,  $R$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ .

Допустим, что  $M$  не является  $p$ -замкнутой группой, и пусть  $H$  – минимальная не  $q$ -нильпотентная подгруппа в  $M$  для некоторого простого числа  $q \neq p$ , делящего  $|M|$ . Тогда  $H$  – группа Шмидта ввиду [4, IV, теорема 5.4] и поэтому  $H$  либо субнормальна, либо является  $\mathfrak{U}_p$ -нормальной в  $G$ .

В первом случае для некоторого простого числа  $q$  имеет место  $O_q(H) \neq 1$ . Тогда  $O_q(H) \leq O_q(G) \leq R$  по утверждению (4) и лемме 1.4, поэтому  $R \cap M \neq 1$ . Это противоречие показывает, что,  $H$   $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ .

Помимо этого очевидно, что  $H_G = 1$ , а, значит, каждый главный фактор  $G$  ниже  $H^G$  либо цикличесен, либо является  $p'$ -группой. Но  $R \leq H^G$  по утверждению (4) и, следовательно,  $R$  является циклической, что противоречит утверждению (4). Это противоречие показывает, что

$M = G / R$   $q$ -нильпотента для всех простых чисел  $q \neq p$ , делящих  $|M|$ . Тогда  $O_p(M)R \leq O_p(G) = R$ . Следовательно,  $O_p(M) = 1$ , поэтому утверждение (5) выполнено.

(6)  $M$  – группа Миллера – Морено (т. е.  $M$  не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в  $M$  является абелевой группой). Более того,  $M$  является  $q$ -группой для некоторого простого числа  $q \neq p$ .

Вначале заметим, что  $M$  – холлова  $p'$ -подгруппа группы  $G$ , что очевидно из пунктов (4) и (5).

Тогда пусть  $S$  является произвольной максимальной подгруппой в  $M$ . Значит  $RS / F_p(RS)$  будет абелевой согласно утверждения (1). Следовательно  $R = (RS)'$ , исходя из пунктов (4) и (5), и, очевидно,  $S = RS / R$  является абелевой. Тогда из выбора  $G$  и пункта (5) мы получаем (6).

*Заключительное противоречие.* Исходя из утверждения (6),  $Z(M) \cap \Phi(M) \neq 1$ . Пусть  $Z$  является подгруппой порядка  $q$  в  $Z(M) \cap \Phi(M)$  и пусть  $E = RZ$ . Тогда  $E$  не нильпотента (из пункта (4)). Однако  $R = R_1 \times \dots \times R_t$ , где  $R_k$  является минимальной нормальной подгруппой в  $E$  для всех  $k = 1, \dots, t$  по теореме Машке. Следовательно, для некоторого  $i$  подгруппа  $R_i \rtimes Z$  не будет нильпотентной, а, значит, эта подгруппа будет содержать подгруппу Шмидта вида  $A = A_p \rtimes Z$ .

Допустим, что  $A < E$ . Следовательно  $|A_p| < |R|$  и  $A_G = 1$ . Следуя гипотезе,  $A$  либо субнормальна, либо  $\mathfrak{U}_p$ -нормальна в  $G$ . Вначале допустим, что  $A$  является субнормальной в  $G$ . Тогда в  $E$  существует такая собственная подгруппа  $V$ , что  $A \leq V$  и  $V$  является нормальной в  $E$ . Так как  $Z \leq V < E$ , то для некоторого  $k$  имеем  $R_k \not\leq V$ . Тогда  $R_k \cap V = 1$ , следовательно,  $R_k \leq C_E(V)$ , поэтому  $R_k \leq N_G(Z) = M$ , где  $M$  является максимальной в  $G$ , получаем противоречие. Значит,  $A$  не субнормальна в  $G$ . Также очевидно, что  $A_G = 1$ , поэтому  $R \leq T^G$  ввиду утверждения (4). Но в этом случае  $R$  является либо циклической группой, либо  $p'$ -группой, что невозможно ввиду пунктов (2) и (4).

Значит,  $A = E$ , следовательно  $R = A_p$  и  $Z$  действует неприводимо на  $R$ . Очевидно, что  $Z \leq \Phi(M)$ , значит, каждая собственная подгруппа группы  $M$  действует неприводимо на  $R$ . Из этого факта получаем, что каждая максимальная подгруппа из  $M$  – циклическая. Значит,  $q = 2$  и, следовательно,  $|R| = p$ , что противоречит пункту (4).  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hu, B.* Finite groups with only  $\mathfrak{F}$ -normal and  $\mathfrak{F}$ -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.
2. *Schmidt, R.* Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
3. *Skiba, A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
4. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967. – 796 p.
5. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
6. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 256 с.
7. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.
8. *Семенчук, В.Н.* Конечные группы с системами минимальных не  $\mathfrak{F}$ -подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В.Н. Семенчук. – Наука и Техника, Минск, 1981. – С. 138–149.
9. *Монахов, В.С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45 (6). – Р. 1316–1322.
10. *Ведерников, В.А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46 (6). – С. 669–687.
11. *Близнец, И.В.* Конечные группы с модульярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.
12. *Хуан, Ц.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62 (1). – С. 201–220.
13. *Skiba, A.N.* On a-subnormal and a-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
14. *Beidleman, J.C.* On  $\tau_\sigma$ -quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.
15. *Al-Sharo, K.A.* On finite groups with  $\sigma$ -subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.
16. *Hu, B.* On finite groups with generalized  $\sigma$ -subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.

- 
17. Skiba, A.N. Some characterizations of finite  $\sigma$ -soluble P $\sigma$ T-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
  18. Skiba, A.N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.
  19. Guo, W. Finite groups whose n-maximal subgroups are  $\sigma$ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – Vol. 62. – P. 1355–1372.
  20. On  $\sigma$ -subnormality criteria in finite  $\sigma$ -soluble groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4>
  21. On  $\sigma$ -subnormal subgroups of factorised finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – Vol. 559. – P. 195–202.
  22. Yi, X. Finite groups with  $\sigma$ -subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560. – P. 181–191.
  23. Kamornikov, S.F. On  $\sigma$ -subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.
  24. Kamornikov, S.F. On  $\sigma$ -subnormal subgroups of finite 3'-groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Ukrainian Math. J. – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.
  25. Chi, Z. On a lattice characterization of finite soluble PST-groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2020. – Vol. 101 (2). – P. 247–254. – DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972719000741>.
  26. Doerk, K. Finite Soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
  27. Skiba, A.N. Finite groups with abnormal Schmidt subgroup / A.N. Skiba // Preprint, 2021.

Поступила в редакцию 26.01.2022.

---

#### Информация об авторах

Селькин Вадим Михайлович – д.ф.-м.н., доцент  
Закревская Виктория Сергеевна – аспирантка  
Косенок Николай Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент