МАТЕМАТИКА

УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_78

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ А.Н. СКИБЫ В ТЕОРИИ σ-СВОЙСТВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON ONE QUESTION OF A.N. SKIBA IN THE THEORY OF σ-PROPERTIES OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G – группа, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, то есть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \varnothing\}$. Группа G называется σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i = i(G)$. Мы говорим, что G является σ-*башенной группой*, если либо $G = 1$, либо G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$ такой, что G_k / G_{k-1} – σ_i-группа, $\sigma_i \in \sigma(G)$, а G / G_k и G_{k-1} являются $\sigma_{i'}$-группами для всех $k = 1,\ldots,n$. Подгруппа A группы G называется σ-*субнормальной* в G, если существует ряд подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ такой, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо факторгруппа $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной, для всех $i = 1,\ldots,t$. В данной статье мы доказываем, что неединичная разрешимая группа G является σ-башенной группой, если для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$, где $|\sigma(G)| = n$, холлова σ_i-подгруппа группы G сверхразрешима и каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна в G. Тем самым мы даем положительный ответ на вопрос 4.8 из [1] в классе всех разрешимых групп со сверхразрешимыми σ-холовыми подгруппами.

Ключевые слова: *конечная группа*, *разрешимая группа*, σ-*субнормальная подгруппа*, *группа с силловской башней*, σ-*башенная группа*.

Для цитирования: *Сафонова*, *И.Н.* Об одном вопросе А.Н. Скибы в теории σ-свойств конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 78–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/ 20778708_2022_1_50_78

Abstract. All considered groups are finite. Let G be a group, σ some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \varnothing\}$. A group G is called σ-*primary* if G is a σ_i-group for some $i = i(G)$. We say that G is a σ-*tower group* if either $G = 1$ or G has a normal series $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$ such that G_k / G_{k-1} is a σ_i-group, $\sigma_i \in \sigma(G)$, while G / G_k and G_{k-1} are $\sigma_{i'}$-groups for all $k = 1,\ldots,n$. A subgroup A of G is said to be σ-*subnormal* in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1,\ldots,t$. In this article, we prove that a non-identity soluble group G is a σ-tower group if for each $\sigma_i \in \sigma(G)$, where $|\sigma(G)| = n$, a Hall σ_i-subgroup of G is supersoluble and every $(n+1)$-maximal subgroups of G is σ-subnormal in G. Thus, we give a positive answer to Question 4.8 in [1] in the class of all soluble groups with supersoluble σ-Hall subgroups.

Keywords: *finite group*, *soluble group*, σ-*subnormal subgroup*, *Sylow tower group*, σ-*tower group*.

For citation: *Safonova*, *I.N.* On one question of A.N. Skiba in the theory of σ-properties of finite groups / I.N. Safonova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 78–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_78 (in Russian)

Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D15, 20D20.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы конечны и G всегда обозначает группу. Кроме того, $\mathbb{P}$ – это множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$; группа G называется π-замкнутой, если G имеет нормальную холлову π-подгруппу. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$, множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

В дальнейшем σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Мы пишем

$\sigma(n)=\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G)=\sigma(|G|)$.

Напомним некоторые понятия теории σ-свойств группы (см., например, [1]–[12]).

Группа G называется: σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i=i(G)$; σ-*разрешимой*, если каждый главный фактор G является σ-примарным; σ-*нильпотентной*, если либо $G=1$, либо $\sigma(G)=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_t\}$ и $G=G_1\times\cdots\times G_t$, где G_i – холлова σ_i-подгруппа группы G для всех i.

Группу G называют *группой с силовской башней*, если $G=1$ или G имеет нормальный ряд $1=G_0<G_1<\cdots<G_{t-1}<G_t=G$ такой, что G_i/G_{i-1} – p-группа, $p\in\pi(G)$, G/G_i и G_{i-1} – p'-группы для всех $i=1,\ldots,t$..

Мы говорим, что G является σ-*башенной* группой, если либо $G=1$, либо G имеет нормальный ряд $1=G_0<G_1<\cdots<G_{t-1}<G_t=G$ такой, что G_i/G_{i-1} – σ_i-группа, $\sigma_i\in\sigma(G)$, а G/G_i и G_{i-1} являются $\sigma_{i'}$-группами для всех $i=1,\ldots,t$.

В классическом случае, когда $\sigma=\sigma^1=$ $=\{\{2\},\{3\},\ldots\}$: группа G σ^1-разрешима (соответственно σ^1-нильпотентна) тогда и только тогда, когда G разрешима (соответственно нильпотентна); G является σ^1-башенной группой тогда и только тогда, когда G является группой с силовской башней. Подгруппа A группы G является σ^1-субнормальной тогда и только тогда, когда она субнормальна в G.

Напомним, что подгруппа A группы G называется: σ-*субнормальной* в G [1], если существует цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_t=G$$

такая, что либо $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой, для всех $i=1,\ldots,t$ (здесь $(A_{i-1})_{A_i}$ – наибольшая нормальная подгруппа группы A_i, содержащаяся в A_{i-1}).

Если

$$M_n<M_{n-1}<\ldots<M_1<M_0=G, \qquad (0.1)$$

где M_i – максимальная подгруппа в M_{i-1} для всех $i=1,\ldots,n$, то цепь (0.1) называется *максимальной цепью группы G длины n*, а M_n $(n>0)$ является *n-максимальной подгруппой* группы G.

Пусть $\Pi\subseteq\sigma$ и $\Pi'=\sigma\setminus\Pi$. Подгруппа H группы G называется *холловой* Π-*подгруппой* группы G, если H является Π-группой (т. е. $\sigma(H)\subseteq\Pi$) и $|G:H|$ является Π'-числом (т. е. $\sigma(|G:H|)\subseteq\Pi'$); H называется σ-*холловой подгруппой* группы G, если H является холловой Π-подгруппой группы G для некоторого Π.

Целью данной работы является анализ ситуации, представленной в следующем вопросе (см. вопрос 4.8 в [1] или вопрос 7.22 в [13]):

Пусть G – σ-разрешимая группа и $|\sigma(G)|=n$. *Предположим, что каждая* $(n+1)$-*максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна. Верно ли тогда, что G является σ-башенной группой*?

Следуя [6], [14], мы говорим, что группа G имеет σ-*высоту Спенсера* $h_\sigma(G)$ равную n, если каждая максимальная цепь подгрупп из G длины n содержит σ-субнормальную подгруппу группы G и в группе G существует по крайней мере одна максимальная цепь длины $n-1$, которая не содержит σ-субнормальных подгрупп группы G.

Основными результатами работы являются следующие:

***Теорема* 0.1.** *Пусть группа G разрешима и для каждого* $\sigma_i\in\sigma(G)$ *холлова* σ_i-*подгруппа из G является сверхразрешимой. Тогда если*

$$h_\sigma(G)\leq|\sigma(G)|+1,$$

то G является σ-башенной группой.

***Теорема* 0.2.** *Пусть группа G разрешима и для каждого* $\sigma_i\in\sigma(G)$ *холлова* σ_i-*подгруппа из G является сверхразрешимой, где* $|\sigma(G)|=n$. *Тогда если каждая* $(n+1)$-*максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна в G, то G является σ-башенной группой.*

1 Вспомогательные результаты

***Лемма* 1.1** [1, Лемма 2.4]. *Пусть A, K и n – подгруппы группы G. Предположим, что A σ-субнормальна в G и n нормальна в G.*

(1) $A\cap K$ *σ-субнормальна в K.*

(2) *Если* $N\leq K$ *и* K/N *σ-субнормальна в* G/N, *то K σ-субнормальна в G.*

(3) *Если* $K\leq E\leq G$, *где K σ-субнормальна в E, тогда* KN/N *σ-субнормальна в* NE/N.

(4) *Если A является холловой* Π-*подгруппой в G, то A нормальна в G.*

(5) *Если B – σ-субнормальная подгруппа группы G, то* $\langle A,B\rangle$ *и* $A\cap B$ *σ-субнормальны в G.*

(6) *Если G – σ-разрешима и A является* σ_i-*группой для некоторого i, то* $A\leq O_{\sigma_i}(G)$.

***Лемма* 1.2** [15, Теорема 21.3].

(1) *В разрешимой неединичной группе минимальная нормальная подгруппа является элементарной абелевой p-подгруппой для некоторого простого p.*

(2) *В разрешимой неединичной группе максимальные подгруппы имеют примарные индексы.*

(3) *Главные факторы разрешимой неединичной группы являются элементарными абелевыми примарными группами.*

(4) *Композиционные факторы разрешимой неединичной группы имеют простые порядки.*

***Лемма* 1.3.** Пусть G – такая группа, что $h_\sigma(G) > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *если M не является σ-субнормальной максимальной подгруппой группы G, то*

$$h_\sigma(M) \le h_\sigma(G) - 1;$$

(2) *если R – нормальная подгруппа группы G, то* $h_\sigma(G/R) \le h_\sigma(G)$.

Доказательство. (1) Пусть $n = h_\sigma(G)$. Поскольку M не является σ-субнормальной подгруппой в G, то в любой максимальной цепи

$$M_{n-1} < M_{n-2} < \ldots < M_1 < M_0 = M$$

из M длины $n-1$ некоторый элемент $\neq M$ является σ-субнормальной подгруппой в G и, следовательно, σ-субнормальной подгруппой в M по лемме 1.1 (1). Поэтому $h_\sigma(M) \le n-1$.

(2) Если

$$M_m / R < M_{m-1} / R < \ldots < M_1 / R < M_0 / R = G / R$$

максимальная цепь в G/R, все элементы которой не являются σ-субнормальными подгруппами в G/R, то все элементы $M_m, \ldots, M_1$ максимальной цепи $M_m < M_{m-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G$ группы G не являются σ-субнормальными подгруппами в G по лемме 1.1 (2). Отсюда следует, что $h_\sigma(G/R) \le n$. □

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, содержащий все группы единиц; $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп n группы G с $G/N \in \mathfrak{F}$; $G_{\mathfrak{F}}$ есть произведение всех нормальных подгрупп n группы G с $N \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется: *формация* если для каждой группы G каждый гомоморфный образ $G/G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$; *класс Фиттинга*, если для каждой группы G каждая нормальная подгруппа группы $G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется: *насыщенным*, если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$; *наследственный* (А.И. Мальцев [16]), если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $H \le G \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.4** [2, Теорема 1.1]. *Класс* $\mathfrak{N}_\sigma$ *всех σ-нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.*

Пусть теперь ψ – некоторый линейный порядок на σ. Запись $\sigma_i \psi \sigma_j$ означает, что σ_i предшествует σ_j в ψ и $i \neq j$. Мы говорим, что G является σ-башенной группой *типа* ψ, если либо $G = 1$, либо $\sigma(G) = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_t}\}$, где $\sigma_{i_1} \psi \sigma_{i_2} \psi \cdots \psi \sigma_{i_t}$ и G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = G$, в котором для любых $j = 1, \ldots, t$ фактор G_j / G_{j-1} является σ_{i_j}-группой, а G_{j-1} и G/G_j являются $\sigma_{i_j'}$-группами.

***Лемма* 1.5.** *Имеют место следующие утверждения*:

(1) *класс всех σ-башенных групп замкнут относительно взятия гомоморфных образов*;

(2) *класс всех σ-башенных групп типа* ψ *является наследственной насыщенной формацией Фиттинга*.

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

2 Основной результат

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда любой собственный фактор H/K группы G такой, что $h_\sigma(H/K) \le |\sigma(H/K)| + 1$ является σ-башенной группой.

Заметим, что поскольку G разрешима, то G имеет холлову π-подгруппу для всех $\pi \subseteq \pi(G)$ и, следовательно, G имеет холлову Π-подгруппу для любого $\Pi \subseteq \sigma(G)$.

Пусть n – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда n – p-группа для некоторого $p \in \sigma_i$, где $\sigma_i \in \sigma(G)$.

(1) *Если n – холлова* σ_i*-подгруппа группы G, то каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая n, не является σ-субнормальной в G.*

Предположим, что G имеет σ-субнормальную максимальную подгруппу M такую, что $G = NM$. Тогда факторгруппа G/M_G σ-примарна и, следовательно, G/M_G является p-группой. Предположим, что $h_\sigma(G) < |\sigma(G)| + 1$ и n является холловской σ_i-подгруппой группы G. Тогда $G = NM_G$ и $N \cap M_G = 1$, поэтому $G = N \times M_G$. Следовательно, поскольку G не является σ-нильпотентной по выбору G, M_G не является σ-нильпотентной по лемме 1.4. Поэтому $k := h_\sigma(M_G) > 1$, M_G обладает максимальной цепью

$$M_{k-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M_G$$

длины $k-1$, где M_j не является σ-субнормальной в M_G для всех $j = 1, \ldots, k-1$ и во всякой максимальной цепи подгрупп

$$L_k < L_{k-1} < \cdots < L_1 < L_0 = M_G$$

M_G длины k некоторая подгруппа $L_j \neq M_G$ является σ-субнормальной в M_G. Рассмотрим ряд

$$M_{k-1} < \cdots < M_1 < NM_1 < G.$$

Покажем, что если для некоторой собственной подгруппы L группы G имеет место либо $NM_1 < L < G$, либо $M_1 < L \le NM_1$, то подгруппа L не является σ-субнормальной в G.

Вначале предположим, что

$$NM_1 < L < G = N \times M_G.$$

Тогда $M_1 \le L \cap M_G \le M_G$. Но M_1 – максимальная подгруппа M_G, поэтому либо $L \cap M_G = M_G$, либо $M_1 = L \cap M_G$. В первом случае $M_G \le L$ и $G = NM_G \le L$, противоречие. Следовательно, $M_1 = L \cap M_G$. Но тогда L не является σ-субнормальной в G по лемме 1.1 (1), так как M_1 не является σ-субнормальной подгруппой M_G.

Теперь предположим, что $M_1 < L \le NM_1$. Тогда $L = L \cap NM_1 = (L \cap N)M_1$. Поэтому

$$L \cap M_G = (L \cap N)M_1 \cap M_G =$$
$$= (L \cap N \cap M_G)M_1 = M_1.$$

Следовательно, L не является σ-субнормальной подгруппой G.

Поэтому G имеет максимальную цепь длины $t > k$, в которой каждый неединичный элемент $\ne G$ не является σ-субнормальным в G. Отсюда следует, что $h_\sigma(M_G) \le h_\sigma(G) - 1$. Тогда

$$h_\sigma(M_G) \le h_\sigma(G) - 1 \le |\sigma(G)|.$$

Поскольку $|\sigma(G)| - 1 \le |\sigma(M_G)| \le |\sigma(G)|$ по лемме 1.2 (2), то $h_\sigma(M_G) \le |\sigma(M_G)| + 1$. Поэтому M_G является σ-башенной группой по выбору G. Но $G = NM_G$ и n – нормальная холлова σ_i-подгруппа группы G. Следовательно, G является σ-башенной группой, противоречие.

(2) *Всякая не σ-субнормальная максимальная подгруппа группы G является σ-башенной группой*.

Пусть M – не σ-субнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда ввиду леммы 1.3 (1) имееет место $h_\sigma(M) \le h_\sigma(G) - 1$. Поскольку при этом по условию теоремы $h_\sigma(G) - 1 \le |\sigma(G)|$, то $h_\sigma(M) \le |\sigma(G)|$. В силу разрешимости группы G имеют место неравенства $|\sigma(G)| - 1 \le |\sigma(M)| \le |\sigma(G)|$. Поэтому $h_\sigma(M) \le |\sigma(M)| + 1$ и M является σ-башенной группой по выбору G.

(3) *Если $\sigma_j \in \sigma(G)$, то всякая холлова σ_j-подгруппа группы G не является σ-субнормальной в G*.

Пусть H – холлова σ_j-подгруппа группы G. Допустим, что H σ-субнормальна в G. Тогда в силу леммы 1.1 (4) подгруппа H нормальна в G. Поскольку $\sigma_j \in \sigma(G)$ и $H \ne 1$, то в группе G найдется минимальная нормальная подгруппа K такая, что $K \le H$.

Предположим, что $K < H$. Тогда

$$\sigma(G/K) = \sigma(G) \text{ и } h_\sigma(G/K) \le h_\sigma(G)$$

по лемме 1.3 (2). Значит, предположение верно для G/K, поэтому G/K является σ-башенной группой. Следовательно, ввиду леммы 1.5 (1), σ-башенной группой является также и группа G/H. Но тогда G – σ-башенная группа, так как H – холлова σ_j-подгруппа группы G. Противоречие. Следовательно, $K = H$. Тогда для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеем $G = KM$. Если M – σ-башенная группа, то $G/H = G/K \simeq M/(M \cap K)$ – σ-башенная группа по лемме 1.5 (1). И снова G является σ-башенной группой, так как H – холлова σ_j-подгруппа в G, противоречие. Поэтому M не является σ-башенной группой, а значит, M σ-субнормальна в G ввиду утверждения (2).

Рассуждая так же, как в утверждении (1), получаем $h_\sigma(M_G) < h_\sigma(G)$. Но тогда

$$h_\sigma(M_G) + 1 \le h_\sigma(G) \le |\sigma(G)| + 1$$

и $|\sigma(M_G)| = |\sigma(G)| - 1$, так как K является холловой σ_j-подгруппой группы G. Значит,

$$h_\sigma(M_G) \le |\sigma(M_G)| + 1.$$

Поэтому M_G является σ-башенной группой по выбору G. Но, $G = KM_G$ и K – нормальная холлова σ_j-подгруппа группы G. Следовательно, G является σ-башенной группой. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) *Для любой минимальной нормальной подгруппы n группы G группа G/N является σ-башенной, поэтому $\Phi(G) = 1$.*

В силу утверждения (3) и леммы 1.3(2) имеем $\sigma(G/N) = \sigma(G)$ и $h_\sigma(G/N) \le h_\sigma(G)$. Тогда имеет место

$$h_\sigma(G/N) \le h_\sigma(G) \le |\sigma(G)| + 1 = |\sigma(G/N)| + 1.$$

Следовательно, G/N является σ-башенной группой по выбору G.

Если теперь $\Phi(G) \ne 1$, то в группе G найдется минимальная нормальная подгруппа $K \le \Phi(G)$. Тогда G/K является σ-башенной группой и, значит, $G/\Phi(G)$ является σ-башенной группой по лемме 1.5 (1). Но тогда $G/\Phi(G)$ является σ-башенной группой типа ψ для некоторого подходящего линейного порядка ψ на σ. Применяя теперь лемму 1.5 (2) заключаем, что G является σ-башенной группой типа ψ. Это противоречие показывает, что $\Phi(G) = 1$ и завершает доказательство утверждения (4).

(5) *Если n – минимальная нормальная σ_j-подгруппа в G, M – такая максимальная подгруппа в G, что $G = NM$, то M имеет нормальный ряд $M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M$, где M_k / M_{k+1} – σ_{i_k}-группа простого порядка, а M_{k+1} и M / M_k*

являются $\sigma_{i'_k}$ *-группами для всех* $k = 0,1,\ldots,n-2$. *Кроме того,* M_{n-1} *является холловой циклической* σ_m *-подгруппой порядка* q^s *для некоторого* $q \in \sigma_m \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_j\}$ *и максимальная подгруппа в* M_{n-1} *σ-субнормальна в G. Поэтому M и* G/N *сверхразрешимы.*

Предположим, что M σ-субнормальна в G. Тогда G/M_G является σ-примарной группой, поэтому G/M_G является σ-башенной группой типа ψ для любого линейного порядка ψ на σ. Тогда $G \simeq G/(N \cap M_G)$ является σ-башенной группой по утверждению (4) и лемме 1.5 (2). Это противоречие показывает, что M не является σ-субнормальной в G. Поэтому M – σ-башенная группа по утверждению (2).

Из утверждения (3) следует, что

$$n = |\sigma(G)| = |\sigma(M)|.$$

Тогда M имеет ряд подгрупп

$$1 = M_n < M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M,$$

где M_k – нормальная подгруппа группы M и M_k / M_{k+1} является σ_{i_k} -группой и M_{k+1} и M / M_k являются $\sigma_{i'_k}$ -группами для всех $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Если M_{n-1} – σ_j -группа, то NM_{n-1} – нормальная холлова σ_j -подгруппа группы G, что противоречит утверждению (3). Следовательно, M_{n-1} является холловой σ_m -подгруппой группы G для некоторого $m \neq j$. Значит, M_{n-1} не является σ-субнормальной в G в силу утверждения (3). Поэтому всякая подгруппа A группы M, содержащая M_{n-1}, не является σ-субнормальной в G, так как M_{n-1} нормальна в A. В частности, M_k не является σ-субнормальной в G для всех $k < n-1$. Следовательно,

$$h_\sigma(G) = |\sigma(G)| + 1 = n + 1 = |\sigma(M)| + 1.$$

Предположим, что для некоторого $t < n-1$ факторгруппа M_t / M_{t+1} не имеет простой порядок. Тогда для некоторой σ-субнормальной подгруппы W группы G и некоторой n-максимальной подгруппы V группы M имеем

$$M_{n-1} \le V \le W < M.$$

Последнее невозможно ввиду замечания из предыдущего абзаца. Следовательно, M_k / M_{k+1} имеет простой порядок для всех $k = 0,\ldots,n-2$. Поэтому

$$M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M < G$$

– максимальная цепь подгрупп группы G длины n. Отсюда следует, что каждая максимальная подгруппа в M_{n-1} является σ-субнормальной в G, поскольку $h_\sigma(G) = |\sigma(G)| + 1 = n + 1$. Так как при этом M_{n-1} не является σ-субнормальной в G, то ввиду леммы 1.1 (5) M_{n-1} имеет единственную максимальную подгруппу. Поэтому M_{n-1} является циклической группой порядка q^s для некоторого $q \in \sigma_m \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_j\}$. Следовательно, группы M и $G/N \simeq M/(M \cap N)$ сверхразрешимы. Значит, утверждение (5) верно.

(6) *R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, поэтому* $C_G(R) = R$.

Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$. Тогда ввиду утверждения (4) для некоторых максимальных подгрупп M и L группы G имеют место равенства $G = RL = NM$. Кроме того, $G \simeq G/(R \cap N)$ сверхразрешима по утверждению (5), поэтому R и n – группы простого порядка.

Если $|R| \neq |N|$, то $R \le M$. Из утверждения (5) следует, что M имеет нормальный ряд $M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M$, где M_k / M_{k+1} – σ_{i_k} -группа простого порядка, а M_{k+1} и M / M_k являются $\sigma_{i'_k}$ -группами для всех $k = 0,1,\ldots,n-2$. Кроме того, M_{n-1} является холловой циклической σ_s -подгруппой порядка q^m для некоторого $q \in \sigma_s \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Если $R \not\le M_{n-1}$, то R – холлова σ_i -подгруппа группы G, что противоречит утверждению (3). Значит, $R \le M_{n-1}$ и $p = q$. Тогда поскольку $M_{n-1} \le G = RL$, то

$$M_{n-1} = M_{n-1} \cap RL = R(M_{n-1} \cap L).$$

Если теперь $M_{n-1} \cap L = 1$, то $M_{n-1} = R$ – холлова σ_s -подгруппа G, последнее невозможно в силу утверждения (3). Поэтому $M_{n-1} \cap L \neq 1$ и для циклической примарной группы M_{n-1} имеет место $M_{n-1} = R(M_{n-1} \cap L)$, где $M_{n-1} \cap L$ – неединичная p-группа и $R \cap (M_{n-1} \cap L) = 1$, так как $R \cap L = 1$. Противоречие.

Поэтому $|R| = |N|$ и RN является нормальной холловой σ_i -подгруппой группы G, поскольку порядок холловой σ_i -подгруппы в L является простым числом по утверждению (5). Это противоречие показывает, что R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $C_G(R) = R = O_p(G)$ в силу [17, Гл. A, 15,6]. Поэтому выполняется (6).

Заключительное противоречие. Из утверждения (4) следует, что для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеем $G = R \rtimes M$. Пусть p – силовская q-подгруппа группы M, где $q \in \sigma_i$. Из пунктов (3) и (5) следует, что $|P| = q$ и $V = RP$ – не σ-субнормальная холлова σ_i -подгруппа группы G. Кроме того, из пункта (5) и [17, Гл. A, 1.6 (b)] следует, что V это пересечение всех максимальных подгрупп группы G, содержащих V. Следовательно, некоторая максимальная подгруппа L группы G, содержащая V, не является σ-субнормальной в G по лемме 1.1 (5). Значит, L является σ-башенной группой по утверждению (2), и тогда V нормальна в L, так как $C_G(R)=R$ по утверждению (6). Отсюда следует, что каждая подгруппа в L, содержащая V, не является σ-субнормальной в G. Но V – $(n-1)$-максимальная подгруппа в G, поэтому любая 2-максимальная подгруппа V содержится в некоторой такой собственной подгруппе W группы V, которая σ-субнормальна в G. Если $|V|>pq$, то p содержится в некоторой σ-субнормальной подгруппе G, содержащейся в V, так как холлова σ_i-подгруппа группы G сверхразрешима по предположению. Следовательно, $|V|=pq$, поэтому $|R|=p$ и, значит, $G/R=G/C_G(R)$ циклическая, откуда следует, что $V=RP$ нормальна в G, противоречие. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

2. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

3. *Beidleman*, *J.C.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

4. *Huang*, *J.* Finite groups all of whose subgroups are σ-subnormal or σ-abnormal / J. Huang, B. Hu, X. Wu // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 1. – P. 4542–4549.

5. *Guo*, *W.* On σ-supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.

6. *Guo*, *W.* Finite groups whose *n*-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China. Math. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.

7. *Yi*, *X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560, № 15. – P. 181–191.

8. *Heliel*, *Abd El-Rahman.* On the σ-length of maximal subgroups of finite σ-soluble groups / Abd El-Rahman Heliel, M. Al-Shomrani, A. Ballester-Bolinches // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, № 12. – P. 2165. – DOI: https://doi.org/10.3390/math8122165

9. *On σ-subnormality criteria in finite σ-soluble groups* / A. Ballester-Bolinches [et al.] // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4

10. *G-covering subgroup systems for some classes of σ-soluble groups* / A-Ming Liu [et al.] // J. Algebra. – 2021. – Vol. 582. – P. 280–293.

11. *Ballester-Bolinches*, *A.* On σ-subnormality criteria in finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi // J. Pure Appl. Algebra. – 2022. – Vol. 226, № (2). – P. 106822. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2021.106822

12. *A generalization of σ-permutability* / Z. Wang [et al.] // Commun. Math. Stat. – in Press.

13. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

13. *Spencer*, *A.E.* Maximal non-normal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.

14. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2003.

15. *Mal'cev*, *A.I.* Algebraic Systems / A.I. Mal'cev. – Moscow: Nauka, 1970.

16. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*проект* 20211328).

Поступила в редакцию 22.01.2022.

Информация об авторах

Сафонова Инна Николаевна – к.ф.-м.н., доцент