

ОБ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ТОТАЛЬНО ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.П. Лось, В.Г. Сафонов

Белорусский государственный университет, Минск

ON ONE-GENERATED AND BOUNDED TOTALLY ω -COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.P. Los, V.G. Safonov

Belarusian State University, Minsk

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G – группа. Тогда через $c_\omega^{\text{form}}(G)$ обозначают пересечение всех totally ω -composition formations, содержащих группу G . Формацию $c_\omega^{\text{form}}(G)$ называют totally ω -composition formation, порожденной группой G или one-generated totally ω -composition formation. Totally ω -composition formation $\mathfrak{F}$ называется bounded, если она является подформацией некоторой one-generated totally ω -composition formation, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq c_\omega^{\text{form}}(G)$ для некоторой группы G . В работе получены критерии one-generation (boundedness) totally ω -composition formation.

Ключевые слова: formation finite groups, ω -composition formation, one-generated formation, bounded formation, totally ω -composition formation.

Для цитирования: Лось, И.П. Об однопорозжденных и ограниченных totally ω -composition formations конечных групп / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 101–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101

Abstract. All considered groups are finite. Let G be a group. Then $c_\omega^{\text{form}}(G)$ denotes the intersection of all totally ω -composition formations containing G . The formation $c_\omega^{\text{form}}(G)$ is called a totally ω -composition formation generated by G or a one-generated totally ω -composition formation. A totally ω -composition formation $\mathfrak{F}$ is called a bounded, if $\mathfrak{F}$ is a subformation of some one-generated totally ω -composition formation, that is, $\mathfrak{F} \subseteq c_\omega^{\text{form}}(G)$ for some group G . In this paper, criteria for the one-generation (boundedness) of a totally ω -composition formation are obtained.

Keywords: formation of finite groups, ω -composition formation, one-generated formation, bounded formation, totally ω -composition formation.

For citation: Los, I.P. On one-generated and bounded totally ω -composition formations of finite groups / I.P. Los, V.G. Safonov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 101–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101 (in Russian)

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в [1]–[3].

Пусть ω – непустое подмножество множества всех простых чисел. Всякую функцию вида

$$f: \omega \cup \{\omega\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют ω -composition formation спутником. Для произвольного ω -composition formation спутника f полагают

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p)\}$$

$$\text{для всех } p \in \pi(\text{Com}(G)) \cap \omega,$$

где $\text{Com}(G)$ обозначает множество всех composition formations абелевых факторов G , $R_\omega(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω -подгруппа

группы G , $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых composition факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$).

Если formation $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω -composition formation спутника f , то $\mathfrak{F}$ называют ω -composition formation, а f – ω -composition formation спутником $\mathfrak{F}$.

Всякую formation считают n -кратно ω -composition formation. При $n \geq 1$ formation $\mathfrak{F}$ называют n -кратно ω -composition formation [1], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$ -кратно ω -composition formation. Formation $\mathfrak{F}$

называется *тотально ω -композиционной*, если она является n -кратно ω -композиционной для всякого целого неотрицательного n .

Формации такого вида введены А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе [1], где были установлены основные свойства n -кратно ω -композиционных (или, иначе, кратно частично композиционных) формаций, изучались n -кратно ω -композиционные произведения формаций такого вида, а также доказана алгебраичность и модулярность решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций. В отмеченной работе было поставлено более двух десятков открытых вопросов, определивших перспективные направления исследований в теории частично композиционных формаций.

Полученные за последующее десятилетие результаты в этом направлении нашли свое отражение в монографиях [4], [5]. При этом необходимо отметить, что особое место при изучении свойств n -кратно (тотально) ω -композиционных формаций, их решеток и полугрупп занимают формации, порождаемые одной единственной группой, так называемые *однопорожденные n -кратно (тотально) ω -композиционные формации*. Напомним [1], что через $c_n^\omega \text{form}(G)$ ($c_\infty^\omega \text{form}(G)$) обозначают пересечение всех n -кратно (тотально) ω -композиционных формаций, содержащих данную группу G , а формацию $c_n^\omega \text{form}(G)$ (соответственно, $c_\infty^\omega \text{form}(G)$) называют n -кратно (тотально) ω -композиционной формацией, порожденной группой G или однопорожденной n -кратно (тотально) ω -композиционной формацией.

Как было показано в работе [1], однопорожденные n -кратно ω -композиционные формации являются компактными элементами решетки c_n^ω всех n -кратно ω -композиционных формаций. В недавно опубликованной работе В.В. Щербины [6] доказана, в частности, алгебраичность решетки c_∞^ω всех тотально ω -композиционных формаций, компактными элементами которой являются однопорожденные тотально ω -композиционные формации. Кроме того, при изучении тотально ω -композиционных формаций с заданными системами (структурой) подформаций (см., например, [7]) существенную роль играют минимальные тотально ω -композиционные не $\mathfrak{H}$ -формации ($\mathfrak{H}$ – некоторый заданный класс групп), которые также однопорождены. Поэтому задача изучения однопорожденных ω -композиционных формаций весьма актуальна.

Не менее важными и интересными объектами исследований теории n -кратно (тотально) ω -композиционных формаций являются так называемые *ограниченные формации*. При этом n -кратно (тотально) ω -композиционную формацию

$\mathfrak{F}$ называют *ограниченной*, если она является подформацией некоторой однопорожденной n -кратно (тотально) ω -композиционной формации, т. е. имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq c_n^\omega \text{form}(G)$ (соответственно, $\mathfrak{F} \subseteq c_\infty^\omega \text{form}(G)$) для некоторой группы G .

Необходимо отметить, что до настоящего времени менее изученными остаются тотально ω -композиционные формации. Накопленный идейный и технический материал позволил в последние годы несколько активизировать исследования по теории тотально композиционных формаций (см, например, работы А.А. Царева [8]–[10]), а также тотально ω -композиционных формаций (см. работы авторов [7], [11]–[13], В.В. Щербины [6], [14]). Данное обстоятельство подтверждает перспективность таких исследований.

Совокупность всех тотально ω -композиционных формаций будем обозначать через c_∞^ω , формации, принадлежащие c_∞^ω , называть c_∞^ω *формациями*.

Пусть f – ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называют *внутренним* (или *приведенным*). Спутник f называют c_∞^ω -*значным*, если все его значения принадлежат c_∞^ω . Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех c_∞^ω -значных ω -композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\bigcap_{i \in I} f_i$ – c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называют *минимальным c_∞^ω -значным ω -композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

В данной работе мы доказываем следующие критерии однопорожденности (ограниченности) тотально ω -композиционной формации.

Теорема 0.1. Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f – минимальный c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально ω -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(a)$ – однопорожденная c_∞^ω -формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

Теорема 0.2. Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f – минимальный c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально ω -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(a)$ – ограниченная c_∞^ω -формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

1 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся некоторые известные

факты теории частично композиционных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Тогда через $c_\infty^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех c_∞^ω -формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ и называют *тотально ω -композиционной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$* , а если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $c_\infty^\omega \text{form}(G)$ называют *однопорожденной тотально ω -композиционной формацией*.

Лемма 1.1 [1, Лемма 5]. Если $\mathfrak{F} = c_\infty^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$ и f – минимальный c_∞^ω -значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = c_\infty^\omega \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$;
- 4) если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$, спутник h c_∞^ω -значен, то для всех $p \in \pi$ имеет место

$$f(p) = c_\infty^\omega \text{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(A) = 1).$$

Лемма 1.2 [15, Лемма 2]. Пусть Z_p – группа порядка p и G – группа с $O_p(G) = 1$. Тогда база регулярного сплетения $T = Z_p \wr G$ совпадает с $C^p(T) = O_p(T)$.

Лемма 1.3 [1, Лемма 4]. Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $G / O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякого простого числа p класс групп $\mathfrak{X}(C^p)$ определяется следующим образом [1]:

$$\mathfrak{X}(C^p) = \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

если $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$ и $\mathfrak{X}(C^p) = \emptyset$, если $p \notin \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$.

Всякая ω -композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω -композиционный спутник f , что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называют каноническим.

Лемма 1.4 [1, Замечание 2]. Если формация $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) = CF_\omega(f)$, то $F(p) = \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для всех $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$.

Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют [16], [17]

1) ω -разрешимо насыщенной, если из условия $G / N \in \mathfrak{F}$ для нормальной в G ω -подгруппы N из $\Phi(G_{\omega-\infty})$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$

(здесь $G_{\omega-\infty}$ обозначает ω -разрешимый радикал группы G);

2) $\mathfrak{N}_\omega$ -насыщенной, если для любого $p \in \omega$ из того, что $G / \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Для всякого простого числа p через Z_p обозначают группу порядка p . Если G – группа, $\mathfrak{F}$ – класс групп, то через $\mathcal{K}(G)$ обозначают класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G , $\mathcal{K}(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \mathcal{K}(G)$. Совокупность всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{F}$ обозначают через $Q(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.5 [17, Теорема 4.5]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, ω – непустое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_\omega$ -насыщенной;
- 2) формация $\mathfrak{F}$ ω -разрешимо насыщена;
- 3) $c\text{form}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{F}$;
- 4) $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f – ω -композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $f(p) = Q(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, если $p \in \omega$ и $Z_p \in \text{Com}(\mathfrak{F})$;

б) $f(p) = \emptyset$,

в) $f(S) = \mathfrak{F}$, если $S \in \mathfrak{J} \setminus \{Z_p \mid p \in \omega\}$, где $\mathfrak{J}$ – класс всех простых групп.

Для двух ω -композиционных спутников f и h полагают $f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Отметим, что если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ и f – произвольный внутренний ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leq F$.

Лемма 1.6 [1, Лемма 6]. Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω -композиционные c_∞^ω -значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Тогда через $G^\mathfrak{F}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп K группы G с $G / K \in \mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G . Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то гашнцово произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.7 [18, Гл. IV.], [19, Предложение 2.2.11]. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ – формации. Тогда:

- 1) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{F} \neq \emptyset$;
- 2) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является формацией;
- 3) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^\mathfrak{H})^\mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{G}$;

4) $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{M})$.

Лемма 1.8 [1]. Пусть формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда если $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то формация $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = t(p)\mathfrak{H}$, если $t(p) \neq \emptyset$, $f(p) = h(p)$, если $t(p) = \emptyset$.

2 Доказательство основных результатов

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\emptyset \neq \omega \subseteq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда произведение $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ является тотально ω -композиционной формацией. В частности, формация $\mathfrak{S}_\omega \mathfrak{F}$ тотально ω -композиционна.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$. Покажем прежде, что формация $\mathfrak{M}$ является $\mathfrak{N}_p$ -насыщенной для любого $p \in \omega$. Действительно, пусть $p \in \omega$ и $G / \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$G^{\mathfrak{M}} \subseteq \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{N}_p.$$

Значит, $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M}$. Поскольку ввиду леммы 1.7 (4) имеет место

$$\mathfrak{N}_p \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_\pi) \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{M},$$

то $G \in \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_p$ -насыщенная формация для любого $p \in \omega$. В силу леммы 1.5 формация $\mathfrak{M}$ является ω -композиционной.

Рассмотрим формацию всех нильпотентных π -групп $\mathfrak{N}_\pi$. Поскольку $\mathfrak{N}_\pi$ является композиционной формацией, то она ω -композиционна. Понятно также, что для любого $p \in \omega$ имеет место $\mathfrak{N}_\pi(C^p) = (1)$, где (1) – формация всех единичных групп. Согласно лемме 1.5 (2) имеем $\mathfrak{N}_\pi = CF_\omega(t)$, где t – такой ω -композиционный спутник, что $t(\omega') = \mathfrak{N}_\pi$, $t(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_\pi(C^p) = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. В силу леммы 1.7 (4) имеют место равенства

$$\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{S}_\pi) \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{M}.$$

Применяя теперь лемму 1.8 заключаем, что формация $\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M}$ имеет такой ω -композиционный спутник t , что $t(\omega') = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ и

$$t(p) = t(p)\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$$

для всех $p \in \omega$. Поскольку при этом формация $\mathfrak{M}$ является ω -композиционной и $t(\omega') = \mathfrak{M}$, $t(p) = \mathfrak{M}$ для всех $p \in \omega$, то $\mathfrak{M} - 2$ -кратно ω -композиционная формация. Но тогда $\mathfrak{M} - n$ -кратно ω -композиционная формация для любого натурального n . Значит, $\mathfrak{M} -$ тотально ω -композиционная формация. В частности, если $\pi = \omega$, то $\mathfrak{S}_\omega \mathfrak{F} -$ тотально ω -композиционная формация. $\square$

Доказательство теоремы 0.1. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = c_\infty^\omega \text{form}(G)$ и $f -$ минимальный c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 1.1 ω -композиционный спутник f является внутренним, а также имеют место следующие равенства:

$$\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(G)), \quad f(p) = c_\infty^\omega \text{form}(G / C^p(G))$$

для всех $p \in \pi$ и $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(G / R_\omega(G))$.

Таким образом, $|\pi| < \infty$ и $f(a) -$ однопорожденная тотально ω -композиционная формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

Достаточность. Пусть

$$\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) = \{p_1, \dots, p_m\}$$

– конечное множество, $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f -$ такой внутренний c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, что $f(p_i) = c_\infty^\omega \text{form}(H_i)$ для любого $p_i \in \pi$ и $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(H_0)$.

Для каждого $p_i \in \pi$ через P_i обозначим группу порядка p_i и пусть $B_i -$ регулярное сплетение групп P_i и $H_i / O_{p_i}(H_i)$. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$B_i = P_i \wr (H_i / O_{p_i}(H_i)) = K_i \rtimes (H_i / O_{p_i}(H_i)),$$

где $K_i -$ база сплетения B_i . В силу леммы 1.2 имеем $C^{p_i}(B_i) = O_{p_i}(B_i) = K_i$. Пусть $B_0 = H_0 / R_\omega(H_0)$. Тогда $R_\omega(B_0) = 1$ и ввиду леммы 1.1 (4) имеет место равенство

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_\omega(A) = 1).$$

В силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0)$ является тотально ω -композиционной. Поэтому

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(H_0) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0).$$

Кроме того, очевидно включение

$$\text{form}(H_0) \subseteq \text{form}(R_\omega(H_0))\text{form}(H_0 / R_\omega(H_0)).$$

Таким образом, с учетом леммы 1.7 (4) имеем

$$\begin{aligned} f(\omega') &\subseteq c_\infty^\omega \text{form}(H_0) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{S}_\omega(\text{form}(R_\omega(H_0))\text{form}(H_0 / R_\omega(H_0))) = \\ &= (\mathfrak{S}_\omega \text{form}(R_\omega(H_0)))\text{form}(H_0 / R_\omega(H_0)) = \\ &= \mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0 / R_\omega(H_0)) = \mathfrak{S}_\omega \text{form}(B_0). \end{aligned}$$

Следовательно, если $A \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{S}_\omega \text{form}(B_0)$ и $R_\omega(A) = 1$, то $A \in \text{form}(B_0) \subseteq c_\infty^\omega \text{form}(B_0)$. Так как при этом $B_0 \in f(\omega')$, то $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(B_0)$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = c_\infty^\omega \text{form}(B)$, где

$$B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_m.$$

Пусть $\mathfrak{L} = c_\infty^\omega \text{form}(B)$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{L}))$, а $L -$ канонический ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\pi_1 = \omega \cap \pi(\text{Com}(B))$. Заметим, что по построению группы B имеет место равенство

$$\omega \cap \pi(\text{Com}(B)) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

Следовательно, $\pi_1 = \pi$. Поскольку

$$B_i / O_{p_i}(B_i) = B_i / K_i \simeq H_i / O_{p_i}(H_i) \in f(p_i)$$

и f внутренний ω -композиционный спутник, то в силу леммы 1.3 имеем $B_i \in \mathfrak{F}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Кроме того, $B_0 \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь обратное включение. Поскольку $B_i \in \mathfrak{L}$, то

$$B_i / C^{p_i}(B_i) = B_i / K_i \simeq H_i / O_{p_i}(H_i) \in L(p_i).$$

Следовательно, $H_i \in \mathfrak{N}_{p_i} L(p_i)$. Но $L(p_i) = \mathfrak{N}_{p_i} L(p_i)$

по лемме 1.4. Значит, для всех $p_i \in \pi$ имеем

$$f(p_i) = c_\infty^\omega \text{form}(H_i) \subseteq L(p_i).$$

Кроме того, поскольку $B_0 \in \mathfrak{L}$ и $R_\omega(B_0) = 1$, то $B_0 \simeq B_0 / R_\omega(B_0) \in L(\omega')$. Значит,

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(B_0) \subseteq L(\omega').$$

Таким образом, для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место включение $f(a) \subseteq L(a)$. Следовательно, $f \leq L$. Последнее влечет $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} = c_\infty^\omega \text{form}(B)$ – однопорожденная тотально ω -композиционная формация. $\square$

В случае, когда $\omega = \{p\}$ из теоремы 0.1 получаем

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ – тотально p -композиционная формация, f – минимальный c_∞^p -значный p -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально p -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $f(p)$ и $f(p')$ – однопорожденные тотально p -композиционные формации.

Если $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 0.1 вытекает следующий результат

Следствие 2.2. Пусть $\mathfrak{F} = CF(f)$ – тотально композиционная формация, f – минимальный c_∞ -значный композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(p)$ – однопорожденная тотально композиционная формация для всех $p \in \pi$.

Лемма 2.2. Пусть G – группа и $\mathfrak{H}$ – класс всех таких групп H , что $\text{Com}(H) \subseteq \text{Com}(G)$. Тогда $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h – такой внутренний c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник, что $h(p) = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, $h(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$ и $h(\omega') = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Заметим прежде, что класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{H}$ и $K \trianglelefteq A$. Тогда $\text{Com}(A) \subseteq \text{Com}(G)$ и поскольку $\text{Com}(A/K) \subseteq \text{Com}(A)$, то $\text{Com}(A/K) \subseteq \text{Com}(G)$. Значит, $A/K \in \mathfrak{H}$. Пусть теперь $A/K_1 \in \mathfrak{H}$, $A/K_2 \in \mathfrak{H}$, где $K_1 \cap K_2 = 1$. Тогда $\text{Com}(A/K_i) \subseteq \text{Com}(G)$, $i = 1, 2$. Понятно, что $K_1 K_2 / K_2 \trianglelefteq A / K_2$. Следовательно,

$$\text{Com}(K_1 K_2 / K_2) \subseteq \text{Com}(A / K_2) \subseteq \text{Com}(G).$$

А поскольку

$$K_1 K_2 / K_2 \simeq K_1 / K_1 \cap K_2 \simeq K_1,$$

то $\text{Com}(K_1) \subseteq \text{Com}(G)$. Поэтому $\text{Com}(A) \subseteq \text{Com}(G)$. Последнее влечет $A \in \mathfrak{H}$. Следовательно, класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией.

Пусть теперь h – такой ω -композиционный спутник, что $h(p) = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, $h(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$ и $h(\omega') = \mathfrak{H}$. Покажем, что $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$. Заметим, что если $B \in \mathfrak{H}$, то $B / R_\omega(B) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$ и $B / C^p(B) \in \mathfrak{H} = h(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(B)) \subseteq \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, поскольку $\mathfrak{H}$ формация. Следовательно, $B \in CF_\omega(h)$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq CF_\omega(h)$. Последнее означает, что h внутренний ω -композиционный спутник формации $CF_\omega(h)$.

Допустим, что $CF_\omega(h) \not\subseteq \mathfrak{H}$ и пусть D – группа минимального порядка из $CF_\omega(h) \setminus \mathfrak{H}$. Тогда D монолитическая группа с монолитом $N = D^\mathfrak{H}$ и $\text{Com}(D/N) \subseteq \text{Com}(G)$.

Предположим, что $R_\omega(D) = 1$. Тогда поскольку $D \in CF_\omega(h)$, то $D \simeq D / R_\omega(D) \in h(\omega') = \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $R_\omega(D) \neq 1$. Поэтому N – абелева p -группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $D \in CF_\omega(h)$, то $D / C^p(D) \in h(p)$ и $h(p) \neq \emptyset$, т. е. $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$. Но тогда $\text{Com}(N) \subseteq \text{Com}(G)$ и, значит, $\text{Com}(D) \subseteq \text{Com}(G)$. Следовательно, $D \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Таким образом, $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ – ω -композиционная формация. Поскольку при этом все значения ω -композиционного спутника h являются ω -композиционными формациями ($h(a) = \mathfrak{H}$ для любого $a \in (\omega \cap \pi(\text{Com}(G))) \cup \{\omega'\}$ и $h(a) = \emptyset$ для любого $a \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$), то $CF_\omega(h)$ – 2-кратно ω -композиционная формация и т. д. Последнее означает, что формация $CF_\omega(h)$ является n -кратно ω -композиционной для любого натурального n , т. е. $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$ – тотально ω -композиционная формация, а h – c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. $\square$

Доказательство теоремы 0.2. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – ограниченная totally ω -композиционная формация. Тогда найдется такая группа G , что

$$\mathfrak{F} \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G) = \mathfrak{X}.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех таких групп H , что $\text{Com}(H) \subseteq \text{Com}(G)$. Понятно, что $G \in \mathfrak{H}$ и $\text{Com}(\mathfrak{H}) = \text{Com}(G)$. В силу леммы 2.2 формация $\mathfrak{H}$ является totally ω -композиционной. Поэтому имеет место следующее включение

$$\mathfrak{X} = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Значит, $\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(G)$. Следовательно, $\text{Com}(\mathfrak{F}) \subseteq \text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(G)$ и $|\pi| < \infty$.

Обозначим через x – минимальный c_{∞}^{ω} -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{X}$. Тогда ввиду леммы 1.6 $f \leq x$. В силу леммы 1.1 имеем

$$f(p) = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A / C^p(A) \mid A \in \mathfrak{F}) \subseteq x(p) = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G / C^p(G))$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$ и

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A / R_{\omega}(A) \mid A \in \mathfrak{F}) \subseteq x(\omega') = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G / R_{\omega}(G)).$$

Таким образом, $|\pi| < \infty$ и для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ является ограниченной totally ω -композиционной формацией.

Достаточность. Пусть

$$\pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \{p_1, \dots, p_m\}$$

– конечное множество, $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f – минимальный c_{∞}^{ω} -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и $f(\omega')$, $f(p_1), \dots, f(p_m)$ – ограниченные totally ω -композиционные формации. Тогда найдется группа K_0 такая, что $f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_0)$ и для каждого $p_i \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ найдется группа K_i такая, что $f(p_i) \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_i)$.

Пусть P_i – группа порядка p_i и пусть D_i – регулярное сплетение групп P_i и $K_i / O_{p_i}(K_i)$. Тогда $D_i = P_i \wr (K_i / O_{p_i}(K_i)) = T_i \rtimes (K_i / O_{p_i}(K_i))$, где T_i – база регулярного сплетения D_i . Из леммы 1.2 следует, что $C^{p_i}(D_i) = O_{p_i}(D_i) = T_i$. Пусть $D_0 = K_0 / R_{\omega}(K_0)$. Тогда $R_{\omega}(D_0) = 1$. Ввиду леммы 1.1 (4) имеет место равенство

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1).$$

В силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0)$ является totally ω -композиционной. Поэтому

$$f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0).$$

Кроме того, очевидно включение

$$\text{form}(K_0) \subseteq \text{form}(R_{\omega}(K_0)) \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)).$$

Таким образом, ввиду леммы 1.7 (4) имеет место

$$\begin{aligned} f(\omega') &\subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{S}_{\omega}(\text{form}(R_{\omega}(K_0)) \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0))) = \\ &= (\mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(R_{\omega}(K_0))) \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)) = \\ &= \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)) = \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(D_0). \end{aligned}$$

Следовательно, если $A \in f(\omega')$ и $R_{\omega}(A) = 1$, то $A \in \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(D_0)$. Значит,

$$A \in \text{form}(D_0) \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D_0).$$

Поэтому имеет место включение

$$\begin{aligned} f(\omega') &= c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1) \subseteq \\ &\subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D_0). \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{L} = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D)$, где $D = D_0 \times D_1 \times \dots \times D_m$.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Пусть $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{L})) \cap \omega$ и l – минимальный c_{∞}^{ω} -значный ω -композиционный спутник $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(D))$. Заметим, что по построению группы D имеет место равенство

$$\omega \cap \pi(\text{Com}(D)) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

Следовательно, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{L}$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{L}$. Тогда A – монолитическая группа с монолитом $T = A^{\omega}$. Предположим, что $R_{\omega}(A) = 1$. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то в силу леммы 1.1 имеем

$$A \simeq A / 1 = A / R_{\omega}(A) \in f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D_0).$$

Однако поскольку $D_0 \simeq D / (D_1 \times \dots \times D_m) \in \mathfrak{L}$, то $A \in \mathfrak{L}$. Полученное противоречие показывает, что $R_{\omega}(A) \neq 1$. Поэтому T – абелева p -группа для некоторого простого $p \in \omega$. Так как при этом $p \in \pi(\text{Com}(A))$ и $A \in \mathfrak{F}$, то $p \in \pi$. Не ограничивая общности мы можем считать, что $p = p_1$. Поскольку ввиду леммы 1.5 (1) формация $\mathfrak{L}$ является $\mathfrak{N}_p$ -насыщенной, то $T \not\subseteq \Phi(O_p(A))$. Поэтому $T = O_p(A) = C^p(A)$. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A / C^p(A) \in f(p) \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_1).$$

Так как $T = O_p(A) = C^p(A)$, то $O_p(A / C^p(A)) = 1$.

По лемме 1.1 имеем

$$A / C^p(A) \in c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_1 / O_p(K_1)).$$

Понятно, что $D_1 \in \mathfrak{L}$. Значит, $D_1 / C^p(D_1) \in l(p)$.

Ввиду леммы 1.2 имеем $T_1 = C^p(D_1)$. Следовательно,

$$K_1 / O_p(K_1) \simeq D_1 / T_1 = D_1 / C^p(D_1) \in l(p).$$

Таким образом, $D_1 / C^p(D_1) \in l(p)$. Поскольку $A / T \in \mathfrak{L}$, то в силу леммы 1.1 имеем

$$(A / T) / R_{\omega}(A / T) \in l(\omega'),$$

и $(A / T) / C^q(A / T) \in l(q)$ для всех

$$q \in \pi(\text{Com}(A / T)) \cap \omega.$$

С другой стороны, поскольку $R_\omega(A/T) = R_\omega(A)/T$ и $C^q(A/T) = C^q(A)/T$ для всех простых чисел $q \neq p$, то

$$\begin{aligned} A/R_\omega(A) &\simeq (A/T)/(R_\omega(A)/T) \simeq \\ &\simeq (A/T)/R_\omega(A/T) \in l(\omega') \end{aligned}$$

и $A/C^q(A) \simeq (A/T)/C^q(A/T) \in l(q)$.

Значит, $A \in \mathcal{L}$. Последнее противоречит выбору группы A . Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – ограниченная c_∞^ω -формация. $\square$

Пусть $\omega = \{p\}$. Тогда из теоремы 0.2 вытекает следующее

Следствие 2.3. Пусть $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ – тотально p -композиционная формация, f – её минимальный c_∞^p -значный p -композиционный спутник. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально p -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $f(p)$ и $f(p')$ – ограниченные тотально p -композиционные формации.

Пусть $\omega = \mathbb{P}$, тогда из теоремы 0.2 получаем

Следствие 2.4. Пусть $\mathfrak{F} = CF(f)$ – тотально композиционная формация, f – её минимальный c_∞ -значный композиционный спутник, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(p)$ является ограниченной тотально композиционной формацией для всех $p \in \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Кратно $\mathcal{L}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997.
4. Селькин, В.М. Однопорожденные формации / В.М. Селькин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.
5. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012.
6. Щербина, В.В. О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп / В.В. Щербина // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, № 1. – С. 18–32. – DOI: <https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32>.
7. Лось, И.П. τ -Замкнутые тотально ω -композиционные формации конечных групп с булевыми подрешетками / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского // Материалы Международной

конференции по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Изд-во Академии наук РТ. – 2021. – Т. 60. – С. 92–94.

8. Tsarev, A.A. Inductive lattices of totally composition formations / A.A. Tsarev // Revista Colombiana de Matematicas. – 2018. – Vol. 52, № 2. – P. 161–169. – DOI: <https://dx.doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156>.

9. Tsarev, A.A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A.A. Tsarev // Ricerche di Matematica. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698. – DOI: [10.1007/s11587-019-00433-3](https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3).

10. Tsarev, A.A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A.A. Tsarev // Ricerche Mat. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698.

11. Los, I.P. Separability of the lattice of τ -closed totally ω -composition formations of finite groups / I.P. Los, V.G. Safonov // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019. – Vinnytsia, Ukraine. – 2019. – P. 64–65.

12. Лось, И.П. Модулярность решетки τ -замкнутых тотально ω -композиционных формаций конечных групп / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова, 3–7 августа 2020. – Екатеринбург. – 2020. – С. 62–63.

13. Лось, И.П. On sublattices of the lattice of all totally ω -composition formations of finite groups / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Международная математическая конференция «Мальцевские чтения», посвященная 80-летию Ю.Л. Ершова, 16–20 ноября 2020. – Новосибирск. – 2020. – С. 178.

14. Щербина, В.В. Частично композиционные формации с заданной структурой. I. / В.В. Щербина // Прикладная математика & Физика. – 2021. – Т. 53, № 3. – С. 171–204.

15. Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – 1992. – № 7. – С. 39–43.

16. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.

17. Шеметков, Л.А. Локальные задания формаций конечных групп / Л.А. Шеметков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 8. – С. 229–244.

18. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter. – 1992.

19. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer. – 2006.

Поступила в редакцию 21.09.2021.

Информация об авторах

Лось Инна Павловна – младший научный сотрудник
Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор