

УДК 530.182

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_7КИНК МОДИФИЦИРОВАННОГО РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛИННЫХ ВОЛН

М.А. Князев

Белорусский национальный технический университет, Минск

KINK FOR MODIFICATED REGULARIZED LONG-WAVE EQUATION

M.A. Knyazev

Belarusian National Technical University, Minsk

Аннотация. Рассмотрена новая версия модифицированного регуляризованного уравнения длинных волн. Уравнения такого типа используются в качестве альтернативы уравнению Кортевега-де Фриза. Модификация уравнения заключается в учете слагаемого, описывающего взаимодействие процессов дисперсии и диссипации. При помощи прямого метода Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных построено решение типа кинка (антикинка) для модифицированного уравнения. Проанализирована возможность построения решения, описывающего связанное состояние кинка и антикинка.

Ключевые слова: регуляризованное уравнение длинных волн, кинк, антикинк, прямой метод Хироты.

Для цитирования: Князев, М.А. Кинк модифицированного регуляризованного уравнения длинных волн / М.А. Князев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_7

Abstract. A new version of the modified regularized long-wave equation is considered. The equations of such a type are used as an alternative to the Korteweg-de Vries equation. A modification of the equation consists in an accounting the term which describes an interaction of dispersion and dissipation. Using the direct Hirota method for nonlinear equations in partial derivatives a kink-type (antikink-type) solution for modified equation is constructed. A possibility to construct a coupled solution of kink and antikink is analysed.

Keywords: regularized long-wave equation, kink, anti-kink, Hirota direct method.

For citation: Knyazev, M.A. Kink for modiflicated regularized long-wave equation / M.A. Knyazev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_7 (in Russian)

Введение

Регуляризованное уравнение длинных волн (RLW) в (1+1)-мерном случае записывается в виде

$$u_t + \gamma u_x - \alpha u_{xx} + 2\beta u u_x = 0, \quad (0.1)$$

где α, β, γ – положительные постоянные, $u_t = \partial u / \partial t$ и т. п. Оно было построено в качестве альтернативы уравнению Кортевега-де Фриза и позволяет описывать нелинейные среды в более широком динамическом диапазоне [1], [2]. Уравнение (0.1) широко используется для описания физических явлений в средах со слабой нелинейностью и дисперсией волн, включая волны на мелкой воде, ионно-акустические волны в плазме, магнитогидродинамические волны в холодной плазме, акустические волны в ангармонических кристаллах, а также распространение волн в упругих средах и оптических волокнах.

Математическая теория длинных волн малой, но конечной амплитуды в дисперсионных средах, в том числе и в водных каналах, подробно разработана в работах [3], [4]. Продемонстрировано, что RLW-уравнение является корректно определенным по Адамару в смысле соответствия

решений начальным значениям, их единственности и непрерывности. RLW-уравнение обладает топологически нетривиальными решениями солитонного типа. Проблема, однако, в том, что построить решение в аналитическом виде удастся только для ограниченного набора начальных и граничных условий, а также значений коэффициентов уравнения. Аналитическое выражение в явном виде получено только для односолитонного решения, хотя численные расчеты показывают, что возможно существование и связанных состояний [5]. В связи с вышеуказанным, обычно основное внимание уделяется численным методам, при помощи которых на начальном этапе исследований и было показано существование односолитонного и двухсолитонного решений уравнения RLW [6], [7].

Наряду с RLW уравнением определенное внимание привлекает более общее уравнение, так называемое обобщенное регуляризованное уравнение длинных волн (GRLW). Это уравнение имеет вид

$$u_t + u_x + p(p+1)u^p u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad (0.2)$$

где μ – положительный постоянный коэффициент, p – целое положительное число. Ясно, что

уравнение (0.1) является частным случаем уравнения (0.2). Однако это уравнение не получило достаточно широкого распространения. Во-первых, оно допускает высокие порядки нелинейности, что значительно затрудняет аналитическое решение. Во-вторых, устойчивость его решений зависит от скорости их распространения [8]. Вследствие указанных причин основное внимание в исследовании уравнения GRLW уделяется численным методам. Достаточно полный обзор современного состояния работ по исследованию уравнения GRLW как аналитическими, так и численными методами, приведен в [9].

Значительно большее внимание привлекает введенное в работе [7] модифицированное регуляризованное уравнение длинных волн (mRLW). Это уравнение можно записать следующим образом:

$$q_{xxt} + 2q_{xx}q_t + 4q_{xt}^2 - q_{xt} - q_t = 0, \quad (0.3)$$

где $q(x, t)$ – вещественная функция такая, что солитон определяется соотношением $u = -q_{xt}$. При помощи прямого метода Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [10] для уравнения (0.3) можно построить решения в виде одиночного солитона, а также связанного состояния двух солитонов (двухсолитонное решение). Дисперсионное соотношение при этом имеет вид $\omega = k/(1-k^2)$, где k и ω – параметры решения. Численные исследования указывают на возможность существования и трехсолитонного решения уравнения (0.3), однако в аналитической форме до настоящего времени получить его не удалось. mRLW-уравнение во многих чертах ведет себя подобно интегрируемому нелинейному уравнению, т. е. такому уравнению, для которого можно построить решение, описывающее связанное состояние произвольного числа солитонов или солитоноподобных объектов. Тем не менее, для него характерно наличие ряда неустойчивостей.

Возможны и другие модификации регуляризованного уравнения длинных волн. В частности, представляет интерес такая его модификация, в результате которой изменится характер решения и вместо солитона появится решение, имеющее вид кинка. Для такого случая уравнения можно записать в следующем виде

$$u_t + \gamma u_x - \alpha u_{xxt} + 2\beta u u_x - (u_t u)_x = 0. \quad (0.4)$$

В настоящей работе построено решение уравнения (0.4), описывающее состояние типа одиночного кинка (антикинка).

1 Метод решения

Для того, чтобы построить решение уравнения (0.4), соответствующее состоянию типа одиночного кинка, применим прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [5], [11]. Введем новую зависимую переменную при помощи соотношения Коула – Хопфа

$$u = \sigma \frac{\partial}{\partial x} (\ln F), \quad (1.1)$$

где $F = F(x, t)$ – неизвестная функция, σ – постоянная, значение которой будет определено ниже. Подставим соотношение (1.1) в уравнение (0.4), проинтегрируем его по x и положим константу интегрирования равной нулю. В результате уравнение (0.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{F_t}{F} + \gamma \frac{F_x}{F} - \alpha \frac{F_{xxt}}{F} + \alpha \frac{F_t F_{xx}}{F^2} + \\ + 2\alpha \frac{F_x F_{xt}}{F^2} - 2\alpha \frac{F_t F_x^2}{F^3} + \\ + \beta \sigma \frac{F_x^2}{F^2} - \sigma \frac{F_{xt} F_x}{F^2} + \sigma \frac{F_x^2 F_t}{F^3} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Метод Хироты успешно применим в случае, когда, после введения новой зависимой переменной, уравнение становится билинейным, т. е. квадратичным по новой функции. В данном случае в уравнении имеются кубические (трилинейные) члены. Однако, поскольку мы строим частное решение, то можно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$(\sigma - 2\alpha) \frac{F_x^2 F_t}{F^3} = 0,$$

откуда сразу удастся определить значение параметра σ , а именно, $\sigma = 2\alpha$. Теперь уравнение (1.2) можно записать в билинейном виде

$$F_t F + \gamma F_x F - \alpha F_{xxt} F + \alpha F_t F_{xx} + 2\alpha \beta F_x^2 = 0. \quad (1.3)$$

Представим функцию F в виде формального ряда теории возмущений

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots, \quad (1.4)$$

где $f_i = f_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ – новые неизвестные функции, ε – вообще говоря, не малый параметр.

Если подставить соотношение (1.4) в уравнение (1.3) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , то в результате получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных. Только первое уравнение этой системы будет однородным. Все остальные уравнения – неоднородные. При этом каждая последующая функция f_i будет определяться только предыдущими функциями и их производными. Для примера выпишем в явном виде первые три уравнения этой системы:

$$f_{1,t} + \gamma f_{1,x} - \alpha f_{1,xt} = 0, \quad (1.5)$$

$$f_{2,t} + \gamma f_{2,x} - \alpha f_{2,xt} = -\alpha f_{1,t} f_{1,xx} - 2\alpha \beta f_{1,x}^2, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} f_{3,t} + \gamma f_{3,x} - \alpha f_{3,xt} = & \alpha f_1 f_{2,xt} - f_1 f_{2,t} - \\ & - \gamma f_1 f_{2,x} - \alpha f_{1,t} f_{2,xx} - \\ & - \alpha f_{1,xx} f_{2,t} - 4\alpha \beta f_{1,x} f_{2,x} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Последовательно решая данную систему, можно, в принципе, определить все функции f_i .

2 Одиночный кинк

Для того, чтобы построить решение в виде одиночного кинка, нам понадобятся уравнения (1.5) и (1.6). Представим функцию f_1 в виде

$$f_1 = \exp(k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}), \quad (2.1)$$

где k_1 , ω_1 , $\eta_1^{(0)}$ – параметры решения. Параметр $\eta_1^{(0)}$ характеризует начальное положение солитона и без потери общности его можно положить равным нулю. Подставим соотношение (2.1) в уравнение (1.5). В результате получим дисперсионное соотношение вида

$$\omega_1 = \frac{\gamma k_1}{1 - \alpha k_1^2}. \quad (2.2)$$

Если подставить соотношение (2.1) в правую часть уравнения (1.6) и приравнять полученное выражение нулю, что необходимо для обрывания ряда (1.4) в методе Хироты, то удастся точно определить значение параметра ω_1 :

$$\omega_1 = 2\beta. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), находим квадратное уравнение для определения параметра k_1

$$2\alpha\beta k_1^2 + \gamma k_1 - 2\beta = 0,$$

решения которого

$$k_1^{(1)} = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16\alpha\beta^2}}{4\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 16\alpha\beta^2}}{4\alpha\beta} \quad (2.5)$$

нам понадобятся для дальнейшего анализа.

Коэффициенты α , β и γ по условию задачи являются положительными константами. Следовательно, параметр $k_1^{(1)}$ является положительным, а $k_1^{(2)}$ – отрицательным. Известно, что положительное значение параметра k_1 соответствует решению типа кинка, а отрицательное значение этого параметра соответствует решению типа антикинка [12]. Однако для кинка и антикинка рассматриваемый параметр отличается только знаком. Что касается его абсолютных значений, то они равны друг другу. Если рассмотреть нелинейное уравнение движения, допускающее конфигурации типа кинка ϕ_k и антикинка ϕ_a , то последние будут связаны соотношением $\phi_k(kx - \omega t) = -\phi_a(-kx - \omega t)$. По сути дела, кинк и антикинк симметричны относительно начала координат. В рассматриваемом здесь случае $k_1^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$ не равны по модулю. Таким образом, можно заключить, что полученные значения (2.4) и (2.5) параметра k_1 соответствуют разным кинку и антикинку. Для каждого из этих значений имеется свой антикинк и свой кинк соответственно.

Окончательно решение уравнения (0.4), описывающее состояние типа одиночного кинка (антикинка) для соответствующих значений параметра k_1 , принимает вид

$$u(x, t) = \sigma \frac{f_{1,x}}{1 + f_1} = \alpha k_1 \left[1 + \tanh \frac{k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}}{2} \right]. \quad (2.6)$$

Поскольку ϵ в соотношении (1.4) является произвольным параметром, данное выражение получено при условии, что он равен единице. Как видно, соотношение (2.6) это не кинк (антикинк) согласно принятым соглашениям, а скорее объект типа кинка (антикинка), поскольку выражение содержит постоянную составляющую. Непосредственной подстановкой соотношения (2.6) в уравнение (0.4) можно убедиться, что оно является решением этого уравнения.

Заключение

Известная модификация уравнения RLW вида (0.3) допускает решение в виде солитона. В настоящей работе рассмотрена новая модификация регуляризованного уравнения длинных волн, в которой учитывается взаимодействие процессов дисперсии и диссипации. Построено решение уравнения, описывающее состояние типа одиночного кинка (антикинка). Параметры полученного решения принимают фиксированные значения. Это можно рассматривать как качественное указание на то, что полученное решение является устойчивым [12].

Решения типа солитона или кинка являются топологически различными. В тоже время сравнение показывает, что дисперсионные соотношения для них одинаковым образом зависят от параметра k_1 и совпадают, когда коэффициенты α и γ равны единице. Следовательно, фазовые скорости для них будут одинаковым образом зависеть от k_1 , а это, в свою очередь, означает, что в обеих моделях дисперсия волновых пакетов будет носить одинаковый характер.

Поскольку параметры $k_1^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$ не равны по модулю, в качестве дальнейшего исследования данной задачи представляет интерес построение решения, которое описывало бы связанное состояние, например, кинка с $k_1 = k_1^{(1)}$ и антикинка с $k_1 = k_1^{(2)}$.

Благодарю рецензента статьи за полезные замечания, которые значительно способствовали её улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peregrine, D.H. Calculation of the development of an undular bore / D.H. Peregrine // J. Fluid Mech. – 1966. – Vol. 25. – P. 321–330.

2. *Peregrine, D.H.* Long waves on a beach / D.H. Peregrine // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 25. – P. 815–827.
3. *Benjamin, T.B.* Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Phil. Trans. Royal Soc. London, A. – 1972. – Vol. 272. – P. 47–78.
4. *Bona, J.L.* A mathematical model for long waves generated by wavemakers in non-linear dispersive systems / J.L. Bona, P.J. Bryant // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1973. – Vol. 73. – P. 391–405.
5. *Додд, Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – Москва: Мир, 1984. – 694 с.
6. *Eilbeck, J.C.* Numerical study of the regularized long-wave equation I: Numerical methods / J.C. Eilbeck, G.R. McGuire // J. Computational Physics. – 1975. – Vol. 19. – P. 43–57.
7. *Gibbon, J.D.* A modified regularized long-wave equation with an exact two-soliton solution / J.D. Gibbon, J.C. Eilbeck, R.K. Dodd // J. Phys. A: Math. and General. – 1976. – Vol. 9. – P. L127–L130.
8. *Bona, J.L.* On the stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves / J.L. Bona, A. Soyeur // J. Nonlinear Sci. – 1994. – Vol. 4. – P. 449–470.
9. *Seydi Battal Gazi Karakoc.* Numerical approximation of the generalized regularized long wave equation using Petrov – Galerkin finite element method / Seydi Battal Gazi Karakoc, Samir Kumar Bhowmik // arXiv:1904.03354[math.NA]. – 28 p.
10. *ter Braak, F.* Aspects of the modified regularized long-wave equation / F. ter Braak, W.J. Zakrewski // arXiv:1707.00669[nlin.PS]. – 10 p.
11. *Абловиц, М.* Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва: Мир, 1982. – 479 с.
12. *Раджараман, Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – Москва: Мир, 1985. – 416 с.

Поступила в редакцию 05.04.2021.

Информация об авторах

Князев Михаил Александрович – д.ф.-м.н., доцент