**МАТЕМАТИКА**

УДК 517.5 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92

# ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

**Г.Н. Казимиров**

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

# DIRECT AND INVERSE THEOREMS OF APPROXIMATION THEORY FOR THE GENERALIZED MODULUS OF SMOOTHNESS OF SOME CLASS OF FUNCTIONS

**G.N. Kazimirov**

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** В статье доказывается совпадение обобщённых модулей гладкости *k*-го порядка, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига типа Гегенбауэра, с разными и одинаковыми сдвигами и как следствие получены прямая и обратная теоремы теории приближений алгебраическими многочленами.

**Ключевые слова:** *наилучшее приближение алгебраическими многочленами*, *оператор обобщённого сдвига*, *обобщённый модуль гладкости.*

**Для цитирования:** *Казимиров*, *Г.Н.* Прямая и обратная теоремы теории приближений для обобщённого модуля гладкости некоторого класса функций / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 92–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92

**Abstract.** This article proves the coincidence of generalized moduli of smoothness of the *k*-s order, defined with the help of Gegenbauers generalized shift operator, with different and identical shifts and, as a consequence, direct and inverse theorems of approximation theory by algebraic polynomials are obtained.

**Keywords:** *the best approximation by algebraic polynomials*, *Gegenbauers generalized shift operator*, *generalized modulus of smoothness.*

**For citation:** *Kazimirov*, *G.N*. Direct and inverse theorems of approximation theory for the generalized modulus of smoothness of some class of functions / G.N. Kazimirov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 92–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92 (in Russian)

## Введение

Ранее были доказаны теоремы о связи между наилучшими приближениями алгебраическими многочленами и обобщёнными модулями гладкости, определяемых с помощью операторов обобщённых сдвигов, предложенных Потаповым М.К. [1]. Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. В настоящей работе для некоторого класса функций получены прямые и обратные теоремы для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом.

## 1 Основные определения

Будем говорить, что $f \in L_q$, $1 \le q < \infty$, если функция *f* измерима на отрезке [–1, 1] и

$$\|f\|_q = \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < +\infty,$$

а для $q = \infty$ функция *f* непрерывна на отрезке [–1, 1] и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$. Через $L_{q,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций *f*, что $f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \in L_q$ и

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left\| f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \right\|_q .$$

Рассмотрим оператор обобщённого сдвига типа Гегенбауэра, предложенный в [1]. Положим для $\nu > -\frac{1}{2}$

$$T_t(f,x,\nu) = \tag{1.1}$$
$$= \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^{1} f\left( x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t \right) (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy.$

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f,x,\nu) = T_t(f,x,\nu) - f(x),$$
$$\Delta_t^k(f,x,\nu) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f,x,\nu),x,\nu),\ k = 2,3,...,$$

$$\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x,\nu)=\Delta^1_{t_k}(\Delta^{k-1}_{t_1,\dots,t_{k-1}}(f,x,\nu),x,\nu),$$
$$k=2,3,\dots,$$
$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=\sup_{|t_i|\le\delta,i=1,\dots,k}\left\|\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x)\right\|_{q,\alpha,\beta},$$
$$\omega_k(f,\delta,\nu)_{q,\alpha,\beta}=\sup_{|t|\le\delta}\left\|\Delta^k_t(f,x,\nu)\right\|_{q,\alpha,\beta}.$$

Обозначим через $\Lambda^1_{q,\alpha,\beta}$ класс функций $f\in L_{q,\alpha,\beta}$ таких, что $\Delta^1_t(f,x,\nu)=h(x)g(t)$ $\forall x\in[-1,1]$, $\forall t\in[-\pi,\pi]$, где $h\in L_{q,\alpha,\beta}$ и $\sup\limits_{|t|\le\pi}|g(t)|<+\infty$. Будем говорить, что $f\in\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$ ($k$ = 2, 3, …), если $\Delta^1_t(f,x,\nu)=h(x)g(t)$, где $h\in\Lambda^{k-1}_{q,\alpha,\beta}$ и функция g одна и та же во всех классах $\Lambda^l_{q,\alpha,\beta}$ ($l$ = 1, 2, 3, …).

Через $E_n(f)_{q,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции $f\in L_{q,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов $P_n$ степени не выше, чем $n-1$, в метрике $L_{q,\alpha,\beta}$, т. е.

$$E_n(f)_{q,\alpha,\beta}=\inf_{P_n\in P}\|P_n(x)-f(x)\|_{q,\alpha,\beta},$$

где $P$ – множество алгебраических многочленов степени не выше, чем $n-1$, $n$ = 1, 2, … .

## 2 Вспомогательные утверждения

***Лемма* 2.1.** Пусть числа $q,\alpha,\beta$ такие, что $1\le q\le\infty$, $-\frac{1}{2}<\alpha\le\nu$ и $-\frac{1}{2}<\beta\le\nu$ при $q=1$, $-\frac{1}{2q}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ и $-\frac{1}{2q}<\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ при $1<q<\infty$, $0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ и $0\le\beta<\nu+\frac{1}{2}$ при $q=\infty$. Тогда, если $f\in L_{q,\alpha,\beta}$ то $T_t(f,x,\nu)\in L_{q,\alpha,\beta}$ и $\|T_t(f,x,\nu)\|_{q,\alpha,\beta}\le C\|f\|_{q,\alpha,\beta}$, где постоянная $C$ не зависит от $f$ и $t$.

Лемма 2.1 доказана в [1, с. 235–236].

## 3 Основные результаты

***Теорема* 3.1** *Пусть даны числа* $q,\nu,k$ *такие, что* $1\le q\le\infty$, $\nu>-\frac{1}{2}$, $k=1,2,3,\dots$. *Пусть числа* $\alpha$ *и* $\beta$ *выбраны по правилу*: $-\frac{1}{2}<\alpha\le\nu$ *и* $-\frac{1}{2}<\beta\le\nu$ *при* $q=1$, $-\frac{1}{2q}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *и* $-\frac{1}{2q}<\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *при* $1<q<\infty$, $0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ *и* $0\le\beta<\nu+\frac{1}{2}$ *при* $q=\infty$. *Тогда для* $f\in\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$ *справедливо равенство*:

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=\omega_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}.$$

*Доказательство*: Заметим, что

$$T_{-t}(f,x)=T_t(f,x).$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $t\in[0,\pi]$. В силу Леммы 2.1 числа $\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}$ и $\omega_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}$ существуют. В силу условия

$$\Delta^1_t(f,x)=h_1(x)g(t),$$
$$\Delta^k_t(f,x)=h_1(x)\cdot\ldots\cdot h_k(x)(g(t))^k,$$
$$\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x)=h_1(x)\cdot\ldots\cdot h_k(x)g(t_1)\cdot\ldots\cdot g(t_k).$$

Тогда

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=$$
$$=\sup_{0\le t_i\le\delta,i=1,\dots,k}|g(t_1)-1|\cdot\ldots\cdot|g(t_k)-1|\|f\|_{q,\alpha,\beta},$$
$$\omega_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=\sup_{0\le t\le\delta}|g(t)-1|^k\|f\|_{q,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для $a\ge0$

$$\sup_{a\le z\le b}z^k=\sup_{a\le z_i\le b,\ i=1,\dots,k}z_1\cdot\ldots\cdot z_k,$$

то теорема доказана. □

Примеры функций, принадлежащих классу $\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$:

1) полиномы Якоби [3, с. 469];

2) функция $f(x)=\sin(\arccos x)$, которая не является многочленом.

Действительно. Сделаем в (1.1) замену $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, $\theta=\arccos x$, $y=\cos\gamma$. Тогда, используя формулы сферической тригонометрии, получим

$$T_t(f,\cos\theta,\nu)=\frac{1}{\gamma(\nu)}\int_0^\pi f(\cos c)\sin^{2\nu}\gamma d\gamma=$$
$$=T_t(f,\cos\theta,\nu)=\frac{1}{\gamma(\nu)}\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\sin^{2\nu+1}\gamma d\gamma=$$
$$=f(x)\frac{1}{\gamma(\nu)}\int_0^\pi\frac{\sin^{2\nu+1}\gamma}{\sin\alpha}d\gamma.$$

***Теорема* 3.2.** *Пусть даны числа* $q,\nu,k$ *такие, что* $1\le q\le\infty$, $\nu>-\frac{1}{2}$, $k=1,2,3,\dots$. *Пусть числа* $\alpha$ *и* $\beta$ *выбраны по правилу*: $-\frac{1}{2}<\alpha\le\nu$ *и* $-\frac{1}{2}<\beta\le\nu$ *при* $q=1$, $-\frac{1}{2q}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *и* $-\frac{1}{2q}<\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *при* $1<q<\infty$, $0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ *и* $0\le\beta<\nu+\frac{1}{2}$ *при* $q=\infty$. *Тогда для* $f\in\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$ *справедливы неравенства*:

$$C_1E_n(f)_{q,\alpha,\beta}\le\omega_k\left(f,\frac{1}{n},\nu\right)_{q,\alpha,\beta}\le$$
$$\le\frac{C_2}{n^{2r}}\sum_{m=1}^n m^{2r-1}E_m(f)_{q,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные $C_1$ и $C_2$ не зависят от $f$ и $n$ ($n$=1, 2, 3, …).

*Доказательство*: Следует из теоремы 3.1 и ранее полученного результата в [2, с. 37–38].

**Заключение**

В статье доказано совпадение обобщённых модулей гладкости, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига вида (1.1), в которых обобщённые разности рассматриваются с разными и одинаковыми шагами для функций из класса $\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$. Как следствие, получены прямая и обратная теоремы о приближении алгебраическими многочленами непериодических функций из этого класса. Ранее аналогичный результат был получен в работе [4] для оператора обобщённого сдвига

$$T_t(f,x)=\frac{1}{2}\left[f\left(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\,\sin t\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(x\cos t-\sqrt{1-x^2}\,\sin t\right)\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов*, *М.К.* Об условиях совпадения некоторых классов функций / М.К. Потапов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.

2. *Казимиров*, *Г.Н.* О теоремах Джексона для *k-го* обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, № 3054-В94. – С. 1–40.

3. *Виленкин*, *Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – Москва: «Наука», 1965.

4. *Казимиров*, *Г.Н.* О совпадении обобщённых модулей гладкости на некотором классе функций / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 69–70.

*Поступила в редакцию* 28.06.2021.

**Информация об авторах**

*Казимиров Григорий Николаевич* – к.ф.-м.н., доцент