МАТЕМАТИКА

УДК 519.872 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_85

СИСТЕМА ПОЛЛИНГА С ДВУМЯ МАРКОВСКИМИ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ, КОНЕЧНЫМИ БУФЕРАМИ И ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

А.Н. Дудин[1], **Ю.В. Синюгина**[2]

[1]*Белорусский государственный университет*, *Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

POLLING SYSTEM WITH TWO MARKOVIAN ARRIVAL PROCESSES, FINITE BUFFERS AND PHASE TYPE DISTRIBUTION OF SERVICE AND SWITCHING TIMES

A.N. Dudin[1], **Y.V. Sinyugina**[2]

[1]*Belarusian State University*, *Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Рассматривается система поллинга с двумя очередями с ограниченным числом мест в буферах. В каждую очередь поступает марковский поток требований. Времена обслуживания запросов и переключения между очередями распределены по фазовому закону. Дисциплина обслуживания очередей – шлюзовая. Получены формулы для нахождения стационарных вероятностей состояний системы в произвольный момент времени, а также формулы для вычисления основных характеристик производительности системы. Найдены выражения для преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений времен ожидания в буферах.

Ключевые слова: *система поллинга*, *марковский входной поток*, *фазовое обслуживание*, *стационарное распределение*, *время ожидания*.

Для цитирования: *Дудин*, *А.Н.* Система поллинга с двумя марковскими входными потоками, конечными буферами и фазовым распределением времен обслуживания и переключения / А.Н. Дудин, Ю.В. Синюгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 85–91. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_85

Abstract. A polling system with two queues with a limited number of places in buffers are considered. Each queue receives markovian flow of requests. The times of servicing the requests and switching between the queues have phase type distribution. The queuing discipline is gated. The formulas for finding the stationary probabilities of system states at an arbitrary moment in time, and the formulas for computing the main performance measures for the system are obtained. The expressions for the Laplace – Stieltjes transforms of waiting time distributions in buffers are found.

Keywords: *polling system*, *markovian arrival process*, *phase type service*, *stationary distribution*, *waiting time*.

For citation: *Dudin*, *A.N.* Polling system with two markovian arrival processes, finite buffers and phase type distribution of service and switching times / A.N. Dudin, Y.V. Sinyugina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 85–91. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_85 (in Russian)

Введение

Система поллинга в классическом варианте представляет собой систему массового обслуживания с одним обслуживающим устройством и несколькими очередями. Обслуживание очередей в системе поллинга происходит в порядке, который определяется дисциплиной опроса очередей. Рассматриваемая в работе система состоит из двух очередей, которые прибор обслуживает друг за другом. Длительность непрерывного обслуживания очереди определяется дисциплиной обслуживания. В данной работе предполагается шлюзовое обслуживание очередей. Более подробно познакомиться с системами поллинга, методами их исследования и их практическим применением можно, например, в [1]–[7]. В качестве процесса поступления требований в данной работе рассматривается марковский входной поток (см., например, [8]–[10]), а времена обслуживания требований и времена переключения между очередями предполагаются распределенными по фазовому закону (см., например, [8]).

В работе дается описание изучаемой модели, строится цепь Маркова, которая характеризует состояния системы в произвольный момент времени, приводятся формулы для нахождения стационарных вероятностей состояний системы, а также формулы для вычисления основных характеристик производительности системы, находятся преобразования Лапласа – Стилтьеса распределения времен ожидания в буферах.

1 Описание системы

Рассмотрим систему поллинга с одним обслуживающим устройством и двумя очередями с числом мест в буферах N_1 и N_2 соответственно. В каждую очередь поступает свой *MAP*-поток требований. Поведение *k*-го потока, $k = 1, 2$, полностью определяется матрицами $D_l^{(k)}$, $l = 0,1$, которые задают интенсивности переходов управляющего процесса $\nu^{(k)}(t), t \geq 0$, между состояниями $0, 1, ..., W_k$ с генерацией l требований. Матрица $D^{(k)} = D_0^{(k)} + D_1^{(k)}$ является генератором управляющего процесса. Средняя скорость поступления требований $\lambda^{(k)}$ определяется как $\lambda^{(k)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} D_1^{(k)} \mathbf{e}$, где $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ – вектор стационарного распределения состояний управляющего процесса, который является единственным решением системы уравнений $\boldsymbol{\theta}^{(k)} D^{(k)} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta}^{(k)} \mathbf{e} = 1$, где $\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей, $\mathbf{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц.

Время обслуживания требования из *k*-ой очереди имеет фазовое распределение с M_k фазами и неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, S^{(k)})$, $k = 1, 2$, где вектор $\boldsymbol{\beta}^{(k)} = (\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, ..., \beta_M^{(k)})$ задает начальное состояние управляющего процесса, матрица $S^{(k)}$ определяет интенсивности переходов управляющего процесса между состояниями $1, ..., M_k$, а вектор $\mathbf{S}_0^{(k)} = -S^{(k)} \mathbf{e}$ задает интенсивности переходов в поглощающее состояние $M_k + 1$. Время подключения обслуживающего прибора к *k*-ой очереди также имеет фазовое распределение с M_{-k} фазами и неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}^{(-k)}, S^{(-k)})$, $k = 1,2$.

Дисциплина обслуживания очередей – шлюзовая. Это означает, что после подключения прибора к очереди обслуживание получают только те требования, которые находились в буфере этой очереди в момент завершения подключения к ней прибора. Остальные требования будут обслужены только после следующего подключения прибора к очереди.

Для анализа описанной системы введем в рассмотрение случайный процесс

$$\xi(t) = \{r(t), j(t), i^{(1)}(t), i^{(2)}(t), m(t), \nu^{(1)}(t), \nu^{(2)}(t)\},$$
$$t \geq 0,$$

где $r(t)$ характеризует состояние обслуживающего устройства в момент времени t, $t \geq 0$:

$$r(t) = \begin{cases} k, & \text{если прибор обслуживает} \\ & \text{требования из } k\text{-ой очереди}, \\ -k, & \text{если прибор подключается} \\ & \text{к } k\text{-ой очереди}, k=1,2; \end{cases}$$

$j(t)$ описывает число требований, которые еще необходимо обслужить при текущем подключении; $i^{(k)}(t)$ описывает число требований в буфере *k*-ой очереди; $m(t)$ определяет текущую фазу соответствующего процесса обслуживания или подключения; $\nu^{(k)}(t)$ характеризует состояние управляющего процесса поступления требований в соответствующую очередь. Очевидно, процесс $\xi(t), t \geq 0$, полностью характеризует состояния системы в произвольный момент времени t, $t \geq 0$. Как видно, данный процесс является цепью Маркова с непрерывным временем, стационарное распределение которой нам необходимо найти.

2 Стационарное распределение вероятностей состояний системы

Очевидно, что цепь Маркова

$$\xi(t) = \{r(t), j(t), i^{(1)}(t), i^{(2)}(t), m(t), \nu^{(1)}(t), \nu^{(2)}(t)\},$$
$$t \geq 0,$$

неприводима, регулярна и имеет конечное пространство состояний, поэтому существует единственное стационарное распределение вероятностей состояний этой цепи, которое совпадает с эргодическим (предельным) распределением:

$$\pi^{(r)}\left(j, i^{(1)}, i^{(2)}, m, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}\right) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} P\{r(t) = r, j(t) = j, i^{(1)}(t) = i^{(1)}, i^{(2)}(t) = i^{(2)},$$
$$m(t) = m, \nu^{(1)}(t) = \nu^{(1)}, \nu^{(2)}(t) = \nu^{(2)}\},$$

где $r = \pm k$, $j = \overline{1, N_r}$ при $r = k$ и $j = 0$ при $r = -k$, $i^{(k)} = \overline{0, N_k}$, $m = \overline{1, M_r}$, $\nu^{(k)} = \overline{0, W_k}$, $k = 1, 2$.

Сформируем из этих вероятностей вектор-строки, записав вероятности в лексикографическом порядке по компонентам $r(t)$, $j(t)$, $i^{(1)}(t)$, $i^{(2)}(t)$, $m(t)$, $\nu^{(1)}(t)$, $\nu^{(2)}(t)$:

$$\boldsymbol{\pi}^{(k)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}) = \left(\pi^{(r)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}, 1, 0, 0), ...,\right.$$
$$\left.\pi^{(r)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}, M_r, W_1, W_2)\right), r = k,$$
$$\mathbf{q}^{(k)}(i^{(1)}, i^{(2)}) = \left(\pi^{(r)}(0, i^{(1)}, i^{(2)}, 1, 0, 0), ...,\right.$$
$$\left.\pi^{(r)}(0, i^{(1)}, i^{(2)}, M_r, W_1, W_2)\right), r = -k,$$
$$\boldsymbol{\pi} = \left(\boldsymbol{\pi}^{(1)}(1,0,0), ..., \boldsymbol{\pi}^{(1)}(N_1, N_1, N_2),\right.$$
$$\boldsymbol{\pi}^{(2)}(1,0,0), ..., \boldsymbol{\pi}^{(2)}(N_2, N_1, N_2),$$
$$\left.\mathbf{q}^{(1)}(0,0), ..., \mathbf{q}^{(1)}(N_1, N_2), \mathbf{q}^{(2)}(0,0), ..., \mathbf{q}^{(2)}(N_1, N_2)\right).$$

Для нахождения стационарных вероятностей состояний цепи Маркова $\xi(t)$, $t \geq 0$, составим систему уравнений Чепмена – Колмогорова.

Введем следующие обозначения:

$$R^{(k)}(i_1, i_2) = I_{M_r} \otimes D_0^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}\left(1 - \delta_{i_1 N_1}\right) + I_{M_r} \otimes D^{(1)} \delta_{i_1 N_1} \otimes I_{\overline{W_2}} +$$
$$+ I_{M_r} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_0^{(2)}\left(1 - \delta_{i_2 N_2}\right) + I$$
$$+_{M_r} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D^{(2)} \delta_{i_2 N_2} + S^{(r)} \otimes I_{\overline{W_1}\overline{W_2}}, r = k,$$
$$Q^{(k)}(i_1, i_2) = I_{M_r} \otimes D_0^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}\left(1 - \delta_{i_1 N_1}\right) +$$
$$+ I_{M_r} \otimes D^{(1)} \delta_{i_1 N_1} \otimes I_{\overline{W_2}} +$$

$$+I_{M_r} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_0^{(2)} \left(1-\delta_{i_2 N_2}\right) + I_{M_r} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D^{(2)} \delta_{i_2 N_2} +$$
$$+S^{(r)} \otimes I_{\overline{W_1}\overline{W_2}},\ r=-k,\ i_k=\overline{0,N_k},$$

где I – единичная матрица заданной размерности, $\otimes$ – символ кронекерова произведения матриц, δ_{ij} – дельта Кронекера.

Можно показать, что справедлива следующая система уравнений:

$$\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(j,i^{(1)},i^{(2)}\right)R^{(1)}(i_1,i_2)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(j,i^{(1)}-1,i^{(2)}\right)\left(I_{M_1}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}\right)\left(1-\delta_{i_1 0}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(j,i^{(1)},i^{(2)}-1\right)\left(I_{M_1}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}\right)\left(1-\delta_{i_2 0}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(1+j,i^{(1)},i^{(2)}\right)\left(1-\delta_{jN_1}\right)\mathbf{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}^{(1)}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}+$$
$$+\mathbf{q}^{(1)}\left(j,i^{(2)}\right)\mathbf{S}_0^{(-1)}\boldsymbol{\beta}^{(1)}\delta_{i_1 0}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}=\mathbf{0},\ j=\overline{1,N_1},$$
$$\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(j,i^{(1)},i^{(2)}\right)R^{(2)}(i_1,i_2)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(j,i^{(1)}-1,i^{(2)}\right)\left(I_{M_2}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}\right)\left(1-\delta_{i_1 0}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(j,i^{(1)},i^{(2)}-1\right)\left(I_{M_2}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}\right)\left(1-\delta_{i_2 0}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(j+1,i^{(1)},i^{(2)}\right)\left(1-\delta_{jN_2}\right)\mathbf{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}+$$
$$+\mathbf{q}^{(2)}\left(i^{(1)},j\right)\mathbf{S}_0^{(-2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)}\delta_{i_2 0}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}=\mathbf{0},\ j=\overline{1,N_2},$$
$$\mathbf{q}^{(1)}\left(i^{(1)},i^{(2)}\right)Q^{(1)}(i_1,i_2)+$$
$$+\mathbf{q}^{(1)}\left(i^{(1)}-1,i^{(2)}\right)\left(I_{M_{-1}}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}\right)\left(1-\delta_{i_1 0}\right)+$$
$$+\mathbf{q}^{(1)}\left(i^{(1)},i^{(2)}-1\right)\left(I_{M_{-1}}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}\right)\left(1-\delta_{i_2 0}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(1,i^{(1)},i^{(2)}\right)\mathbf{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(-1)}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}+$$
$$+\mathbf{q}^{(2)}\left(i^{(1)},0\right)\mathbf{S}_0^{(-2)}\boldsymbol{\beta}^{(-1)}\delta_{i_2 0}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}=\mathbf{0},$$
$$\mathbf{q}^{(2)}\left(i^{(1)},i^{(2)}\right)Q^{(2)}(i_1,i_2)+$$
$$+\mathbf{q}^{(2)}\left(i^{(1)}-1,i^{(2)}\right)\left(I_{M_{-2}}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}\right)\left(1-\delta_{i_1 0}\right)+$$
$$+\mathbf{q}^{(2)}\left(i^{(1)},i^{(2)}-1\right)\left(I_{M_{-2}}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}\right)\left(1-\delta_{i_2 0}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(1,i^{(1)},i^{(2)}\right)\mathbf{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}^{(-2)}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}+$$
$$+\mathbf{q}^{(1)}\left(0,i^{(2)}\right)\mathbf{S}_0^{(-1)}\boldsymbol{\beta}^{(-2)}\delta_{i_1 0}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes I_{\overline{W_2}}=\mathbf{0}.$$

Добавляя условие нормировки $\boldsymbol{\pi}\mathbf{e}=1$, получим систему уравнений, единственным решением которой является вектор стационарных вероятностей $\boldsymbol{\pi}$. Для решения полученной системы уравнений можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в [11].

Зная распределение вероятностей, можно найти среднее число требований в буфере k, $k = 1, 2$, по формуле $L_k=\sum_{i=1}^{N_k} i\boldsymbol{\pi}_k(i)\mathbf{e}$, где

$$\boldsymbol{\pi}_1(i)\mathbf{e}=\sum_{i_2=0}^{N_2}\left(\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{\pi}^{(1)}(j,i,i_2)\mathbf{e}+\sum_{j=1}^{N_2}\boldsymbol{\pi}^{(2)}(j,i,i_2)\mathbf{e}+\right.$$
$$\left.+\,\mathbf{q}^{(1)}(i,i_2)\mathbf{e}+\mathbf{q}^{(2)}(i,i_2)\mathbf{e}\right),$$
$$\boldsymbol{\pi}_2(i)\mathbf{e}=\sum_{i_1=0}^{N_1}\left(\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{\pi}^{(1)}(j,i_1,i)\mathbf{e}+\sum_{j=1}^{N_2}\boldsymbol{\pi}^{(2)}(j,i_1,i)\mathbf{e}+\right.$$
$$\left.+\,\mathbf{q}^{(1)}(i_1,i)\mathbf{e}+\mathbf{q}^{(2)}(i_1,i)\mathbf{e}\right),$$

и вероятность потери требования, поступающего в буфер k, по формуле

$$P_1^{loss}=\sum_{i_2=0}^{N_2}\left(\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(j,N_1,i_2\right)\frac{I_{M_1}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}+\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{N_2}\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(j,N_1,i_2\right)\frac{I_{M_2}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}+$$
$$+\mathbf{q}^{(1)}\left(N_1,i_2\right)\frac{I_{M_{-1}}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}+$$
$$\left.+\mathbf{q}^{(2)}\left(N_1,i_2\right)\frac{I_{M_{-2}}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}\right),$$
$$P_2^{loss}=\sum_{i_1=0}^{N_1}\left(\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{\pi}^{(1)}\left(j,i_1,N_2\right)\frac{I_{M_1}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}+\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{N_2}\boldsymbol{\pi}^{(2)}\left(j,i_1,N_2\right)\frac{I_{M_2}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}+$$
$$+\,\mathbf{q}^{(1)}\left(i_1,N_2\right)\frac{I_{M_{-1}}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}+$$
$$\left.+\mathbf{q}^{(2)}\left(i_1,N_2\right)\frac{I_{M_{-2}}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}\right).$$

3 Преобразование Лапласа – Стилтьеса времени ожидания произвольного требования

Пусть $W_k(x)$, $x\ge 0$, есть функция распределения времени ожидания произвольного требования в буфере k, $k = 1, 2$, а

$$w_k(s)=\int_0^\infty e^{-st}dW_k(t),$$

$Res>0$ – ее преобразование Лапласа – Стилтьеса. Будет полагать, что требования обслуживаются в порядке их поступления в буфер. Для нахождения функций $w_k(s)$ будем использовать метод катастроф (см., например, [12]), согласно которому $w_k(s)$ есть вероятность того, что за время ожидания требования в буфере k не наступит ни одна «катастрофа». Для нахождения функций $w_k(s)$ проанализируем сначала возможные состояния системы в момент прихода произвольного требования в k-ый буфер.

Наблюдаемое требование поступает в заполненный буфер. В этом случае требование теряется, а вероятность ненаступления «катастрофы» за время ожидания этого требования равняется 1.

Требование поступает в буфер очереди в момент подключения прибора к этой очереди. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени подключения и времени обслуживания тех запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

Требование поступает в буфер в момент, когда прибор занят обслуживанием запросов из другой очереди. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени обслуживания текущего запроса, времени обслуживания запросов, которые еще требуется обслужить, времени подключения прибора к очереди, в буфер которой поступило требование, времени обслуживания запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

Требование поступает в буфер в момент подключения прибора к другой очереди. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени подключения, времени обслуживания тех запросов, которые находились в буфере в момент прихода наблюдаемого требования, а также тех запросов, которые поступили в буфер за оставшееся время подключения, времени переключения к очереди, в буфер которой поступило требование, времени обслуживания тех запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

В момент прихода требования прибор занят обслуживанием запросов из очереди, в буфер которой поступило требование. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени обслуживания текущего запроса, времени обслуживания запросов, которые еще требуется обслужить, времени на переключение к другой очереди, времени обслуживания запросов, имевшихся в буфере другой очереди в момент прихода наблюдаемого требования, а также тех запросов, которые поступили в буфер за время обслуживания остававшихся запросов из буфера первой очереди и за время подключения прибора ко второй очереди, времени переключения к очереди, в буфер которой поступило требование, времени обслуживания запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

Для нахождения функций $w_k(s)$ введем в рассмотрение следующие функции. Вектор, состоящий из преобразований Лапласа – Стилтьеса оставшегося времени обслуживания текущего запроса или оставшегося времени текущего подключения при фиксированном текущем состоянии управляющего процесса соответствующего распределения $L^{(k)}(s) = \left(sI - S^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{S}_0^{(k)}$, $k = \pm1, \pm2$. Преобразование Лапласа – Стилтьеса полного времени обслуживания запроса из k-ой очереди $\beta^{(k)}(s) = \boldsymbol{\beta}^{(k)}\left(sI - S^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{S}_0^{(k)}$, $k = 1, 2$. Матрица вероятностей того, что за время t, $t \geq 0$, в m-ю очередь поступит l запросов $P_m(l,t)$, $m = 1, 2$, $l \geq 0$.

***Лемма* 3.1.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса оставшегося времени обслуживания текущего запроса из k-ой очереди,* $k = 1, 2$, *в течение которого в m-ую очередь,* $m = 1, 2$, *поступит l запросов,* $l \geq 0$, *задается формулой*

$$F_l^{(k)}(m,s) = z_l^{(k)}(m,s)\left(\mathbf{S}_0^{(k)} \otimes I_{\overline{W_m}}\right),$$

преобразование Лапласа – Стилтьеса оставшегося времени подключения к k-ой очереди, в течение которого в m-ую очередь поступит l запросов, задается формулой

$$\Phi_l^{(k)}(m,s) = \phi_l^{(k)}(m,s)\left(\mathbf{S}_0^{(-k)} \otimes I_{\overline{W_m}}\right),$$

преобразование Лапласа – Стилтьеса полного времени обслуживания запроса из k-ой очереди, в течение которого в m-ую очередь поступит l запросов, задается формулой

$$P_l^{(k)}(m,s) = d_l^{(k)}(m,s)\left(\mathbf{S}_0^{(k)} \otimes I_{\overline{W_m}}\right),$$

где

$$z_0^{(k)}(m,s) = -\left(\left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes I_{\overline{W_m}}\right)\left(I + \left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes D_0^{(m)}\right)^{-1},$$

$$z_l^{(k)}(m,s) = -\sum_{i=0}^{l-1} z_i^{(k)}(m,s)\left(\left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)}\right) \times \left(I + \left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes D_0^{(m)}\right)^{-1},$$

$$\phi_0^{(k)}(m,s) = -\left(\left(-sI + S^{(-k)}\right)^{-1} \otimes I_{\overline{W_m}}\right) \times \left(I + \left(-sI + S^{(-k)}\right)^{-1} \otimes D_0^{(m)}\right)^{-1},$$

$$\phi_l^{(k)}(m,s) = -\sum_{i=0}^{l-1} \phi_i^{(k)}(m,s)\left(\left(-sI + S^{(-k)}\right)^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)}\right) \times \left(I + \left(-sI + S^{(-k)}\right)^{-1} \otimes D_0^{(m)}\right)^{-1},$$

$$d_0^{(k)}(m,s) = -\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)}\left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes I_{\overline{W_m}}\right) \times \left(I + \left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes D_0^{(m)}\right)^{-1},$$

$$d_l^{(k)}(m,s) = -\sum_{i=0}^{l-1} d_i^{(k)}(m,s)\left(\left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)}\right) \times \left(I + \left(-sI + S^{(k)}\right)^{-1} \otimes D_0^{(m)}\right)^{-1}.$$

Доказательство. По определению для функции $F_l^{(k)}(m,s)$ будем иметь

$$F_l^{(k)}(m,s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{S^{(k)}t} \mathbf{S}_0^{(k)} \otimes P_m(l,t) I_{\overline{W_m}} dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{S^{(k)}t} \otimes P_m(l,t) dt \left(\mathbf{S}_0^{(k)} \otimes I_{\overline{W_m}}\right) = z_l^{(k)}(m,s)\left(\mathbf{S}_0^{(k)} \otimes I_{\overline{W_m}}\right).$$

Аналогично для функции $z_l^{(k)}(m,s)$ имеем

$$z_l^{(k)}(m,s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{S^{(k)}t}\otimes P_m(l,t)dt=$$
$$=\int_0^\infty e^{(S^{(k)}-sI)t}\otimes P_m(l,t)dt=$$
$$=-\left(\left(-sI+S^{(k)}\right)^{-1}\otimes I_{\overline{W_m}}\right)\delta_{l,0}\times$$
$$\times-\int_0^\infty e^{(S^{(k)}-sI)t}\left(-sI+S^{(k)}\right)^{-1}\otimes\sum_{i=0}^{l}P_m(i,t)D_{l-i}^{(m)}dt=$$
$$=-\left(\left(-sI+S^{(k)}\right)^{-1}\otimes I_{\overline{W_m}}\right)\delta_{l,0}-$$
$$-\sum_{i=0}^{l}z_0^{(i)}(m,s)\left(\left(-sI+S^{(k)}\right)^{-1}\otimes D_{l-i}^{(m)}\right).$$

Откуда получаем доказываемые формулы для $F_l^{(k)}(m,s)$ и $z_l^{(k)}(m,s)$.

Аналогично получаются формулы для функций $P_l^{(k)}(m,s)$, $d_l^{(k)}(m,s)$, $\Phi_l^{(k)}(m,s)$ и $\phi_l^{(k)}(m,s)$. □

***Лемма* 3.2.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса времени обслуживания n запросов,* $n\ge 1$, *из k-ой очереди,* $k = 1, 2$, *за которое в m-ую очередь,* $m = 1, 2$, *поступит l запросов,* $l\ge 0$, *определяется по формуле*

$$P_l^{(*n,k)}(m,s)=h_{l,n}^{(k)}(m,s)\left(\Gamma_{0,k}^{(n)}\otimes I_{\overline{W_m}}\right),$$

где

$$h_{0,n}^{(k)}(m,s)=-\left(\gamma_k^{(n)}\left(-sI+\Gamma_k^{(n)}\right)^{-1}\otimes I_{\overline{W_m}}\right)\times$$
$$\times\left(I+\left(-sI+\Gamma_k^{(n)}\right)^{-1}\otimes D_0^{(m)}\right)^{-1},$$
$$h_{l,n}^{(k)}(m,s)=-\sum_{i=0}^{l-1}h_{i,n}^{(k)}(m,s)\left(\left(-sI+\Gamma_k^{(n)}\right)^{-1}\otimes D_{l-i}^{(m)}\right)\times$$
$$\times\left(I+\left(-sI+\Gamma_k^{(n)}\right)^{-1}\otimes D_0^{(m)}\right)^{-1}.$$

Здесь $\gamma_k^{(n)}$ *и* $\Gamma_k^{(n)}$ *– параметры фазового распределения суммы n независимых случайных величин, одинаково распределенных по фазовому закону с неприводимым представлением* $\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)},S^{(k)}\right)$.

***Лемма* 3.3.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса* $w_1^{(-1)}(s,i_1)$ *условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор подключается к первой очереди, в буфере которой находится* i_1 *запросов, определяется по формуле*

$$w_1^{(-1)}(s,i_1)=L^{(-1)}(s)\left(\beta^{(1)}(s)\right)^{i_1}.$$

Доказательство. Учитывая вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стилтьеса, легко увидеть, что функция $w_1^{(-1)}(s,i_1)$ представляет собой произведение вероятностей ненаступления «катастрофы» за оставшееся время текущего подключения прибора к первой очереди $L^{(-1)}(s)$ и за время обслуживания i_1 запросов, находившихся в буфере в момент прихода наблюдаемого требования $(\beta^{(1)}(s))^{i_1}$. □

***Лемма* 3.4.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса* $w_1^{(2)}(s,j,i_1,i_2)$ *условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор обслуживает запросы из второй очереди, причем j запросов еще требуется обслужить, в первом буфере находится* i_1 *запросов, а во втором –* i_2, *определяется по формуле*

$$w_1^{(2)}(s,j,i_1,i_2)=L^{(2)}(s)\left(\beta^{(2)}(s)\right)^{j-1}\boldsymbol{\beta}^{(-1)}w_1^{(-1)}(s,i_1).$$

Доказательство. Используя вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стилтьеса, получаем, что функция $w_1^{(2)}(s,j,i_1,i_2)$ есть произведение вероятностей ненаступления «катастрофы» за оставшееся время обслуживания текущего запроса $L^{(2)}(s)$ и за время обслуживания остальных $j-1$ запросов $\left(\beta^{(2)}(s)\right)^{j-1}$, умноженное на произведение распределения вероятностей состояний управляющего процесса при подключении прибора к первой очереди $\boldsymbol{\beta}^{(-1)}$ на вероятность ненаступления «катастрофы» за оставшееся с момента начала подключения время ожидания наблюдаемого требования $w_1^{(-1)}(s,i_1)$. □

***Лемма* 3.5.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса* $w_1^{(-2)}(s,i_1,i_2)$ *условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор подключается ко второй очереди, в буфере первой очереди находится* i_1 *запросов, а в буфере второй очереди –* i_2 *запросов, определяется как*

$$w_1^{(-2)}(s,i_1,i_2)=$$
$$=\sum_{l=0}^{N_2-i_2-1}\Phi_l^{(2)}(2,s)\boldsymbol{\beta}^{(2)}w_1^{(2)}(s,i_2+l,i_1,0)+$$
$$+\sum_{l=N_2-i_2}^{\infty}\Phi_l^{(2)}(2,s)\boldsymbol{\beta}^{(2)}w_1^{(2)}(s,N_2,i_1,0).$$

Доказательство. Исходя из вероятностного смысла преобразования Лапласа – Стилтьеса, функция $w_1^{(-2)}(s,i_1,i_2)$ есть вероятность того, что «катастрофа» не наступит за оставшееся время подключения прибора ко второй очереди и за это время во вторую очередь поступит l запросов $\Phi_l^{(2)}(2,s)$, умноженная на произведение распределения вероятностей состояний управляющего процесса для обслуживания первого запроса из второго буфера $\boldsymbol{\beta}^{(2)}$ и вероятности ненаступления «катастрофы» в будущем $w_1^{(2)}(s,i_2+l,i_1,0)$. □

***Лемма* 3.6.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса $w_1^{(1)}(s,j,i_1,i_2)$ условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор обслуживает запросы из первой очереди, если еще требуется обслужить j запросов, при этом в первом буфере находится i_1 запросов, а во втором – i_2, определяется как*

$$w_1^{(1)}(s,j,i_1,i_2)=$$
$$=\sum_{l=0}^{N_2-i_2-1}\sum_{m=0}^{N_2-i_2-1-l}F_l^{(1)}(2,s)P_m^{(*j-1,1)}(2,s)\times$$
$$\times\boldsymbol{\beta}^{(-2)}w_1^{(-2)}(s,i_1,i_2+l+m)+$$
$$+\sum_{l=0}^{N_2-i_2-1}\sum_{m=N_2-i_2-l}^{\infty}F_l^{(1)}(2,s)P_m^{(*j-1,1)}(2,s)\times$$
$$\times\boldsymbol{\beta}^{(-2)}w_1^{(-2)}(s,i_1,N_2)+$$
$$+\sum_{l=N_2-i_2}^{\infty}F_l^{(1)}(2,s)\left(\beta^{(1)}(s)\right)^{j-1}\boldsymbol{\beta}^{(-2)}w_1^{(-2)}(s,i_1,N_2).$$

Доказательство. Учитывая вероятностный смысл преобразования Лапласа – Стилтьеса, получаем, что функция $w_1^{(1)}(s,j,i_1,i_2)$ есть произведение вероятности того, что «катастрофа» не наступит за оставшееся время обслуживания запроса из первой очереди и за это время во вторую очередь поступит l запросов $F_l^{(1)}(2,s)$ на вероятность того, что «катастрофа» не наступит за время обслуживания остальных запросов из первой очереди и за это время придёт m запросов во вторую очередь $P_m^{(*j-1,1)}(2,s)$ на произведение начального распределения вероятностей состояний управляющего процесса подключения ко второму буферу $\boldsymbol{\beta}^{(-2)}$ и вероятности ненаступления «катастрофы» в будущем $w_1^{(-2)}(s,i_1,i_2)$.

***Теорема* 3.1.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса $w_1(s)$ распределения времени ожидания произвольного требования в первом буфере вычисляется по формуле*

$$w_1(s)=P_1^{loss}+$$
$$+\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2}\left(\mathbf{q}^{(1)}(i_1,i_2)\frac{I_{M_{-1}}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}w_1^{(-1)}(s,i_1)+\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{\pi}^{(1)}(j,i_1,i_2)\frac{I_{M_1}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}w_1^{(1)}(s,j,i_1,i_2)+$$
$$+\mathbf{q}^{(2)}(i_1,i_2)\frac{I_{M_{-2}}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}w_1^{(-2)}(s,i_1,i_2)+$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{N_2}\boldsymbol{\pi}^{(2)}(j,i_1,i_2)\frac{I_{M_2}\otimes D_1^{(1)}\otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}}\mathbf{e}w_1^{(2)}(s,j,i_1,i_2)\right).$$

Доказательство. Вытекает из формулы полной вероятности и лемм 3.3–3.6. □

Аналогичным образом доказывается

***Теорема* 3.2.** *Преобразование Лапласа – Стилтьеса $w_2(s)$ распределения времени ожидания произвольного требования во втором буфере вычисляется по формуле*

$$w_2(s)=P_2^{loss}+$$
$$+\sum_{i_2=0}^{N_2-1}\sum_{i_1=0}^{N_1}\left(\mathbf{q}^{(2)}(i_1,i_2)\frac{I_{M_{-2}}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}w_2^{(-2)}(s,i_2)+\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{N_2}\boldsymbol{\pi}^{(2)}(j,i_1,i_2)\frac{I_{M_2}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}w_2^{(2)}(s,j,i_1,i_2)+$$
$$+\mathbf{q}^{(1)}(i_1,i_2)\frac{I_{M_{-1}}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}w_2^{(-1)}(s,i_1,i_2)+$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{\pi}^{(1)}(j,i_1,i_2)\frac{I_{M_1}\otimes I_{\overline{W_1}}\otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\mathbf{e}w_2^{(1)}(s,j,i_1,i_2)\right),$$

где соответствующие функции определяются как

$$w_2^{(-2)}(s,i_2)=L^{(-2)}(s)(\beta^{(2)}(s))^{i_2},$$
$$w_2^{(1)}(s,j,i_1,i_2)=L^{(1)}(s)(\beta^{(1)}(s))^{j-1}\boldsymbol{\beta}^{(-2)}w_2^{(-2)}(s,i_2),$$
$$w_2^{(-1)}(s,i_1,i_2)=\sum_{l=0}^{N_1-i_1-1}\Phi_l^{(1)}(1,s)\boldsymbol{\beta}^{(1)}w_2^{(1)}(s,i_1+l,0,i_2)+$$
$$+\sum_{l=N_1-i_1}^{\infty}\Phi_l^{(1)}(1,s)\boldsymbol{\beta}^{(1)}w_2^{(1)}(s,N_1,0,i_2),$$
$$w_2^{(2)}(s,j,i_1,i_2)=\sum_{l=0}^{N_1-i_1-1}\sum_{m=0}^{N_1-i_1-1-l}F_l^{(2)}(1,s)P_m^{(*j-1,2)}(1,s)\times$$
$$\times\boldsymbol{\beta}^{(-1)}w_2^{(-1)}(s,i_1+l+m,i_2)+$$
$$+\sum_{l=0}^{N_1-i_1-1}\sum_{m=N_1-i_1-l}^{\infty}F_l^{(2)}(1,s)P_m^{(*j-1,2)}(1,s)\times$$
$$\times\boldsymbol{\beta}^{(-1)}w_2^{(-1)}(s,N_1,i_2)+$$
$$+\sum_{l=N_1-i_1}^{\infty}F_l^{(2)}(1,s)(\beta^{(2)}(s))^{j-1}\boldsymbol{\beta}^{(-1)}w_2^{(-1)}(s,N_1,i_2).$$

***Следствие* 3.1.** *Среднее время ожидания произвольного требования W_k в буфере k, $k=1,2$, вычисляется по формуле $W_k=-\frac{dw_k(s)}{ds}|_{s=0}$.*

Среднее время ожидания требования, принятого в k-ый буфер, W_k^{accept} вычисляется по формуле $W_k^{accept}=\frac{W_k}{1-P_k^{loss}}$.

Доказательство. Формула для W_k вытекает из свойств преобразования Лапласа – Стилтьеса. Для вывода формулы для W_k^{accept} заметим, что среднее время ожидания произвольного требования в k-ом буфере также учитывает среднее время ожидания потерянных требований:

$$W_k=W_k^{loss}P_k^{loss}+W_k^{accept}P_k^{accept},$$

где $W_k^{loss}=0$ – среднее время ожидания потерянного требования в k-ом буфере, P_k^{accept} – вероятность принятия требования в k-ом буфере.

Учитывая тот факт, что $P_k^{loss} + P_k^{accept} = 1$, получаем

$$W_k^{accept} = \frac{W_k}{P_k^{accept}} = \frac{W_k}{1 - P_k^{loss}}. \qquad \square$$

Заключение

Исследована система массового обслуживания с дисциплиной поллинга и двумя потоками запросов, которая может быть использована для рекуррентного вычисления характеристик системы с произвольным числом потоков запросов при весьма общих предположениях о входном потоке и распределениях времен обслуживания запросов и времен переключения прибора между потоками. Модель *MAP* входного потока позволяет учитывать возможную корреляцию интервалов между моментами поступления запросов и произвольное значение дисперсии длин этих интервалов. Распределение фазового типа времен обслуживания запросов и времен переключения прибора между потоками может быть использовано для аппроксимации произвольного распределения. Основным результатом статьи являются формулы для вычисления преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений времен ожидания запросов. Для их вывода использована техника метода введения дополнительного события (метода катастроф), использующего вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стилтьеса. Результаты могут быть обобщены на случай наличия взаимной корреляции входных потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский*, *В.М.* Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях / В.М. Вишневский, О.В. Семёнова. – Москва: Техносфера, 2007. – 312 с.

2. *Vishnevsky*, *V.* Polling Systems and Their Application to Telecommunication Networks / V. Vishnevsky, O. Semenova // Mathematics. – 2021. – № 9 (117). – DOI: doi.org/10.3390/math9020117

3. *Boon*, *M.A.A.* Applications of polling systems / M.A.A. Boon, R.D. van der Mei, E.M.M. Winands // Surveys in Operations Research and Management Science. – 2011. – Vol. 16, № 2. – P. 67–82.

4. *Takagi*, *H.* Queuing Analysis of Polling Models / H. Takagi // ACM Computing Surveys. – 1988. – № 20 (1). – P. 5–28.

5. *Levy*, *H.* Analysis of Cyclic Polling Systems with Binomial-gated Service / H. Levy // Performance of Distributed Parallel Systems; eds. T. Hasegawa, H. Takagi, Y. Takahashi. – Amsterdam: Elsevier, 1989. – P. 127–139.

6. *Altman*, *E.* Stability, monotonicity and invariant quantities in general polling systems / E. Altman, P. Konstantopoulos, Z. Liu // Queueing Systems. – 1992. – Vol. 11. – P. 35–57.

7. *Altman*, *E.* Gated polling with stationary ergodic walking times, Markovian routing and random feedback / E. Altman // Annals of Operations Research. – 2012. – № 198. – P. 145–164.

8. *Dudin*, *A.N.* The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows / A.N. Dudin, V.I. Klimenok, V.M. Vishnevsky. – Heidelberg: Springer, 2020. – 430 p.

9. *Lucantoni*, *D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D.M. Lucantoni // Communications in Statistics. Part C: Stochastic Models. – 1991. – № 7 (1). – P. 1–46.

10. *Chakravarthy*, *S.* The batch Markovian arrival process: a review and future work / S. Chakravarthy // Advances in Probability Theory and Stochastic Processes; eds. A. Krishnamoorthy, N. Raju, V. Ramaswami. – Branchburg: Notable, 2001. – P. 21–49.

11. *Dudin*, *S.A.* Call center operation model as a MAP/PH/N/R-N system with impatient customers / S.A. Dudin, O.S. Dudina // Problems of Information Transmission. – 2011. – № 47 (4). – P. 364–377.

12. *Климов*, *Г.П.* Стохастические системы обслуживания / Г.П. Климов. – Москва: Наука, 1966. – 244 с.

Поступила в редакцию 26.10.2021.

Информация об авторах

Дудин Александр Николаевич – д.ф.-м.н., профессор
Синюгина Юлия Васильевна – старший преподаватель