

КРИТЕРИИ π -ОТДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

CRITERIA FOR π -SEPARABILITY OF A FINITE GROUP

I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. В данной статье все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Группа G называется π -отделимой, если каждый ее главный фактор является либо π -группой, либо π' -группой. Подгруппа A группы G является π, π' -субнормальной в G , если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π -отделимой группой для всех $i = 1, \dots, n$. В данной статье изучается влияние π, π' -субнормальных подгрупп на строение основной группы.

Ключевые слова: конечная группа, π -отделимая группа, π, π' -субнормальная подгруппа, холлова подгруппа.

Для цитирования: Дергачева, И.М. Критерии π -отделимости конечной группы / И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 81–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81

Abstract. Throughout this paper all groups are finite and G always denotes a finite group. The group G is said to be π -separable if every chief factor of G is either a π -group or a π' -group. A subgroup A of G is said to be π, π' -subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π -separable group for all $i = 1, \dots, n$. In this paper we study the influence of π, π' -subnormal subgroups on the structure of the group.

Keywords: finite group, π -separable group, π, π' -subnormal subgroup, Hall subgroup.

For citation: Dergacheva, I.M. Criteria for π -separability of a finite group / I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 81–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81 (in Russian)

Введение

В данной статье все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n ; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Группа G называется: π -отделимой, если каждый ее главный фактор является либо π -группой, либо π' -группой; π -разложимой, если $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является π, π' -субнормальной в G , если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π -отделимой группой для всех $i = 1, \dots, n$.

В данной работе мы докажем следующий результат, дающий новые характеристики π -отделимых групп в терминах π, π' -субнормальности.

Теорема 0.1. Следующие утверждения попарно эквивалентны.

- (i) Группа G является π -отделимой.
- (ii) Каждая подгруппа группы G является π, π' -субнормальной в G .
- (iii) Каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы G является π, π' -субнормальной в G .
- (iv) Каждая нециклическая силовская подгруппа группы G является π, π' -субнормальной в G .
- (v) В G имеется π, π' -субнормальная холлова π -подгруппа H .
- (vi) Каждая подгруппа Шмидта группы G является π, π' -субнормальной в G .

1 Некоторые предварительные результаты

Мы используем $\mathfrak{S}_{\pi, \pi'}$ для обозначения класса всех π -отделимых групп.

Первая лемма может быть доказана прямой проверкой.

Лемма 1.1. Класс $\mathfrak{S}_{\pi, \pi'}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, всякое расширение

π -отделимой группы при помощи π -отделимой группы является π -отделимой группой.

Из леммы 1.1. и основного результата работы [1] вытекает следующая лемма.

Лемма 1.2. Множество всех π, π' -субнормальных подгрупп группы G формирует подрешетку в решетке всех подгрупп группы G .

Лемма 1.3. Пусть A, K и N – подгруппы в G , где A, π, π' -субнормальна в G и N нормальна в G .

(1) Подгруппа $A \cap K$ π, π' -субнормальна в K .

(2) Если K является π, π' -субнормальной подгруппой в A , то K является π, π' -субнормальной подгруппой в G .

(3) Если K π, π' -субнормальна в G , то $A \cap K$ и $\langle A, K \rangle$ – π, π' -субнормальные подгруппы в G .

(4) Подгруппа AN/N является π, π' -субнормальной в G/N .

(5) Если $N \leq K$ и подгруппа K/N π, π' -субнормальна в G/N , то подгруппа K π, π' -субнормальна в G .

(6) Если $K \leq A$ и группа A π -отделима, то подгруппа K π, π' -субнормальна в G .

Доказательство. Предположим, что данная лемма не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Согласно условию, в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа для всех $i = 1, \dots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$.

(1) Рассмотрим цепь подгрупп

$$K_0 = K \cap A_0 \leq K \cap A_1 \leq \dots \leq K \cap A_r = K$$

в группе K . Если A_{i-1} нормальна в A_i , тогда $K \cap A_{i-1}$ нормальна в $K \cap A_i$. Пусть теперь $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа. Тогда

$$(A_i \cap K)(A_{i-1})_{A_i} / (A_{i-1})_{A_i} \cong A_i \cap K / (A_{i-1})_{A_i} \cap K$$

π -отделима, где $(A_{i-1})_{A_i} \cap K$ нормальна в $A_i \cap K$ и поэтому

$$(A_{i-1})_{A_i} \cap K \leq (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}.$$

Следовательно, $(K \cap A_i) / (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ – π -отделимая группа. Таким образом, $A \cap K$ π, π' -субнормальна в K .

Утверждения (2) и (5) очевидны.

(3) Данное утверждение является следствием леммы 1.2.

(4) Рассмотрим цепь подгрупп

$AN/N = A_0N/N \leq A_1N/N \leq \dots \leq A_rN/N = G/N$ в группе G/N . Предположим, что $A_{i-1}N/N$ не является нормальной подгруппой в A_iN/N .

Тогда $L = A_{i-1}$ не является нормальной подгруппой в $T = A_i$ и поэтому T/L_T – π -отделимая группа согласно условию. Тогда

$$\begin{aligned} (T/L_T) / (L_T(T \cap N)/L_T) &= \\ = (T/L_T) / ((T \cap NL_T)/L_T) &\cong T / (T \cap NL_T) \cong \\ TN / L_TN &\cong (TN/N) / (L_TN/N) \end{aligned}$$

– π -отделимая группа. При этом имеет место включение $L_TN/N \leq (LN/N)_{TN/N}$. Следовательно, $(TN/N) / (LN/N)_{TN/N}$ – π -отделимая группа и поэтому AN/N – π, π' -субнормальная подгруппа в G/N .

(6) Так как A π -отделима, то каждая подгруппа группы A π, π' -субнормальна в A . Таким образом, данное утверждение является следствием утверждения (2). $\square$

Напомним, что G называется группой Шмидта, если группа G ненильпотентна, но все ее собственные подгруппы нильпотентны.

Лемма 1.4 [3, III, теорема 5.2]. [4, VI, теорема 24.2]. Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\text{st}}$ – силовская p -подгруппа группы G и $Q = \langle x \rangle$ является циклической силовской q -подгруппой в G , $p \neq q$. Кроме того, $\langle x^q \rangle \leq \Phi(G)$ и P имеет экспоненту p или 4 (если P – неабелева 2-группа).

2 Доказательство основного результата

Поскольку все импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (iv), (ii) $\Rightarrow$ (v) и (ii) $\Rightarrow$ (vi) являются очевидными, нам достаточно лишь доказать справедливость импликаций (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Rightarrow$ (i), (v) $\Rightarrow$ (i) и (vi) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Пусть $H \leq M \leq G$, где M – максимальная подгруппа в G . Тогда M и G/M_G – π -отделимые группы согласно лемме 1.1. Таким образом, M π, π' -субнормальна в G . С другой стороны, H π, π' -субнормальна в M по индукции и поэтому H π, π' -субнормальна в G ввиду леммы 1.3 (2). Таким образом, обе импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii) являются верными.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и M/R – ненильпотентная максимальная подгруппа в G/R . Тогда M максимальна в G и M не является нильпотентной группой, поэтому M π, π' -субнормальна в G по условию. Следовательно, M/R π, π' -субнормальна в G/R ввиду леммы 1.3(4). Таким образом, условие (iii) выполнено для G/R и поэтому G/R является π -отделимой группой ввиду выбора группы G . Следовательно, R не является

π -группой и не является π' -группой по лемме 1.1, снова ввиду выбора группы G . Это означает, что $R \not\leq \Phi(G)$ и $|\pi(R)| > 1$.

Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq R$, тогда ввиду G -изоморфизма $NR/R \simeq N/1$ подгруппа N является либо π -группой, либо π' -группой, что невозможно ввиду доказанного выше. Таким образом, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G .

Пусть p – произвольное нечетное простое число, делящее $|R|$, и R_p – силовская p -подгруппа в R . Ввиду аргумента Фраттини имеет место $G = RN_G(R_p)$, где $G \neq N_G(R_p)$ поскольку R не является абелевой группой. Тогда для максимальной подгруппы M группы G , содержащей $N_G(R_p)$, имеет место $R \not\leq M$ и поэтому мы имеем $G = RM$ и $M_G = 1$. Более того, если $R_p \leq G_p$, где G_p – силовская p -подгруппа группы G , то $R_p = R \cap G_p$ и поэтому $G_p \leq N_G(R_p) \leq M$. Следовательно, p не делит $|G : M|$ и $M_G = 1$.

Предположим, что пересечение $D := M \cap R$ является нильпотентным. Тогда D – нильпотентная нормальная подгруппа в M и K_p является силовской p -подгруппой в D . Более того, K_p нормальна в M , поскольку D нильпотентна и, следовательно, подгруппа $Z(J(K_p))$ нормальна в M . Поскольку $M_G = 1$, то $N_G(Z(J(K_p))) = M$. Тогда $N_K(Z(J(K_p))) = D$ – нильпотентная группа. Отсюда следует, что K p -нильпотентна по теореме Глаубермана – Томпсона о нормальных p -дополнениях [2, гл. 8, теорема 3.1]. Но тогда K является p -группой, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $D := M \cap R$ не является нильпотентным и поэтому M не является нильпотентной группой. Но тогда M π, π' -субнормальна в G и, следовательно,

$$G \simeq G / M_G = G / 1$$

– G является π -отделимой группой, что противоречит выбору этой группы. Таким образом, импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) является верной.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и пусть P/R – нециклическая силовская p -подгруппа в G/R для некоторого простого числа p . Тогда для некоторой силовской p -подгруппы G_p группы G имеет место $G_p R / R = P/R$ и G_p не является циклической группой. Следовательно, G_p π, π' -субнормальна в G и поэтому $P/R = G_p R / R$ π, π' -субнормальна

в G/R согласно лемме 1.3 (4). Таким образом, гипотеза верна для G/R и поэтому G/R является π -отделимой группой ввиду выбора группы G .

Прежде покажем, что $R < G$. Действительно, предположим, что $R = G$ – неабелева простая группа и пусть P – силовская p -подгруппа в G , где p – наименьший простой делитель числа $|G|$. Тогда P не является циклической группой и поэтому, ввиду условия, в G имеется цепь подгрупп $P = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа для всех $i = 1, \dots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$. Но тогда $G \simeq G / M_G = G / 1$ – π -отделимая группа, что противоречит выбору группы G . Значит, R – собственная подгруппа в G .

Покажем теперь, что R также является π -отделимой группой. Прежде заметим, что для любой нециклической силовской подгруппы P группы R в G имеется нециклическая силовская подгруппа G_p такая, что $P = G_p \cap R$. Но тогда P π, π' -субнормальна в R согласно лемме 1.3 (1). Таким образом, условие (iv) выполнено для R и поэтому R является π -отделимой группой ввиду выбора группы G . Но тогда G является π -отделимой группой поскольку π -отделима группа G/R . Полученное противоречие завершает доказательство импликации (iv) $\Rightarrow$ (i).

(v) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда $1 < H < G$. Так как H π, π' -субнормальна в G , в группе G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа для всех $i = 1, \dots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$ поскольку $H < G$. Понятно, что условие выполнено для (M, H) , поэтому M π -отделима в силу выбора группы G . Понятно также, что $|G : M|$ – π' -число. Это влечет π -отделимость группы G в случае, если M нормальна в G . Таким образом, M не является нормальной в G и поэтому G / M_G – π -отделимая группа. Но в этом случае группа G является π -отделимой поскольку M_G – π -отделимая группа, что противоречит выбору G . Таким образом, импликация (v) $\Rightarrow$ (i) также является верной.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Прежде мы покажем, что G/N –

π -отделимая группа. Если G/R нильпотентна, то это очевидно. Предположим, что фактор группа G/R не является нильпотентной и пусть E/R – подгруппа Шмидта в G/R . Пусть H – минимальное добавление к N в E . Тогда

$$H/(H \cap N) \cong HN/N = E/N$$

– группа Шмидта и $H \cap N \leq \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A – подгруппа Шмидта в H .

Из леммы 1.4 вытекает, что

$$\begin{aligned} & (H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) = \\ & = (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \cong H/\Phi = P \rtimes Q, \end{aligned}$$

где P – силовская p -подгруппа, Q – силовская q -подгруппа в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $p \neq q$. Отсюда, снова по лемме 1.4, следует, что $A = A_p \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \not\leq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q -подгруппой в H/Φ , и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно лемме 1.3 (3), $(A_q)^H = A^H$ является π, π' -субнормальной подгруппой в G и, следовательно,

$$E/N = (A_q)^H N/N$$

π, π' -субнормальна в G/N по лемме 1.3 (4). Следовательно, гипотеза верна для G/N , поэтому выбор G подразумевает, что G/N – π -отделимая группа.

Рассуждая теперь, как при доказательстве импликации (vi) $\Rightarrow$ (i), можно показать, что N – π -отделимая группа. Но тогда G является π -отделимой группой. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (vi) $\Rightarrow$ (i). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.
2. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – Harper & Row Publishers, New York – Evanston – London, 1968.
3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 01.10.2021.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент