

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕ $\mathfrak{F}$ -ПОДГРУПП, ВЫДЕЛЯЕМЫХ ПОДГРУППОВЫМ ФУНКТОРОМ, В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE INTERSECTION OF NON- $\mathfrak{F}$ -SUBGROUPS, DISTINGUISHED BY A SUBGROUP FUNCTION, IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается строение подгруппы, связанной с пересечением ядер максимальных A -допустимых подгрупп, которые не содержат $\mathfrak{F}$ -корадикал и не принадлежат формации $\mathfrak{F}$, индексы которых имеют ограничения. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.

Ключевые слова: конечная группа, формация, $\mathfrak{F}$ -корадикал.

Для цитирования: Бородин, Р.В. О пересечении не $\mathfrak{F}$ -подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором, в группах с операторами / Р.В. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_64

Abstract. The structure of a subgroup associated with the intersection of kernels of maximal A -admissible subgroups that do not contain the $\mathfrak{F}$ -residual and do not belong to the $\mathfrak{F}$ formation whose indices have restrictions are considered. The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.

Keywords: finite group, formation, $\mathfrak{F}$ -residual.

For citation: Borodich, R.V. On the intersection of non- $\mathfrak{F}$ -subgroups, distinguished by a subgroup function, in groups with operators / R.V. Borodich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_64 (in Russian)

Введение

Группы, рассматриваемые в статье, предполагаются конечными. В теории групп к объектам экстремально расположенным в группе уделяется особое внимание. Одними из представителей таких объектов являются максимальные подгруппы, свойства которых могут многое сказать о строении самой группы. Часто рассматривают не сами максимальные подгруппы, а пересечения их некоторых семейств. Основоположающим результатом этого подхода явилась работа Г.Фраттини [1]. Введенная им подгруппа, названная его именем, дала импульс для развития теории пересечений максимальных подгрупп (см. монографии [2], [3], [9]).

Настоящая работа посвящена рассмотрению обобщенно максимальных подгрупп в группах с операторами. Данная работа является продолжением исследований, отраженных в работах [4], [10], [11].

1 Определения и обозначения

Используемые в статье объекты и определения являются классическими. Ознакомиться с ними можно в вышеуказанных работах.

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная формация. Введем следующие обозначения: $D_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ ($\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$) – пересечение ядер всех максимальных A -допустимых θ -подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G (и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$), индексы которых делятся на простые числа из π .

При отсутствии подгрупп с определенными свойствами будем считать, что эти объекты равны G .

Заметим, что не всякая максимальная подгруппа обязана являться максимальной A -допустимой и не любая максимальная из A -допустимых подгрупп группы будет являться максимальной подгруппой в самой группе [11].

2 Основной результат

Теорема 2.1. Пусть подгрупповый функтор θ является абнормально полным, а группа G обладает группой операторов A , такой, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная S_{π} -замкнутая формация, которая содержит все нильпотентные группы, $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ и подгруппа $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$

π -разрешима. Тогда в подгруппе $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ найдется нормальная π' -подгруппа T такая, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка. Очевидно, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ не будет принадлежать формации $\mathfrak{F}$, а иначе в качестве подгруппы T можно положить единичную подгруппу.

Так как подгруппа $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ отлична от G , то из работы [4] заключаем, что $G \neq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Но $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Отсюда следует, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subset \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Значит, в группе G существует такая максимальная A -допустимая θ -подгруппа M , не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и $M \not\subseteq G^{\mathfrak{F}}$, что $G = M\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Если $|\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)| - \pi$ -число, то $|G : M| = |\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)| : |\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap M| - \pi$ -число. Получили противоречие с тем, что $G = M\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = M$. Значит, порядок подгруппы $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ делится на простые числа из π' .

Обозначим через Σ множество, содержащее все максимальные A -допустимые в группе G θ -подгруппы, не принадлежащие формации $\mathfrak{F}$, не содержащие $G^{\mathfrak{F}}$, с индексами в G , являющимися π -числами.

Допустим, что в подгруппе $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ может существовать неединичная π' -подгруппа T , являющаяся нормальной в группе G . Пусть в G/T существует такая подгруппа M/T , что M из Σ и M/T принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда будет выполняться $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T \in \mathfrak{F}$, так как формация $\mathfrak{F}$ является замкнутой относительно нормальных подгрупп. И вновь получено противоречие с предположением. Если в G/T существует максимальная A -допустимая θ -подгруппа $H/T \not\subseteq (G/T)^{\mathfrak{F}}$, не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и не принадлежащая Σ , с индексом в G/T , являющимся π -числом, то $H \in \mathfrak{F}$. Из этого следует, что $H/T \in \mathfrak{F}$. И снова получено противоречие. Получаем, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/T, A) = \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T$. Так как выполняется $G/T \neq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/T, A) = \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T$, то для фактор-группы G/T по допущению теорема верна. Тогда в подгруппе $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T$ можно отыскать нормальную в G/T π' -подгруппу T^*/T такую, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T/T^*/T \in \mathfrak{F}$. Отсюда будет следовать, что T^* - π' -подгруппа и $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T^* \in \mathfrak{F}$, что снова противоречит предположению.

Сделаем допущение, что $\Phi_0(G, A) \neq 1$. Если при этом $M/\Phi_0(G, A) \in \mathfrak{F}$, где $M \in \Sigma$, то $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_0(G, A) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация. На основании результата работы [4] подгруппа $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обязана принадлежать формации $\mathfrak{F}$, что, как видно, противоречит предположению. Отсюда следует, что в группе $G/\Phi_0(G, A)$ все максимальные A -допустимые θ -подгруппы $M/\Phi_0(G, A)$, где M из Σ , не принадлежат формации $\mathfrak{F}$, значит,

$$\begin{aligned} G/\Phi_0(G, A) &\neq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_0(G, A)) = \\ &= \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_0(G, A). \end{aligned}$$

Так как порядки соответствующих групп $|G/\Phi_0(G, A)| < |G|$, то в $G/\Phi_0(G, A)$ обязана найтись нормальная π' -подгруппа $T^*/\Phi_0(G, A)$, такая, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_0(G, A)/T^*/\Phi_0(G, A) \in \mathfrak{F}$. Если предположить, что $\mathfrak{F}$ является формацией всех π' -групп, то на основании работы [4] получим, что $T^* = T_1^* \times T_2^*$, где T_1^* – π -подгруппа, а T_2^* – π' -подгруппа. Отсюда вытекает, что в G будет существовать нормальная π' -подгруппа, что, как можем видеть, противоречит предположению.

Далее в рассуждениях предполагаем, что $\Phi_0(G, A) = 1$.

Допустим, что подгруппа N_1 является минимальной нормальной в G и одновременно содержится в $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как в группе G не существует нормальных π' -подгрупп, $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ является π -разрешимой подгруппой и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то отсюда следует, что N_1 является собственной π -подгруппой $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Так как подгруппа $\Phi_0(G, A)$ отлична от единицы, то в группе G обязана существовать максимальная A -допустимая θ -подгруппа M с таким свойством, что $G = MN_1$. Если M не содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал, то $M \in \mathfrak{F}$, так как $|G : M| = |N_1|$ является π -числом. Отсюда вытекает, что $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, а это влечет $G/\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Отсюда будет следовать, произвольная максимальная A -допустимая в G θ -подгруппа, которая будет содержать подгруппу $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, будет являться подгруппой, которая содержит $G^{\mathfrak{F}}$, а это будет противоречить выбору подгруппы $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$.

Из вышесказанного заключаем, что M является максимальной A -допустимой θ -подгруппой

группы G , которая будет содержать $\mathfrak{F}$ -корадикал. Таким образом, каждая из максимальных A -допустимых в группе G функторных подгрупп, не содержащих нормальную подгруппу N_1 , одновременно содержат $\mathfrak{F}$ -корадикал. Из этого заключения следует, что N_1 будет являться $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной нормальной подгруппой группы G , а это означает, что

$$G / C_G(N_1) \in f(p) \cap \mathfrak{F},$$

где p является делителем порядка N_1 . Из того, что $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация, следует, что

$$\begin{aligned} \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)C_G(N_1) / C_G(N_1) &\cong \\ &\cong \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / C_G(N_1) \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = \\ &= \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(N_1) \in f(p) \cap \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

где p делит $|N_1|$.

Допустим, что L / H – произвольный главный фактор подгруппы $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$, такой, что $L \subseteq N_1$. Так как $C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(N_1) \subseteq C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(L / N)$, то $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(L / N) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, где p делит $|L / N|$. Отсюда следует, что подгруппа N_1 будет являться $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной в подгруппе $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$.

Допустим, что $M_G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} M_G(M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)) / M_G &\cong \\ &\cong M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap M_G = \\ &= M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Но $M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cong \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$, так как

$$\begin{aligned} \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 &= G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 = \\ &= MN_1 \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 = \\ &= (M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A))N_1 / N_1 \cong \\ &\cong M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap N_1 = \\ &= M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A). \end{aligned}$$

Так как N_1 является $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной в $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ подгруппой и подгруппа $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$ принадлежит $\mathfrak{F}$, то $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$, что, как видим, противоречит предположению.

Отсюда будет следовать, что пересечение $M_G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ отлично от единицы. Так как $N_1 \cap M_G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = 1$, то в подгруппе $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ можно отыскать минимальную нормальную в G π -подгруппу N_2 , отличную от единицы.

Проверим, что условия теоремы выполнимы для подгрупп G / N_1 и G / N_2 . Предположим, что

найдется хотя бы по одной фактор-группе $M_k / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $M_l / N_2 \in \mathfrak{F}$, где M_k и M_l из Σ , что влечет выполнение $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2 \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно нормальных подгрупп. Отсюда будет следовать, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$, а это не соответствует предположению.

Предположим теперь, что в G / N_1 найдётся как минимум одна максимальная A -допустимая функторная подгруппа $M_i / N_1 \in \mathfrak{F}$, $M_i \in \Sigma$, а в G / N_2 все подгруппы M_j / N_2 не принадлежат формации $\mathfrak{F}$, где $M_j \in \Sigma$. Следовательно, $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G / N_2, A) = \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$, т. е. для G / N_2 теорема будет верна, а это значит, что в $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$ обязана существовать нормальная в G / N_2 π' -подгруппа T^* / N_2 , причем такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2 / T^* / N_2 \cong \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / T^* \in \mathfrak{F}$. Но и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 \cap T^* \in \mathfrak{F}$. Если бы $N_1 \subseteq T^*$, то $N_2 / N_2 \neq N_1 N_2 / N_2 \subseteq T^* / N_2$ и $N_1 N_2 / N_2$ – π' -подгруппа, а это будет противоречить тому, что N_1 – π -подгруппа. Остаётся заключить, что $N_1 \cap T^* = 1$. Отсюда $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие с нашим предположением. Такие же рассуждения проводятся, предполагая, что в G / N_2 найдется как минимум одна максимальная A -допустимая функторная подгруппа $M / N_2 \in \mathfrak{F}$, где $M \in \Sigma$, а в G / N_1 любая максимальная A -допустимая функторная подгруппа H / N_1 не будет принадлежать формации $\mathfrak{F}$, где $H \in \Sigma$.

Следовательно, в фактор-группах G / N_1 и G / N_2 не может существовать ни одной максимальной A -допустимой функторной подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$ -корадикал, которая одновременно принадлежит формации $\mathfrak{F}$ и в качестве своего индекса в соответствующей фактор-группе π -число. Значит,

$$G / N_1 \neq \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G / N_1, A) = \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$$

и $G / N_2 \neq \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G / N_2, A) = \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$. Используя допущение, получим, что в подгруппах $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$ будут существовать соответственно в G / N_1 и G / N_2 нормальные π' -подгруппы T_1 / N_1 и T_2 / N_2 такие, что

$$\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 / T_1 / N_1 \in \mathfrak{F}$$

и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2 / T_2 / N_2 \in \mathfrak{F}$. Непосредственно отсюда получаем, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / T_1 \cap T_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $T_1 \cap T_2 = T$ – неединичная подгруппа. Подгруппа N_1 не содержится в подгруппе T_2 , так как N_1 – π -подгруппа, а T_2 / N_2 – π' -подгруппа. Проводя аналогичные рассуждения заключаем, что N_2 не содержится в T_1 , так как N_2 – π -подгруппа, а T_1 / N_1 – π' -подгруппа. Отсюда непосредственно будет следовать, что $T_1 \cap T_2$ – π' -подгруппа. По предположению в подгруппе $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ не существует нормальных в группе G π' -подгрупп. Отсюда вытекает, что $T_1 \cap T_2 = 1$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие окончательно доказывает теорему.

В случае, если формация $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией нильпотентных групп, то из теоремы 2.1 можно получить следующее

Следствие 2.1.1. Пусть у группы G имеется группа операторов A , такая, что $(|G|, |A|) = 1$, подгрупповый функтор θ является абнормально полным и в группе G существует ненильпотентная максимальная A -допустимая θ -подгруппа, индекс которой в G есть π -число. Если $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ – π -разрешимая подгруппа, тогда в группе G существует нормальная π' -подгруппа T , такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / T \in \mathfrak{N}$.

Следствие 2.1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая все нильпотентные группы, подгрупповый функтор θ является абнормально полным, $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G) \neq G$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ – π -разрешимая подгруппа. Тогда в $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ найдется π' -подгруппа T , нормальная в G , такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G) / T \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1.3. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором и в группе G найдется ненильпотентная A -допустимая максимальная θ -подгруппа, индекс которой в G есть π -число. Если $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ – π -разрешимая подгруппа, то в группе G существует нормальная π' -подгруппа T , такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G) / T \in \mathfrak{N}$.

Теорема 2.2. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором, а группа операторов A группы G такая, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, такая, что $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Если L – нормальная π -подгруппа группы G и $L \subseteq \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$, то либо $L \in \mathfrak{F}$, либо $G^\mathfrak{F} \subseteq L$.

Доказательство. Предположим, что группа G имеет наименьший порядок, теорема для которой не выполняется.

Если подгруппа $L = 1$, то $L \in \mathfrak{F}$. Следовательно, можно допустить, что в L существует минимальная нормальная в группе G не единичная подгруппа K . Так как

$$L / K \subseteq \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / K \subseteq \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G / K, A),$$

то для группы G / K теорема будет выполняться. Значит, в группе G / K или $G^\mathfrak{F} K / K \subseteq L / K$, или $L / K \in \mathfrak{F}$. Если выполняется $G^\mathfrak{F} K / K \subseteq L / K$, то $G^\mathfrak{F} \subseteq L$, что противоречит предположению теоремы. Остаётся заключить, что $L / K \in \mathfrak{F}$.

Допустим, что $K \subseteq \Phi_0(G, A)$. Тогда из работы [4] подгруппа $L \in \mathfrak{F}$. Следовательно, K не будет содержаться в $\Phi_0(G, A)$.

Если допустить, что каждая максимальная A -допустимая функторная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , содержит $G^\mathfrak{F}$, то из работы [4] получим, что $L \in \mathfrak{F}$. Опять получено противоречие. Значит, в G будет существовать такая максимальная A -допустимая функторная подгруппа H , не содержащая $G^\mathfrak{F}$, что $G = HK$. Если H принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то $G^\mathfrak{F} \subseteq K \subseteq L$. Получили противоречие. Значит, H не принадлежит замкнутой относительно нормальных подгрупп формации $\mathfrak{F}$.

Так как подгруппа K является π -подгруппой, то H может только быть максимальной A -допустимой функторной подгруппой группы G , не принадлежащей формации $\mathfrak{F}$ и не содержащей $\mathfrak{F}$ -корадикал, с индексом в G , являющимся π -числом, но в связи с условием $L \subseteq \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A)$. Откуда будет следовать, что $G = H$. Полученное в заключении противоречие доказывает теорему. $\square$

В случае, когда группа A тривиальна, то в качестве следствия теоремы 3.2 получают результаты В.А. Ведерникова и Е.Т. Огаркова [7], Л.И. Шидова [6], В.В. Шлыка [5], М.В. Селькина [3].

Теорема 2.3. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором, а группа операторов A группы G такая, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация. Если L является нормальной A -допустимой π -подгруппой группы G и $L / L \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$, тогда $L = L_1 \times L_2$, где множители удовлетворяют условиям:

- 1) $L_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(L_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $L_2 \subseteq \Phi_0(G, A)$.

Доказательство. Предположим, что группа G имеет наименьший порядок, теорема для которой не выполняется.

Если $L \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = 1$, то теорема выполняется. Допустим K является не единичной

минимальной нормальной в G подгруппой, которая будет содержаться в $L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как

$$\begin{aligned} L/K / L/K \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G/K, A) &= \\ = L/K / L/K \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A)/K &= \\ = L/K / L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A)/K &\cong L/L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

то для группы G/K теорема выполняется, значит, $L/K \in \mathfrak{F}$. Если предположить, что $K \subseteq \Phi_0(G, A)$, то на основании результатов из [4] подгруппа $L \in \mathfrak{F}$, а это не согласуется с предположением. Следовательно, подгруппа K не может содержаться в $\Phi_0(G, A)$.

Если допустить, что любая максимальная A -допустимая функторная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , содержит $G^{\mathfrak{F}}$, то, используя работу [4], получим, что $L \in \mathfrak{F}$. Снова столкнулись с противоречием. Значит, в группе G существует такая максимальная A -допустимая функторная подгруппа H , не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, что $G = HK$. Если предположить, что $H \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq L$, а это снова будет противоречить предположению. Из этого следует, что подгруппа H не принадлежит нормально наследственной формации $\mathfrak{F}$.

Так как K — π -подгруппа группы G , то H является максимальной A -допустимой функторной подгруппой группы G , не принадлежащей формации $\mathfrak{F}$ и не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$, с индексом в G , который является π -числом. Из последнего будет следовать, что $K \subseteq L$. Последнее противоречие окончательно доказывает теорему. $\square$

Следствие 2.3.1. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором, а группа операторов A группы G такая, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ — S_n -замкнутая локальная формация, такая, что $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Если L является нормальной π -подгруппой группы G и $L/L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $L \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $A=1$, то из теоремы 2.3 будут следовать результаты работ [3], [5], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini, G.* Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. — 1885. — Vol. 1. — P. 281–285.
2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — Москва: Наука, 1978. — 267 с.
3. *Селькин, М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 144 с.
4. *Бородич, Р.В.* О пересечении абнормальных A -допустимых подгрупп с ограничениями на индексы, не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — № 4 (39). — С. 39–43.
5. *Шлык, В.В.* О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Математические заметки. — 1973. — Т. 14, № 3. — С. 429–439.
6. *Шидов, Л.И.* О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сибирский математический журнал. — 1971. — Т. 12, № 3. — С. 682–683.
7. *Ведерников, В.А.* Об обобщённой подгруппе Фраттини конечной группы / В.А. Ведерников, Т.Т. Огарков // IV Всесоюзный симпозиум по теории групп. — Новосибирск. — 1973. — С. 22–23.
8. *Ведерников, В.А.* Конечные группы с обобщённой подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. — Гомель. — 1968. — С. 44.
9. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 240 с.
10. *Бородич, Р.В.* О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич // Украинский математический журнал. — 2019. — Т. 71, № 11. — С. 1455–1465.
11. *Borodich, R.V.* A generalized Frattini subgroup / R.V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 14, № 2. — P. 2150026. — DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793557121500261>

Поступила в редакцию 04.11.2021.

Информация об авторах

Бородич Руслан Викторович — к.ф.-м.н., доцент