ФИЗИКА

УДК 539.3

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

Э.И. Старовойтов

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

BENDING OF A THREE-LAYER PLATE BY A UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD IN THE NEUTRON FLUX

E.I. Starovoitov

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Рассмотрен изгиб круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины в условиях нейтронного облучения. Осесимметричная непрерывная нагрузка перпендикулярна плоскости пластины. Кинематика пакета описывается с помощью гипотезы ломаной линии. Для несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа. Относительно толстый заполнитель подчиняется гипотезе Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учитывается работа касательных напряжений в заполнителе. Дифференциальные уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Контур пластины шарнирно оперт. Приведена постановка краевой задачи для нахождения трех искомых функций: прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной плоскости заполнителя. Решение при равномерно распределенной нагрузке получено в конечном виде. Проведен его численный параметрический анализ.

Ключевые слова: *трехслойная круговая пластина*, *изгиб*, *распределенная осесимметричная нагрузка*, *упругость*, *нейтронное облучение*.

The bending of a circular three-layer plate with an asymmetric thickness under neutron irradiation conditions is considered. The axisymmetric continuous load is perpendicular to the plate plane. The kinematics of the package is described using the polyline hypothesis. For load-bearing layers, the Kirchhoff hypotheses are accepted. The relatively thick filler obeys Timoshenko's hypothesis about the straightness and incompressibility of the deformed normal. The work of tangential stresses in the filler is taken into account. Differential equilibrium equations are obtained by the Lagrange variational method. The contour of the plate is pivotally supported. The statement of the boundary value problem for finding the three desired functions: deflection, shear and radial displacement of the median plane of the filler is given. The solution for a uniformly distributed load is obtained in the final form. Its numerical parametric analysis is carried out.

Keywords: *three-layer circular plate*, *bending*, *distributed axisymmetric load*, *elasticity*, *neutron irradiation*.

Введение

Построению математических моделей упругих трехслойных элементов конструкций, уделяется большое внимание в связи с их широким применением в технике, машиностроении и строительстве. Эта проблема отражена в ряде работ.

В монографиях [1]–[4] приведены постановки краевых и начально краевых задач о квазистатическом и динамическом деформировании трехслойных стержней, пластин и оболочек. Разработаны методы их решения и приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) при силовых нагружениях с учетом воздействия окружающей среды.

Свободные и вынужденные колебания, в том числе резонансные, трехслойных оболочек и пластин рассмотрены в статьях [5]–[8]. Проведены численные исследования влияния жесткости упругого основания на частоты и амплитуды колебаний, рассмотрены случаи конечных деформаций и внезапно приложенных нагрузок.

Работы [9]–[12] посвящены исследованию квазистатического деформирования упругих слоистых балок и прямоугольных пластин. Однократное и циклическое нагружение неупругих слоистых пластин рассмотрено в [13], [14]. Математическая модель деформирования трехслойных круговых пластин, связанных с основанием Пастернака, разработана в статьях [15], [16]. Результаты исследования изгиба трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем приведены в [17], [18]. Решения выписаны в конечном виде, проведена их численная апробация.

Влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойных функционально градиентальных сэндвич пластин исследовано в [19], [20]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и цилиндрических оболочек рассматривалось в публикациях [21]–[24]. В статье [25] исследованы проблемы определения начального направления развития трещины в момент страгивания.

Зависимость механических свойств материалов от нейтронного облучения описано в монографиях [26], [27]. Построению математических моделей и разработке методов решения краевых задач, учитывающих влияние радиационных эффектов, посвящена книга [28]. В статьях

[29] исследовано деформирование трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке. Работа [30] посвящена исследованию изменения величины нейтронного потока при прохождении через трехслойную пластину.

В данной работе приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном изгибе, распределенной по поверхности верхнего слоя нагрузкой, трехслойной упругой круговой пластины в условиях нейтронного облучения.

1 Нейтронный поток в слоях пластины

Кинематические гипотезы деформирования пластины соответствуют гипотезе ломаной линии. Тонкие несущие слои толщиной $h_1 \neq h_2$ выполнены из более прочных материалов и принимают на себя основную силовую нагрузку. Для них справедливы гипотезы Кирхгофа. В более толстом заполнителе ($h_3 = 2c$) принимается гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, учитывается относительный сдвиг ψ и работа касательных напряжений. Цилиндрическая система координат r, φ, z связывается со срединной плоскостью заполнителя, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою (рисунок 1.1). Проекции осесимметричной распределенной нагрузки на координатные оси обозначены $q(r)$, $p(r)$. Контур пластины шарнирно оперт и на нем содержится жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу в заполнителе ($\psi = 0$ при $r = r_0$).

Предполагается, что в начальный момент времени на внешнюю поверхность верхнего слоя $z = c + h_1$ рассматриваемой пластины воздействует осесимметричная распределенная силовая нагрузка и *нейтронный поток* плотностью $\varphi_0 = \text{const}$ в направлении, противоположном внешней нормали (рисунок 1.1). В силу осесимметричности нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k = 1, 2, 3 – номер слоя), а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ. В дальнейшем эти функции $w(r, t)$, $u(r, t)$, $\psi(r, t)$ считаются искомыми. Их зависимость от времени t определяется величиной изменяющегося интегрального нейтронного потока. Через h_k обозначена толщина k-го слоя.

При облучении элементов конструкций нейтронами, ионами, электронами изменяются механические свойства материалов: твердость, предел текучести, пластичность, ползучесть. Особый интерес представляет нейтронное облучение, в результате которого в твердых телах происходит распухание материала, возникает объемная деформация θ_I. Влияние нейтронного облучения на параметры упругости – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т. д. незначительно и в дальнейшем не учитывается [26]–[28].

Согласно экспериментальным данным при малых деформациях в линейном приближении можно считать, что изменение объема материала в слоях θ_{Ik} прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку, прошедшему через них [26]:

$$\theta_{Ik} = B_k I_k(z), \tag{1.1}$$

где $I_k(z) = \varphi_k(z)\ t$ – интегральный нейтронный поток в k-ом слое; φ_k – интенсивность потока (нейтрон/(м^2·с)), дошедшего за время t к поверхности с координатой z в k-ом слое; B_k – константа материала, получаемая из опыта.

В работе [30] показано, что к моменту t через сечение z в верхнем слое пройдет интегральный поток

$$I_1(z,t) = \varphi_0 t \exp\left(-\mu_1(c + h_1 - z)\right), \tag{1.2}$$

где μ_1 – величина макроскопического эффективного сечения (1/см).

В заполнителе интегральный поток $I_3(z,t)$ к моменту t будет

$$I_3(z,t) = \varphi_{13} t \exp\left(-\mu_3(c - z)\right), \tag{1.3}$$

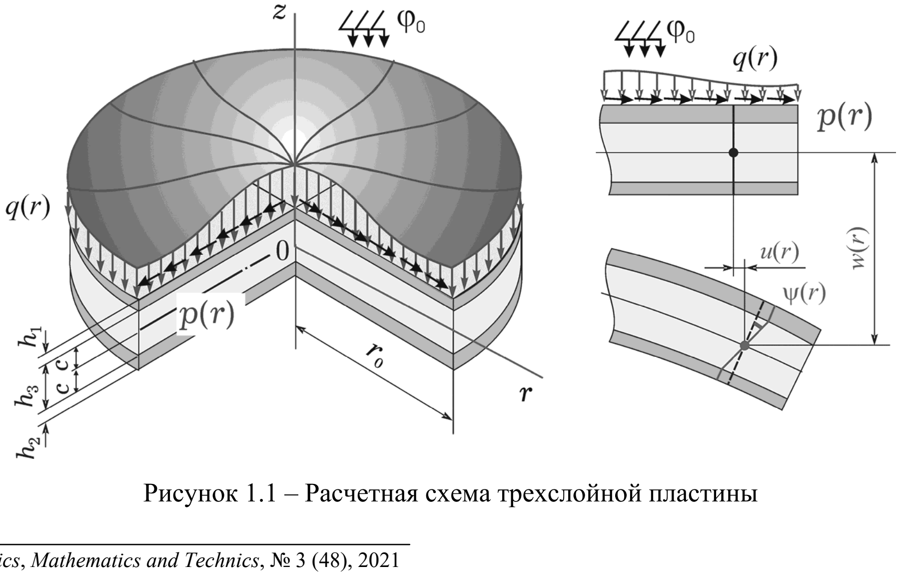

Рисунок 1.1 – Расчетная схема трехслойной пластины

где $\varphi_{13} = \varphi_0 \exp(-\mu_1 h_1)$.

В нижнем слое интегральный поток $I_2(z,t)$ к моменту t станет

$$I_2(z,t) = \varphi_{32} t \exp(-\mu_2(-c-z)), \quad (1.4)$$

где $\varphi_{32} = \varphi_{13} \exp(-2\mu_3 c)$.

В зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала величина параметра B в (1.1) может быть порядка 10^{-28}–10^{-23} м^2 / нейтрон. Отметим, что значение μ_k обратно величине свободного пробега нейтронов, которая для быстрых нейтронов в алюминии – λ_1 = 14,1–15,9 см, в полиэтилене – λ_3 = 5,5–13,9 см.

Таким образом, формулы (1.2)–(1.4) позволяют рассчитать интегральный нейтронный поток в трехслойной пластине, прошедший за время t через плоскость с координатой z.

2 Постановка краевой задачи радиационной упругости для трехслойной пластины

Для описания деформирования материалов слоев пластины используется закон Гука, учитывающий радиационное изменение объема (1.1):

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k Э_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 Э_{rz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = K_k(3\varepsilon^{(k)} - B_k I_k) \quad (k = 1, 2, 3; \ \alpha = r, \varphi), \quad (2.1)$$

где $s_\alpha^{(k)}, Э_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования; $s_{rz}^{(3)}$, $Э_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

Радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$, в соответствии с принятыми гипотезами, выражаются через искомые функции следующими формулами:

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw,_r, \quad c \le z \le c + h_1,$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw,_r, \quad -c \le z \le c,$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r, \quad -c - h_2 \le z \le -c, \quad (2.2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводятся соотношениями

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz,$$

$$M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z\, dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right), \quad Q = \int_{-c}^{c} \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad (2.3)$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_{rz}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений.

Система уравнений равновесия рассматриваемой пластины в обобщенных усилиях (2.3) получена вариационным методом Лагранжа и приведена в [3]. При ее выводе не использовались уравнения связи напряжений и деформаций, поэтому она остается справедливой и в рассматриваемом случае:

$$T_r,_r + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p, \quad H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q = 0,$$

$$M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = q. \quad (2.4)$$

Используя закон Гука (2.1), выразим напряжения в формулах (2.3) через деформации и далее с помощью соотношений Коши [1] через перемещения. В результате получим выражения внутренних усилий через три искомые функции, в которые войдет интегральный нейтронный поток:

$$T_r = \sum_{k=1}^{3} \left[h_k \left(K_k^+ u,_r + \frac{u}{r} K_k^- \right) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz \right] +$$
$$+ c\left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right)\psi,_r + c\left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2\right)\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] w,_{rr} -$$
$$-\left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] \frac{w,_r}{r},$$

$$T_\varphi = \sum_{k=1}^{3} \left[h_k \left(K_k^- u,_r + \frac{u}{r} K_k^+ \right) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz \right] +$$
$$+ c\left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2\right)\psi,_r + c\left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right)\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] w,_{rr} -$$
$$-\left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] \frac{w,_r}{r},$$

$$M_r = \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] u,_r +$$
$$+\left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] \frac{u}{r} +$$
$$+\left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right] \psi,_r +$$
$$+\left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right] \frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+ \right] w,_{rr} -$$
$$-\left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}c^3 K_3^- \right] \frac{w,_r}{r} - \sum_{k=1}^{3} K_k B_k \int_{h_k} I_k z dz,$$

$$H_r = c\left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right)u,_r + c\left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2\right)\frac{u}{r} +$$
$$+\left[c^2\left(K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\psi,_r +$$
$$+\left[c^2\left(K_1^- h_1 + K_2^- h_2\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[c\left(K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]w,_{rr} -$$
$$-\left[c\left(K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{w,_r}{r} -$$
$$-K_3 B_3 \int_{h_3} I_3 z dz - c\left(K_1 B_1 \int_{h_1} I_1 dz - K_2 B_2 \int_{h_2} I_2 dz\right),$$
$$Q = 2cG_3\psi,$$
$$K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+,\ K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-. \qquad (2.5)$$

Аналогичные соотношения для внутренних моментов M_φ, H_φ следуют из (2.5), если в одноименных внутренних усилиях M_r, H_r поменять местами параметры K_k^+ и K_k^-.

Подставив полученные выражения внутренних усилий (2.5) в уравнения (2.4) и проведя необходимые преобразования, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в искомых перемещениях $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r) = p,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r) - 2cG_3\psi = 0,$$
$$\mathrm{L}_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r) = -q, \qquad (2.6)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$
$$\mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\,\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

a_i – коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+,\ \ a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$
$$a_3 = h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+,$$
$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+\right),$$
$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right],$$
$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ +$$
$$+h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+.$$

Следует отметить, что хотя обобщенные внутренние усилия (2.5) зависят от интегрального нейтронного потока $I_k(z)$, однако в систему уравнений (2.6) он явным образом не входит, т. к. производные от него по радиальной координате равны нулю, а в разностях обобщенных усилий в первом и втором уравнениях (2.4) соответствующие слагаемые сокращаются.

3 Решение краевой задачи

В дальнейшем рассматривается поперечный изгиб круговой трехслойной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки, т. е. $p(r) = 0$, $q(r) = q_0 = \text{const}$. Тогда решение системы (2.6), с учетом ограниченности в начале координат, будет следующим:

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) - \frac{b_2 q_0}{4cb_3 G_3}r,$$
$$w = \frac{b_2}{b_3}\left(\frac{C_2}{\beta}I_0(\beta r) - \frac{b_2 q_0}{8cb_3 G_3}r^2\right) +$$
$$+\frac{q_0}{64b_3}r^4 + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_4^{(n)},$$
$$u = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2}\left[\frac{q_0}{16}r_0^3 + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3}\right)\psi + C_7 r\right], \quad (3.1)$$

где C_2, C_4, C_5, C_7 – константы интегрирования; $I_1(\beta r)$ – *модифицированная функция Бесселя*; $K_1(\beta r)$ – *функция Макдональда*; интегралы берутся в пределах от 0 до r; коэффициенты

$$\beta^2 = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2},\ \ b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1},$$
$$b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1},\ \ b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

В качестве граничных условий принимается шарнирное опирание контура пластины:

$$u = \psi = w = 0,\ \ M_r = 0,\ \text{при}\ r = r_0. \qquad (3.2)$$

Подставив решение (3.1) в граничные условия (3.2) и учитывая выражение для обобщенного внутреннего момента M_r (2.5), получим следующие константы интегрирования:

$$C_2 = \frac{b_2 q_0 r_0}{4cb_3 G_3 I_1(\beta r_0)},$$
$$C_4^{(n)} = \frac{b_2}{b_3}\left(\frac{C_2}{\beta}I_0(\beta r_0) - \frac{b_2 q_0}{8cb_3 G_3}r_0^2\right) - \frac{q_0}{64b_3}r_0^4 - \frac{C_5 r_0^2}{4b_3},$$
$$C_5 = -\frac{2b_3}{a_6 + a_7}\left\{\left(3 + \frac{a_3^2}{b_3 a_1}\right)\frac{q_0}{16}r_0^2 +\right.$$
$$+t\left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1}\left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1}\right)\exp(-\mu_1 h_1)\right) +\right.$$
$$+\frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2}\left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2}\right)\exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2}\right) +$$
$$\left.\left.+\frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3}\left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3}\right)\exp(-2\mu_3 c)\right)\right]\right\},$$
$$C_7 = -\frac{a_3 q_0}{8a_1 b_3}r_0^2 - \frac{a_3}{a_1 b_3}C_5. \qquad (3.4)$$

Таким образом, решение (3.1) с константами интегрирования (3.4) дают перемещения в шарнирно закрепленной трехслойной круговой пластине, при изгибе равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке.

4 Численные результаты

Численная апробация решения проведена для пластины, слои которой набраны из материалов Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Все необходимые механические параметры этих материалов приведены в монографии [3]. При расчетах принималось: интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q_0 = -1$ МПа, нейтронного потока $\varphi = 10^{18}$ нейтрон / (м^{2}с), если другое не указано; толщины слоев $h_2 = 0{,}04$ м, $h_3 = 0{,}4$ м; радиус пластины $r_0 = 1$ м.

Рассмотрим сначала деформирование пластины только под действием нейтронного потока, т. е. $q_0 = 0$. На рисунке 4.1 показано изменение прогиба w вдоль радиуса пластины за счет облучения нейтронными потоками различных интенсивностей (нейтрон / (м^{2}с)). Толщины слоев: $h_1 = 0{,}02$ м; $h_2 = 0{,}06$ м; $h_3 = 0{,}4$ м. Воздействие нейтронного облучения вызывает увеличение объемной деформации в каждом слое, при этом верхний слой облучается потоком большей интенсивности, что вызывает большее его распухание и прогиб, направленный вверх. Усиление интенсивности потока на порядок вызывает примерно такое же увеличение прогиба. При нейтронном облучении относительный сдвиг в заполнителе отсутствует.

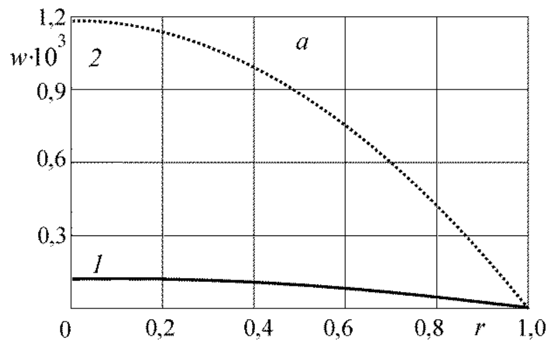

Рисунок 4.1. – Прогиб w, м за счет нейтронного облучения (нейтрон / (м^{2}с)):
1 – $\varphi_1 = 10^{17}$, 2 – $\varphi_2 = 10^{18}$

Следует отметить, что величина и знак прогиба пластины, появляющегося за счет распухания материала, зависит от толщины верхнего слоя. При этом существует такое критическое значение $h_1 = h_1^*$, при котором прогиб обращается в ноль. Для определения значения h_1^* в решении (3.1) необходимо положить $w(h_1^*) = 0$ при $q_0 = 0$. Прогиб равен нулю, если выполняется уравнение, следующее из условия $C_5 = 0$:

$$-t\left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1}\left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1}\right)\exp(-\mu_1 h_1)\right) + \right.$$
$$+\frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2}\left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2}\right)\exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2}\right) +$$
$$\left.\left.+\frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3}\left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3}\right)\exp(-2\mu_3 c)\right)\right]\right\} = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) исследовалось численно. Было получено, что при выбранных параметрах пластины ($h_3 = 0{,}4$ м, $h_2 = 0{,}04$ м) и величины нейтронного потока $\varphi_1 = 10^{17}$ нейтрон / (м^{2}с) критическая толщина верхнего слоя $h_1^* \approx 0{,}012$ м. Если $h_1 < h_1^*$, то прогиб направлен вниз, в случае $h_1 = h_1^*$ – прогиб нулевой, при $h_1 > h_1^*$ пластина выпукла вверх.

Рисунок 4.2 иллюстрирует зависимость прогиба пластины w, м от ее асимметрии по толщине при постоянной толщине заполнителя $h_3 = 0{,}4$ м. Здесь при относительно тонком верхнем несущем слое прогиб отрицательный, но по мере роста его толщины и ослаблении нижнего несущего слоя прогиб изменяет свое направление.

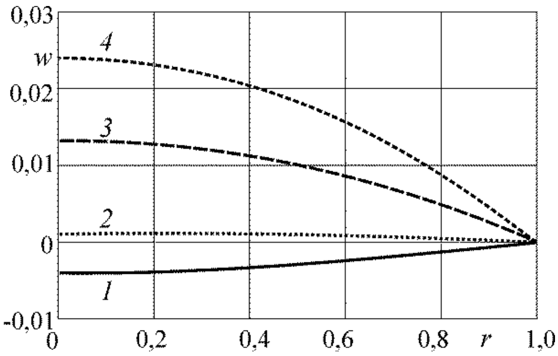

Рисунок 4.2 – Зависимость прогиба w от асимметрии пластины по толщине (м):
1 – $h_1 = 0{,}01$, $h_2 = 0{,}07$;
2 – $h_1 = 0{,}02$, $h_2 = 0{,}06$;
3 – $h_1 = 0{,}04$, $h_2 = 0{,}04$;
4 – $h_1 = 0{,}06$, $h_2 = 0{,}02$

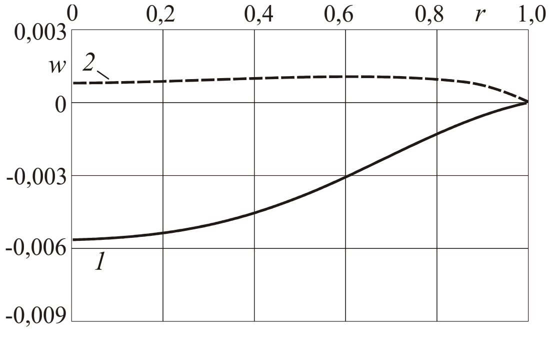

Рисунок 4.3 – Изменение прогиба w вдоль радиуса пластины:
1 – $h_1 = 0{,}01$ м; *2* – $h_1 = 0{,}02$ м

Изменение прогиба w (м) вдоль радиуса пластины при величине интенсивности нейтронного потока $\varphi = 10^{18}$ нейтрон / (м^{2}с) и нагрузки $q_0 = -1$ МПа показано на рисунке 4.3. Толщина заполнителя $h_3 = 0{,}4$ м, нижнего слоя $h_2 = 0{,}04$ м. Если $h_1 < h_1^* \approx 0{,}012$ м, то прогиб направлен вниз в сторону действия нагрузки и за счет нейтронного потока возрастает по модулю. В случае $h_1 > h_1^*$ прогиб направлен вверх и воздействие нейтронного потока его уменьшает.

Заключение

Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия позволяют исследовать влияние нейтронного облучения на напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин при непрерывных осесимметричных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние величины интегрального нейтронного потока на прогиб пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавков*, *М.А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.

2. *Головко*, *К.Г.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.

3. *Горшков*, *А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

4. *Старовойтов*, *Э.И.* Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 276 с.

5. *Gorshkov*, *A.G.* Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, É.I. Starovoitov, Yarovaya A.V. // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.

6. *Starovoitov*, *E.I.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, № 5. – P. 561–570.

7. *Paimushin*, *V.N.* Theory of moderately large deflectıons of sandwıch shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V.N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, № 1. – P. 3–26.

8. *Deshpande*, *V.S.* Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.

9. *Škec*, *L.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // Acta Mechanica. − 2014. − Vol. 225, № 2. − P. 523–541.

10. *Belinha*, *J.* Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method / J. Belinha, L.M. Dints // Composite Structures. – 2007. – Vol. 78, № 3. – P. 337–350.

11. *Julien*, *D.* Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenesized Love–Kirchhoff Model / D. Julien, S. Karam // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56, № 2. – P. 561–580.

12. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

13. *Moskvitin*, *V.V.* Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates / V.V. Moskvitin, E.I. Starovoitov // Mechanics of Composite Materials. − 1985. – Vol. 21, № 3. – P. 267–273.

14. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойной круговой пластины в условиях ползучести / Э.И. Старовойтов, Ю.М. Плескачевский, А.В. Яровая // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 57–63.

15. *Козел*, *А.Г.* Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

16. *Козел*, *А.Г.* Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

17. *Захарчук*, *Ю.В.* Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (4). – С. 53–57.

18. *Захарчук*, *Ю.В.* Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

19. *Zenkour*, *A.M.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 7–46.

20. *Zenkour*, *A.M.* Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.

21. *Старовойтов*, *Э.И.* Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

22. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

23. *Нестерович*, *А.В.* Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

24. *Нестерович*, *А.В.* Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

25. *Гундина*, *М.А.* Определение начального направления развития трещины в момент страгивания / М.А. Гундина // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 40–44.

26. *Ильюшин*, *А.А.* Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.

27. *Платонов*, *П.А.* Действие облучения на структуру и свойства металлов / П.А. Платонов. – М.: Машиностроение, 1971. – 40 с.

28. *Куликов*, *И.С.* Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В.Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Навука і тэхніка, 1990. – 144 с.

29. *Starovoitov*, *E.I.* Deformation of a three-layer rod with a compressible core in a neutron flow / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2020. – Vol. 56, № 1. – P. 81–91.

30. *Старовойтов*, *Э.И.* Изменение нейтронного потока при прохождении через трехслойную пластину / Э.И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. Международный сборник научных трудов. Выпуск 13. – 2020. – № 13 (13). – С. 141–146.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РБ в науке на 2021 *год.*

Поступила в редакцию 12.06.2021.