

УДК 512.542

ОБОБЩЕННО σ -СУБНОРМАЛЬНЫЕ И σ -ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУППИ.Н. Сафонова^{1,2}, А.Н. Скиба²¹Белорусский государственный университет, Минск²Гомельский государственный университет имени Франциска СкориныGENERALIZED σ -SUBNORMAL AND σ -PERMUTABLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPSI.N. Safonova^{1,2}, A.N. Skiba²¹Belarusian State University, Minsk²Francisk Skorina Gomel State University

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. σ -свойством группы называют всякое ее свойство, не зависящее от выбора разбиения σ множества $\mathbb{P}$. Данная работа посвящена дальнейшему изучению σ -свойств группы. Обобщены многие известные результаты.

Ключевые слова: конечная группа, σ -нильпотентная группа, σ -разрешимая группа, σ -субнормальная подгруппа, группа Шмидта.

Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. A σ -property of a group is any of its properties that do not depend on the choice of the partition σ of the set $\mathbb{P}$. This work is devoted to further the study of the σ -properties of a group. A lot of known results are generalized.

Keywords: finite group, σ -nilpotent group, σ -soluble group, σ -subnormal subgroup, Schmidt group.

Введение

В данной статье все группы конечны и G всегда означает конечную группу; $\mathcal{L}(G)$ обозначает решетку всех подгрупп группы G ; $\pi(G)$ – это набор всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G .

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппа A группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной (соответственно, $\mathfrak{F}$ -нормальной) в G , если $A^G / A_G \in \mathfrak{F}$ (соответственно, если либо $A \trianglelefteq G$, либо $A_G \neq A^G$ и каждый главный фактор H/K группы G между A_G и A^G является $\mathfrak{F}$ -центральным в G [1], т. е.

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}.$$

В дальнейшем, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, и мы полагаем, следуя [2], [3],

$$\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}.$$

Кроме того, $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группа G называется: Π -группой, если $\sigma(H) \subseteq \Pi$; Π -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \Pi$. Символ $O_\Pi(G)$ обозначает

подгруппу группы G , порожденную всеми ее Π -подгруппами.

Группа G называется [4]: σ -разрешимой, если каждый главный фактор H/K группы G является σ -примарным, т. е. H/K является σ_i -группой для некоторого $i = i(H/K)$; σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times \dots \times G_t$ для некоторых σ -примарных групп $G_1, \dots, G_t$; мета- σ -нильпотентной, если G является расширением σ -нильпотентной группы при помощи σ -нильпотентной группы.

Мы используем символы $\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ для обозначения классов всех σ -разрешимых групп и всех σ -нильпотентных групп соответственно; $\mathfrak{N}_\sigma^2$ – класс всех мета- σ -нильпотентных групп.

Напомним также, что подгруппа A группы G называется σ -субнормальной в G [4], если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – σ -примарная группа для всех $i = 1, \dots, n$.

Понятно, что G разрешима (соответственно nilпотентна) тогда и только тогда, когда G σ -разрешима (соответственно σ -нильпотентна),

где $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$; подгруппа A субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ^1 -субнормальна в G .

Множество всех σ -субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_\sigma(G)$ и, в частности, множество всех субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_{sn}(G)$ образуют подрешетки в решетке $\mathcal{L}(G)$ (см. [4] и [5] соответственно). Это важное свойство σ -субнормальных подгрупп предопределило возможность использования таких подгрупп при анализе многих открытых вопросов (см., например, недавние статьи [2]–[4], [6]–[19]).

Широкие серии других подрешеток решетки $\mathcal{L}(G)$ были найдены в недавних статьях [3], [12] (см. также [10]–[22]). В частности, было доказано (см. теорему 1.4 в [3]), что если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация Фиттинга, то набор $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}w}(G)$, состоящий из всех $\mathfrak{F}w$ -нормальных подгрупп, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$, и если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}n}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}$ -нормальных подгрупп, также образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

В данной статье мы анализируем дальнейшие применения решеток $\mathcal{L}_\sigma(G)$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}w}(G)$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}n}(G)$, используя для этого следующие обобщения σ -субнормальности.

Определение 0.1. Мы говорим, что подгруппа H группы G является:

(i) $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенной (соответственно $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенной) в G , если $H = A \cap B$ для некоторой $\mathfrak{F}w$ -нормальной (соответственно, для некоторой $\mathfrak{F}$ -нормальной) подгруппы A и σ -субнормальной подгруппы B группы G .

(ii) слабо $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенной (соответственно слабо $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенной) в G , если для некоторой σ -субнормальной подгруппы T и некоторой $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенной (соответственно, $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенной) подгруппы S в G имеет место $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$.

Множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}w \wedge \sigma}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенных подгрупп группы G , образует meet-подрешетку [23, стр. 7] решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е. $A \cap B \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}w \wedge \sigma}(G)$ для любых двух подгрупп $A, B \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}w \wedge \sigma}(G)$; ещё одна meet-подрешетка в $\mathcal{L}(G)$ – множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F} \wedge \sigma}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенных подгрупп в G .

Отметим, что любая $\mathfrak{F}w$ -нормальная подгруппа $A = A \cap G$ группы G $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложена, а каждая σ -субнормальная подгруппа $B = G \cap B$ является $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенной в группу. Аналогично,

каждая $\mathfrak{F}$ -нормальная подгруппа $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложена в группу. Отметим, наконец, что каждая $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенная подгруппа является слабо $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$ -вложенной и всякая $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенная подгруппа является слабо $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенной.

Теперь рассмотрим следующий пример, в котором $\mathcal{U}$ – это класс всех свехразрешимых групп.

Пример 0.2. Пусть p, q – простые числа, где q делит $p-1$ и $\{p, q\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$. Пусть $H = Q \rtimes C_p$, где Q – простой $\mathbb{F}_q C_p$ -модуль, точный для C_p . Пусть $P = \mathbb{F}_p H$ -модуль, точный для H . Пусть $A = P \rtimes (Q \rtimes A_p)$. Группа PQ свехразрешима, поскольку q делит $p-1$, поэтому некоторая подгруппа Z группы P порядка p нормальна в PQ .

(1) Пусть $G = A \times A_4$, где A_4 – знакопеременная группа степени 4. Пусть $V = ZQ \times C_2$, где C_2 – подгруппа группы A_4 порядка 2. Тогда $V = AC_2 \cap ZQA_4$.

Пусть теперь $\sigma = \{\{p\}, \{q\}, \{2, 3\}, \{p, q, 2, 3\}'\}$. Тогда AC_2 σ -субнормальна в G и ZQA_4 $\mathcal{U}w$ -нормальна в G , но не $\mathcal{U}$ -нормальна, поскольку $(ZQB)^G = PQA_4$ и $(ZQA_4)_G = A_4$. Следовательно, $V = \mathcal{U}w \wedge \sigma$ -вложенная, но не $\mathcal{U} \wedge \sigma$ -вложенная в G подгруппа.

Наконец, покажем, что V не является ни σ -субнормальной, ни $\mathfrak{F}w$ -нормальной в G . Предположим, что V σ -субнормальна в G . Тогда $V \cap A = ZQ$ является σ -субнормальной и, следовательно, субнормальной в PQ . Но тогда $ZQ = ZQ^{PQ} = PQ$, противоречие. Следовательно, V не является σ -субнормальной в G . Аналогично, V не является $\mathcal{U}w$ -нормальной в G , поскольку $V^G / V_G = AA_4 / A \cong A_4$ не является свехразрешимой группой.

(2) Пусть $B = C_p \times C_q$ – неабелева группа порядка pq и $G = A \times B$ и пусть $H = ZC_q$.

Тогда $H = AC_q \cap LB$, где AC_q – $\mathcal{U}$ -нормальная в G подгруппа и LB субнормальна в G . Следовательно, H $\mathcal{U} \wedge \sigma$ -вложена в G , где $\sigma = \sigma^1$. Ясно, что $H_G = 1$ и $H^G = QB$, поэтому H не $\mathcal{U}$ -нормальна в G , так как главный фактор $Q/1$ в G не циклический. Отметим также, что подгруппа H не субнормальна в G [24, гл. А, лемма 14.1 (a)], поскольку $C_q = H \cap B$ не является субнормальной в B .

Приведенные выше наблюдения лежат в основе возможных приложений введенных нами понятий. И такие приложения уже найдены в классическом случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ [25].

В данной работе мы очень кратко анализируем общий случай.

1 Группы с обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта

Напомним, что группа Шмидта – это не-нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой nilпотентны. Хорошо известно что характер вложения подгрупп Шмидта в группу во многом определяет ее структуру.

Нашими первыми результатами являются следующие три теоремы, развивающие многие известные результаты и, в частности, развивающие соответствующие результаты работы [25].

Теорема 1.1 [26, теорема А]. *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G является $\mathfrak{F}_w \wedge \sigma$ -вложенной в G . Тогда*

- (i) G σ -разрешима в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\sigma$, и
- (ii) G является мета- σ -нильпотентной в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\sigma^2$.

Теорема 1.2. *Если G разрешима и каждая подгруппа Шмидта группы G $\mathfrak{N}_\sigma^2 \wedge \sigma$ -вложена в G , то G является мета- σ -нильпотентной.*

Следствие 1.3 (Семенчук [27]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G является субнормальной в G , то G метанильпотентна.*

Теорема 1.4 (см. теорему В в [26]). *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G является $\mathfrak{F} \wedge \sigma$ -вложенной в G , где $\mathfrak{F}$ – класс всех групп X с σ -нильпотентной производной подгруппой X' . Если G разрешима, то производная подгруппа G' группы G также σ -нильпотентна.*

Следствие 1.5 (Монахов, Княгина [28]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G является субнормальной в G , то производная подгруппа G' группы G nilпотентна.*

Напомним, что подгруппа M в G называется модулярной, если M – модулярный элемент (в смысле Куроша [23, 2, стр. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп в G , т. е.

- (i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и
- (ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Ввиду теоремы 5.2.5 из [23] каждая модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$ -нормальна в группе. Отсюда и из теоремы 1.4 получаем следующее

Следствие 1.6 (Близнец, Селькин [29]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G , то производная подгруппа G' группы G nilпотентна.*

2 Группы со слабо $\mathfrak{S}_w \wedge \sigma$ -вложенными подгруппами

Цепь подгрупп $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G называется максимальной, если

каждый ее член является максимальной подгруппой в следующем за ним членом этой цепи.

Теорема 2.1 [26, теорема С]. *Если в каждой максимальной цепи $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 слабо $\mathfrak{S}_w \wedge \sigma$ -вложена в G , то G σ -разрешима.*

Этот результат также покрывает многие известные результаты. В частности, имеют место следующие его следствия.

Следствие 2.2 (Го, Скиба [6]). *Если в каждой максимальной цепи $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 σ -субнормальна в G , то G σ -разрешима.*

Следствие 2.3 (Спенсер [31]). *Если в каждой максимальной цепи $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 субнормальна в G , то G разрешима.*

Следствие 2.4 (Шмидт [32]). *Группа G является разрешимой, если каждая ее 3-максимальная подгруппа модулярна в G .*

3 Усиление основных результатов теории S-перестановочных и σ -перестановочных подгрупп

Подгруппа H группы G называется S -перестановочной в G [33], [34], если H перестановочна с каждой силовой подгруппой P группы G , т. е. $HP = PH$. Подгруппа H группы G называется π -квазинормальной [35], [36] или π -перестановочной в G , если H перестановочна с каждой силовой p -подгруппой группы G для всех $p \in \pi$.

Основными результатами теории S -перестановочных и π -перестановочных подгрупп являются следующие теоремы.

Теорема 3.1 (Кегель [35]). *Если π -подгруппа H группы G π -перестановочна в G , тогда H субнормальна в G .*

Теорема 3.2 (Дескинз [36]). *Если подгруппа H группы G S -перестановочна в G , тогда секция H/H_G nilпотентна.*

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующий факт.

Теорема 3.3. *Если подгруппа H группы G S -перестановочна в G , тогда секция H^G/H_G nilпотентна.*

Теорема 3.4 (Кегель [35]). *Множество всех π -перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой в $\mathcal{L}(G)$.*

Теорема 3.5 (Айзекс [37]). *Если π -подгруппа H группы G π' -перестановочна в G , тогда H^G обладает nilпотентной холловой π' -подгруппой.*

Первые три результата были обобщены в рамках теории σ -свойств группы в работе [4],

которая явилась основной мотивацией к дальнейшему анализу результатов теории S -перестановочных и π -перестановочных подгрупп в рамках теории σ -свойств в работах [9], [38]. Существенным недостатком всех полученных в этом направлении результатов является то обстоятельство, что в классическом случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ все они не являются новыми и поэтому они ничего не дают для дальнейшего анализа и развития теории S -перестановочных и π -перестановочных подгрупп.

В данной работе мы обсуждаем идею, позволяющую устранить этот недостаток исследований [4], [9], [38].

Мы говорим, следуя [1], что подгруппа H группы G является:

(i) Π -полупроектором в G , если HN/N – максимальная Π -подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы N группы G .

(ii) Π -проектором в G , если H является Π -полупроектором в любой подгруппе группы G , содержащей H .

В случае, когда $\Pi = \{\sigma_i\}$ для некоторого i , мы применяем термин σ_i -полупроектор вместо $\{\sigma_i\}$ -полупроектор.

Определение 3.6. Мы говорим, что $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_t\}$ является Π -накрывающей системой подгрупп для H в G , если все элементы множества $\mathcal{X}$ являются σ -примарными подгруппами в G и для каждого $\sigma_i \in \sigma(H) \cap \Pi$ найдутся индекс j и σ_i -полупроектор U в H такие, что $U \leq X_j$.

Замечание 3.7. (1) Если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ и π – некоторое множество простых чисел, то всякая π -накрывающая система подгрупп $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_t\}$ для H в G состоит из примарных подгрупп группы G и для каждого $p \in \pi(H) \cap \pi$ найдутся индекс j и силовская p -подгруппа U в H такие, что $U \leq X_j$.

(2) Если силовская p -подгруппа P группы G перестановочна с подгруппой H группы G , то $H \cap P$ – силовская p -подгруппа в H и поэтому всякое множество $\mathcal{P}$ силовских подгрупп группы G , перестановочных с H , является π -накрывающей системой подгрупп для H в G при условии, что $\pi \subseteq \pi(\mathcal{P})$ и $\pi(H) \subseteq \pi$.

Теорема 3.8 [26, теорема D]. Пусть H – Π -подгруппа группы G и пусть $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_t\}$ – Π -накрывающая система подгрупп для H в G . Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{X}$ и $x \in E := (X_1 \cdots X_t)^G$, то подгруппа H является σ -субнормальной в G и $H^G \leq O_\Pi(G)$.

(ii) Кроме того, секция H/H_E является σ -нильпотентной.

Ввиду замечания 3.7, мы получаем из теоремы 3.8 следующие классические результаты.

Следствие 3.9 (Кегель [35]). Если π -подгруппа H группы G π -перестановочна в G , то H субнормальна в G .

Следствие 3.10 (Дескинз [36]). Если подгруппа H группы G S -перестановочна в G , то секция H/H_G nilьпотентна.

Следствие 3.11. Если подгруппа H группы G S -перестановочна в G , то секция H^G/H_G nilьпотентна.

Теперь, в качестве дальнейшей иллюстрации, мы даем еще три следствия теоремы 3.8 в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, которые являются развитием теорем 3.1 и 3.2 соответственно.

Следствие 3.12. Пусть H – π -подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1, \dots, p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i -подгруппа в H для всех $i = 1, \dots, t$. Если в G имеются такие примарные подгруппы $X_1, \dots, X_t$, что $P_i \leq X_i$ и H перестановочна с X_i^x для всех i и $x \in G$, то H субнормальна в G .

Следствие 3.13. Пусть H – подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1, \dots, p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i -подгруппа в H для всех $i = 1, \dots, t$. Если H перестановочна с P_i^x для всех i и $x \in G$, то H субнормальна в G .

Следствие 3.14. Пусть H – подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1, \dots, p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i -подгруппа в H для всех $i = 1, \dots, t$. Если в G имеются такие примарные подгруппы $X_1, \dots, X_t$, что $P_i \leq X_i$ и H перестановочна с X_i^x для всех i и $x \in G$, то секция H/H_E , где $E = (X_1 \cdots X_t)^G$, nilьпотентна.

В самом общем случае из теоремы 3.8 вытекает следующий новый результат теории σ -свойств конечной группы, усиливающий соответствующие наблюдения работ [4], [38].

Следствие 3.15. Пусть H – подгруппа в G и пусть $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ – полное холлово σ -множество в H . Если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{H}$ и $x \in G$, то подгруппа H является σ -субнормальной в G .

Наша следующая теорема является развитием основного результата работы [37].

Теорема 3.16 [26, теорема E]. Пусть H – Π -подгруппа группы G и пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_r\}$ – Π' -накрывающая система подгрупп для H^G в G . Если H^G является Π' -полной группой силового типа и $HY^x = Y^xH$ для всех $Y \in \mathcal{Y}$ и $x \in G$, то группа H^G обладает σ -нильпотентной холловой Π' -подгруппой.

Следствие 3.17 (Айзекс [37]). Если π -подгруппа H группы G π' -перестановочна в G , то H^G обладает нильпотентной холловой π' -подгруппой.

Следствие 3.18. Пусть H – π -подгруппа группы G и пусть $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r\}$ – π' -накрывающая система подгрупп для H^G в G . Если $HP^x = P^xH$ для всех $P \in \mathcal{P}$ и $x \in G$, то группа H^G обладает нильпотентной холловой π' -подгруппой.

Теорема 3.8 служит мотивацией для следующего нашего определения.

Определение 3.19. Мы говорим, что подгруппа H группы G является строго σ -субнормальной в G , если H^G/H_G – σ -нильпотентная группа.

Следующая теорема является развитием теоремы 3.4.

Теорема 3.20 [26, теорема F]. (i) Если подгруппа H является Π -полупроектором G , то множество всех сильно σ -субнормальных подгрупп группы G , перестановочных с H , образует подрешетку в решетке $\mathcal{L}(G)$.

(ii) Если H является Π -проектом G , то множество всех σ -субнормальных подгрупп группы G , перестановочных с H , образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Следствие 3.21 (Кегель [35]). Множество всех π -перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой в $\mathcal{L}(G)$.

Следствие 3.22 (Скиба [4]). Пусть G – σ -полная группа силовского типа. Тогда набор всех σ -перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку в решетке всех σ -субнормальных подгрупп группы G .

Теорема 3.20 позволяет получить и много новых результатов. В частности, из этой теоремы вытекают следующие факты.

Следствие 3.23. Если подгруппа H является холловой π -подгруппой G , то множество всех сильно субнормальных подгрупп группы G , перестановочных с H , образует подрешетку в решетке $\mathcal{L}(G)$.

Следствие 3.24. Если подгруппа H является холловой π -подгруппой G , то множество всех субнормальных подгрупп группы G , перестановочных с H , образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Следствие 3.25. Если подгруппа H является холловой Π -подгруппой G , то множество всех сильно σ -субнормальных подгрупп группы G , перестановочных с H , образует подрешетку в решетке $\mathcal{L}(G)$.

Следствие 3.25. Если подгруппа H является холловой Π -подгруппой G , то множество всех σ -субнормальных подгрупп группы G , перестановочных с H , образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
2. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
3. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
4. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
5. Wielandt, H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – № 45. – S. 200–244.
6. Beidleman, J.C. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.
7. Al-Sharo, K.A. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.
8. Hu, B. On finite groups with generalized σ -subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.
9. Murashka, V.I. On a generalization of the concept of S -permutable subgroup of a finite group / V.I. Murashka // Acta Math. Hung. – 2018. – Vol. 155, № 2. – P. 221–227.
10. Hu, B. Finite groups with only $\mathfrak{F}$ -normal and $\mathfrak{F}$ -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.
11. Guo, W. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – Vol. 62. – P. 1355–1372.
12. Skiba, A.N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.
13. On σ -subnormality criteria in finite σ -soluble groups / A. Ballester-Bolínches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4>.
14. On σ -subnormal subgroups of factorised finite groups / A. Ballester-Bolínches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – Vol. 559. – P. 195–202.
15. Yi, X. Finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560. – P. 181–191.
16. Kamornikov, S.F. On σ -subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.
17. Kamornikov, S.F. On σ -subnormal subgroups of finite $3'$ -groups / S.F. Kamornikov,

- V.N. Tyutyanov // *Ukrainian Math. J.* – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.
18. Hu, B. On the σ -nilpotent norm and the σ -nilpotent length of a finite group / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // *Glasgow Math. J.* – 2021. – Vol. 63, № 1. – P. 121–132. – DOI: <https://doi.org/10.1017/S0017089520000051>.
19. *G-covering subgroup systems for some classes of σ -soluble groups* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // *J. Algebra.* – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.
20. Hu, B. Finite groups with only $\mathfrak{F}$ -normal and $\mathfrak{F}$ -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // *J. Group Theory.* – 2019. – Vol. 22, № 5. – DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2018-0199>.
21. Chi, Z. On two sublattices of the subgroup lattice of a finite group / Z. Chi, A.N. Skiba // *J. Group Theory.* – 2019. – Vol. 22, № 6. – P. 1035–1047. – DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0039>.
22. Chi, Z. On a lattice characterization of finite soluble PST-groups / Z. Chi, A.N. Skiba // *Bull. Austral. Math. Soc.* – 2019. – Vol. 101, № 2. – P. 247–254. – DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972719000741>.
23. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
24. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
25. *A generalization of subnormality* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // *Mediterranean J. Math.* – In Press.
26. Safonova, I.N. On some new ideas and results of the theory of σ -properties of a finite group / I.N. Safonova, A.N. Skiba. – Preprint, 2020.
27. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$ -подгрупп / В.Н. Семенчук; в книге: Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.
28. Монахов, В.С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // *Сибирск. матем. ж.* – 2004. – Vol. 45, № 6. – С. 1316–1322.
29. Блинец, И.В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Блинец, В.М. Селькин // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2019. – № 4 (41). – P. 36–38.
30. Guo, W. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // *Science in China. Math.* – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.
31. Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // *Pacific J. Math.* – 1968. – № 27. – P. 167–173.
32. Schmid, R. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmid // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* – 1970. – № 34. – P. 115–125.
33. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010.
34. Ballester-Bolinches, A. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // *Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979). Illinois J. Math.* – 2003. – Vol. № 1–2. – P. 63–69.
35. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // *Math. Z.* – 1962. – № 78. – S. 205–221.
36. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // *Math. Z.* – 1963. – № 82. – P. 125–132.
37. Isaacs, I.M. Semipermutable π -subgroups / I.M. Isaacs // *Arch. Math.* – 2014. – № 102. – P. 1–6.
38. Guo, W. On Π -quasinormal subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // *Monatshefte für Mathematik.* – 2016. – Vol. 185, № 3. – P. 1–11. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-016-1007-9>.
- Исследования первого автора выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328), исследования второго автора поддержаны РФФИ и БРФИ в рамках научного проекта № Ф20Р-291.*

Поступила в редакцию 15.06.2021.