УДК 537.87

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SOME SOLUTIONS OF THE DISPERSION EQUATION FOR A MOVING BIISOTROPIC MEDIUM

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Получено дисперсионное уравнение для плоских монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в движущейся с постоянной скоростью биизотропной среде. В частных случаях распространения волны вдоль направления движения среды и противоположно ему найдены точные решения дисперсионного уравнения.

***Ключевые слова**: движущаяся биизотропная среда, материальные уравнения, уравнения Максвелла, показатель преломления, дисперсионное уравнение.*

The dispersion equation is obtained for plane monochromatic electromagnetic waves propagating in a biisotropic medium moving at a constant speed. Exact solutions of the dispersion equation are found in the case of wave propagation along or opposite to the medium motion direction.

***Keywords**: moving biisotropic medium, material equations, Maxwell equations, refractive index, dispersion equation.*

Введение

В настоящее время биизотропные и бианизотропные среды активно изучаются [1]–[3]. В данной статье мы обсуждаем распространение плоских монохроматических волн в движущейся биизотропной среде.

Пусть биизотропная среда движется в инерциальной системе отсчёта K с постоянной скоростью $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, задающий направление движения среды. Векторные величины, определённые в системе покоя среды K', будем обозначать штрихами, а в лабораторной системе отсчёта K – записывать без штрихов. В системе отсчёта K' материальные уравнения биизотропной среды в системе единиц Хевисайда – Лоренца имеют вид [1]–[4]

$$\boldsymbol{D}' = \varepsilon \boldsymbol{E}' + \xi \boldsymbol{H}';$$
$$\boldsymbol{B}' = \xi^* \boldsymbol{E}' + \mu \boldsymbol{H}';$$
$$\xi = \chi + i\alpha, \tag{0.1}$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно, χ – параметр Теллегена, α – киральный параметр, символом «$*$» обозначена операция комплексного сопряжения.

1 Материальные уравнения в случае движущейся среды

Представим материальные уравнения (0.1) в матричной форме, выражая векторы электрической индукции $\boldsymbol{D}'$ и магнитной напряжённости $\boldsymbol{H}'$ через векторы электрической напряжённости $\boldsymbol{E}'$ и магнитной индукции $\boldsymbol{B}'$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon - \dfrac{|\xi|^2}{\mu} & \dfrac{\xi}{\mu} \\ -\dfrac{\xi^*}{\mu} & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Законы преобразования векторов электромагнитного поля при переходе из лабораторной системы отсчёта в систему покоя имеют вид [5]

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma\boldsymbol{\tau}^\times \\ -\beta\gamma\boldsymbol{\tau}^\times & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma\boldsymbol{\tau}^\times \\ -\beta\gamma\boldsymbol{\tau}^\times & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

В формулах (1.2) использованы следующие обозначения: $\beta = V/c$, c – скорость электромагнитной волны в вакууме, $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$, $\Lambda = \gamma + (1-\gamma)(\boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\tau})$ – матрица размера 3×3, символом «$\circ$» обозначена операция тензорного произведения, $\boldsymbol{\tau}^\times$ – дуальный вектору $\boldsymbol{\tau}$ тензор, компоненты которого определяются в соответствии с выражением $\left(\boldsymbol{\tau}^\times\right)_{nm} = \varepsilon_{nkm}\tau_k$, где ε_{nkm} – компоненты псевдотензора Леви-Чивиты. Из уравнений (1.1) с учётом преобразований (1.2) получим материальные уравнения для движущейся в инерциальной системе отсчёта K биизотропной среды

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P & L \\ M & Q \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

где введены обозначения

$$P=\mu^{-1}\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2\right)\Lambda^2+\mu^{-1}\beta\gamma\left(\xi^*\boldsymbol{\tau}^\times\Lambda-\xi\Lambda\boldsymbol{\tau}^\times\right)+$$
$$+\mu^{-1}\beta^2\gamma^2\boldsymbol{\tau}^\times\boldsymbol{\tau}^\times;$$
$$L=\mu^{-1}\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2\right)\beta\gamma\Lambda\boldsymbol{\tau}^\times+$$
$$+\mu^{-1}\beta^2\gamma^2\xi^*\boldsymbol{\tau}^\times\boldsymbol{\tau}^\times+\mu^{-1}\xi\Lambda^2-\mu^{-1}\beta\gamma\boldsymbol{\tau}^\times\Lambda; \tag{1.4}$$
$$M=\mu^{-1}\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2\right)\beta\gamma\boldsymbol{\tau}^\times\Lambda-\mu^{-1}\beta^2\gamma^2\xi\boldsymbol{\tau}^\times\boldsymbol{\tau}^\times-$$
$$-\mu^{-1}\xi^*\Lambda^2-\mu^{-1}\beta\gamma\Lambda\boldsymbol{\tau}^\times;$$
$$Q=\mu^{-1}\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2\right)\beta^2\gamma^2\boldsymbol{\tau}^\times\boldsymbol{\tau}^\times+$$
$$+\mu^{-1}\beta\gamma\left(\xi\boldsymbol{\tau}^\times\Lambda-\xi^*\Lambda\boldsymbol{\tau}^\times\right)+\mu^{-1}\Lambda^2.$$

Материальные уравнения (1.3) содержат шестимерные векторы и матрицу размера 6×6, состоящую из блоков – матриц P, L, M, Q размера 3×3. Учитывая свойства матриц Λ и $\boldsymbol{\tau}^\times$:

$$\boldsymbol{\tau}^\times\Lambda=\Lambda\boldsymbol{\tau}^\times=\gamma\boldsymbol{\tau}^\times;$$
$$\boldsymbol{\tau}^\times\boldsymbol{\tau}^\times=\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}-1;$$
$$\Lambda^2=\gamma^2\left(1-\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})\right), \tag{1.5}$$

представим выражения (1.4) в более удобном для дальнейших вычислений виде

$$P=\mu^{-1}\gamma^2\times \tag{1.6}$$
$$\times\left[\varepsilon\mu-|\xi|^2-\beta^2-\beta^2\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})-2i\alpha\beta\boldsymbol{\tau}^\times\right];$$
$$L=\mu^{-1}\gamma^2\times$$
$$\times\left[\xi-\beta^2\xi^*-2i\alpha\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})+\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)\beta\boldsymbol{\tau}^\times\right];$$
$$M=\mu^{-1}\gamma^2\times$$
$$\times\left[\beta^2\xi-\xi^*-2i\alpha\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})+\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)\beta\boldsymbol{\tau}^\times\right];$$
$$Q=\mu^{-1}\gamma^2\times$$
$$\times\left[1-\beta^2\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2\right)+\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})+2i\alpha\beta\boldsymbol{\tau}^\times\right].$$

Нетрудно видеть, что матрицы P, L, M, Q удовлетворяют условиям

$$P^+=P,\;\; Q^+=Q,\;\; L^+=-M,$$

где знаком «$+$» обозначена операция эрмитова сопряжения.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением плоских монохроматических волн

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_0\\ \boldsymbol{H}_0\end{bmatrix}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t);$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_0\\ \boldsymbol{B}_0\end{bmatrix}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t). \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.7) в уравнения Максвелла без источников, получим алгебраические уравнения

$$n_0(i\,\boldsymbol{n})^\times\boldsymbol{H}=-i\boldsymbol{D};\quad n_0(i\,\boldsymbol{n})^\times\boldsymbol{E}=i\boldsymbol{B}, \tag{1.8}$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=0;\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{1.9}$$

в которых единичный вектор $\boldsymbol{n}$ связан с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ по формуле

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\,\omega n_0/c$$

и для показателя преломления введено обозначение n_0.

Исключая с учётом уравнений (1.8) векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ из системы уравнений (1.3), а затем исключая и вектор $\boldsymbol{H}$, получим следующее алгебраическое уравнение для вектора $\boldsymbol{E}$:

$$\Big[P-in_0L(i\boldsymbol{n}^\times)-in_0(i\boldsymbol{n}^\times)M-$$
$$-n_0^2(i\boldsymbol{n}^\times)Q(i\boldsymbol{n}^\times)\Big]\boldsymbol{E}=0. \tag{1.10}$$

Используя (1.3), исключим вектор $\boldsymbol{D}$ из первого уравнения (1.9), в результате получим

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(P\boldsymbol{E}+L\boldsymbol{B}\right)=0;$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{1.11}$$

В дальнейшем уравнения (1.11) нам понадобятся для упрощения процедуры нахождения собственных значений показателя преломления.

Из (1.10) следует, что дисперсионное уравнение для величины n_0 имеет форму:

$$\det\Big[P-in_0L(i\boldsymbol{n}^\times)-in_0(i\boldsymbol{n}^\times)M-$$
$$-n_0^2(i\boldsymbol{n}^\times)Q(i\boldsymbol{n}^\times)\Big]=0. \tag{1.12}$$

Решение алгебраического уравнения (1.12) в случае произвольного направления распространения волны относительно направления движения среды – весьма громоздкая задача, поэтому в данной работе мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев.

2 Распространение волн вдоль и против направления движения среды

Пусть волновой вектор $\boldsymbol{k}$ распространяющейся волны и вектор скорости движения среды $\boldsymbol{V}$ коллинеарны. При этом мы будем полагать, что $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}$. В этом случае из выражений (1.6) следуют формулы для матриц –

$$P=\mu^{-1}\gamma^2\times$$
$$\times\left[\varepsilon\mu-|\xi|^2-\beta^2-\beta^2\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)(\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{n})-2i\alpha\beta\boldsymbol{n}^\times\right];$$
$$L(i\boldsymbol{n}^\times)=\mu^{-1}\gamma^2\times \tag{2.1}$$
$$\times\left[\left(\xi-\beta^2\xi^*\right)(i\boldsymbol{n}^\times)-i\beta\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)(1-\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{n})\right];$$
$$(i\boldsymbol{n}^\times)M=\mu^{-1}\gamma^2\times$$
$$\times\left[\left(\beta^2\xi-\xi^*\right)(i\boldsymbol{n}^\times)-i\beta\left(\varepsilon\mu-|\xi|^2-1\right)(1-\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{n})\right];$$
$$(i\boldsymbol{n}^\times)Q(i\boldsymbol{n}^\times)=\mu^{-1}\gamma^2\times$$
$$\times\left[\left(1-\beta^2(\varepsilon\mu-|\xi|^2)\right)(1-\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{n})+2\alpha\beta(i\boldsymbol{n}^\times)\right],$$

а также выражения для векторов

$$\boldsymbol{n}P=\mu^{-1}\left(\mu\varepsilon-|\xi|^2\right)\boldsymbol{n};$$
$$\boldsymbol{n}L=\mu^{-1}\gamma^2\left[\xi-\beta^2\xi^*-2i\alpha\beta\right]\boldsymbol{n}. \tag{2.2}$$

Учитывая (2.2) в уравнениях (1.11), получим условие ортогональности

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=0. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) и структура входящих в уравнение (1.10) матриц (2.1) определяют возможность нахождения собственных значений величины n_0 не в результате прямого решения дисперсионного уравнения (1.12), а с использованием метода, посредством которого удаётся упростить задачу. Для этого рассмотрим следующее вспомогательное равенство [6]:

$$(i\boldsymbol{n}^{\times})\boldsymbol{E} = \lambda \boldsymbol{E}, \tag{2.4}$$

которое по сути является формулировкой задачи на собственные значения λ для матрицы $i\boldsymbol{n}^{\times}$. Найдём эти значения. Умножая (2.4) слева на $i\boldsymbol{n}^{\times}$ и выполнив в правой части полученного таким образом равенства замену по формуле (2.4), приведём его к виду

$$(i\boldsymbol{n}^{\times})(i\boldsymbol{n}^{\times})\boldsymbol{E} = \lambda^2 \boldsymbol{E}. \tag{2.5}$$

С учётом второй из формул (1.5) и условия ортогональности векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{E}$ (2.3) преобразуем (2.5) к следующему виду:

$$(1-\lambda^2)\boldsymbol{E} = 0,$$

откуда следует, что $\lambda = \pm 1$.

Учитывая условие ортогональности (2.3), можно исключить из формул (2.1) слагаемые, содержащие матрицу $\boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{n}$, так как при подстановке (2.1) в уравнение (1.10) эти слагаемые обусловливают появление скалярного произведения $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}$. Учитывая равенство (2.4), заменим в (2.1) матрицы $i\boldsymbol{n}^{\times}$ величиной λ. С учётом этих преобразований представим уравнение (1.10) в виде

$$\begin{gathered}\Big[\varepsilon\mu - |\xi|^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\lambda + \\ +2n_0\left(\alpha(1+\beta^2)\lambda - \beta(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1)\right) - \\ -n_0^2\left(1 - \beta^2(\varepsilon\mu - |\xi|^2) + 2\alpha\beta\lambda\right)\Big]\boldsymbol{E} = 0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) содержит только единичную матрицу, поэтому задача о нахождении собственных значений величины n_0 теперь состоит в решении квадратного уравнения, получаемого приравниванием к нулю множителя при $\boldsymbol{E}$ в (2.6). Для упрощения решения этого уравнения введём обозначения [7]

$$\begin{gathered} n_+ = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \alpha; \\ n_- = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} - \alpha. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Величины, определённые по формулам (2.7), являются показателями преломления неподвижной биизотропной среды, в которой распространяется плоская монохроматическая волна – правоциркулярно поляризованная и левоциркулярно поляризованная соответственно. Из (2.7) следуют выражения

$$\begin{gathered} n_+ n_- = \varepsilon\mu - |\xi|^2; \\ n_+ - n_- = 2\alpha. \end{gathered} \tag{2.8}$$

С учётом (2.8) уравнение для n_0 запишем в форме

$$\begin{gathered}(n_+ + \lambda\beta)(n_- - \lambda\beta) - \\ -n_0\left((\beta n_+ + \lambda)(n_- - \lambda\beta) + (\beta n_- - \lambda)(n_+ + \lambda\beta)\right) + \\ +n_0^2(\beta n_+ + \lambda)(\beta n_- - \lambda) = 0.\end{gathered}$$

Решения этого уравнения представим в виде

$$\begin{gathered} n_{0(+)}^{(\lambda)}(\beta) = \frac{n_+ + \lambda\beta}{\beta n_+ + \lambda}; \\ n_{0(-)}^{(\lambda)}(\beta) = \frac{n_- - \lambda\beta}{\beta n_- - \lambda}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

После подстановки в (2.9) значений $\lambda = \pm 1$ получим четыре выражения для показателя преломления в лабораторной системе отсчёта K:

$$\begin{gathered} n_{0(+)}^{(+)}(\beta) = \frac{n_+ + \beta}{\beta n_+ + 1}; \quad n_{0(+)}^{(-)}(\beta) = \frac{n_+ - \beta}{\beta n_+ - 1}; \\ n_{0(-)}^{(-)}(\beta) = \frac{n_- + \beta}{\beta n_- + 1}; \quad n_{0(-)}^{(+)}(\beta) = \frac{n_- - \beta}{\beta n_- - 1}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Из формул (2.10) видно, что они попарно связаны между собой равенствами

$$\begin{gathered} n_{0(+)}^{(+)}(\beta) = -n_{0(+)}^{(-)}(-\beta); \\ n_{0(-)}^{(+)}(\beta) = -n_{0(-)}^{(-)}(-\beta). \end{gathered}$$

Величины $n_{0(+)}^{(+)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(-)}(\beta)$ положительно определены, а знак величин $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ может меняться в зависимости от значения параметра β. Далее произведём анализ показателей преломления (2.10) и их трансформацию при переходе в покоящуюся систему отсчёта.

3 Анализ показателей преломления

При переходе из лабораторной системы отсчёта K в покоящуюся K' величины $n_{0(+)}^{(+)}(\beta)$ и $n_{0(-)}^{(-)}(\beta)$ преобразуются в показатели преломления n_+ и n_- соответственно. Так как все эти четыре величины положительны, то в обеих системах отсчёта волны распространяются вдоль направления движения среды.

Величины $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ и $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ при переходе в покоящуюся систему отсчёта становятся равными $-n_+$ и $-n_-$ соответственно, т. е. электромагнитные волны распространяются против направления движения среды в этой системе отсчёта.

Обсудим теперь, как будут распространятся эти волны в лабораторной системе отсчёта. При этом будем полагать, что $n_\pm > 1$.

Рассмотрим четыре случая:

1) $\beta < 1/n_\pm$ $\left(V < c/n_\pm\right)$. При таких значениях β величины $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ отрицательны. Таким образом, в лабораторной системе отсчёта волны будут распространяться против направления движения среды;

2) $\beta > 1/n_\pm$ $\left(V > c/n_\pm\right)$. В этом случае величины $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ положительны и

соответствующие волны распространяются вдоль направления движения среды в лабораторной системе отсчёта;

3) $\beta = 1/n_{\pm}$ $(V = c/n_{\pm}$ – фазовая скорость волны в системе покоя). При таком значении β волна будет «покоиться» в лабораторной системе отсчёта;

4) $1/n_{+} < \beta < 1/n_{-}$ $\left(c/n_{+} < V < c/n_{-}\right)$. В случае таких значений β величина $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ положительна, а величина $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ отрицательна, т. е. в лабораторной системе отсчёта правоциркулярно поляризованная волна распространяется вдоль направления движения среды, а левоциркулярно поляризованная – противоположно.

Отметим, что выводы, аналогичные первым трём, могут быть сделаны и при анализе формулы (7.8) для $\vartheta = 0$, приведенной в работе [8] для описания движущейся изотропной среды. Четвёртый вывод не применим в случае изотропной среды.

Заключение

Таким образом, в данной работе получено дисперсионное уравнение для описания распространения плоской монохроматической волны в движущейся биизотропной среде в произвольном направлении относительно направления движения среды. Точные решения дисперсионного уравнения (показатели преломления) найдены в частных случаях: когда волновой вектор направлен вдоль направления движения биизотропной среды и противоположно ему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aladadi*, *Y.T.* Classification and characterization of electromagnetic materials / Y.T. Aladadi, M.A.S. Alkanhal // Scientific Reports. – 2020. – Vol. 10, № 11406. – P. 1–11.

2. *Tanisli*, *M.* Octonionic Maxwell's equations for bi-isotropic media / M. Tanisli, M.E. Kansu // Journal of Mathematical Physics. – 2011. – Vol. 52, № 5. – P. 053511.

3. *Иванов*, *О.В.* Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 262 с.

4. *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media* / I.V. Lindell [et. al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.

5. *Теоретическая физика*: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 4-е изд. – Москва: Физматлит, 2005. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – 656 с.

6. *Годлевская*, *А.Н.* Волновые функции фотона в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 1989. – Т. 66, № 4. – С. 830–834.

7. *Капшай*, *В.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.

8. *Болотовский*, *Б.М.* Современное состояние электродинамики движущихся сред (Безграничные среды) / Б.М. Болотовский, С.Н. Столяров // УФН. – 1974. – Т. 114, Вып. 4. – С. 569–608.

Поступила в редакцию 29.04.2021.