УДК 539.12

СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ ПОЛЯ СО СПИНОМ 2, МАССИВНЫЙ И БЕЗМАССОВЫЙ СЛУЧАИ

А.В. Бурый[1], А.В. Ивашкевич[1], Е.М. Овсиюк[2], В.М. Редьков[1]

[1]*Институт физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси*
[2]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина*

THE STRUCTURE OF THE PLANE WAVES FOR SPIN 2 FIELD, MASSIVE AND MASSLESS CASES

A.V. Buryy[1], A.V. Ivashkevich[1], E.M. Ovsiyuk[2], V.M. Red'kov[1]

[1]*B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus*
[2]*I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University*

Изложена общая теория для поля со спином 2 на основе 30-компонентной системы уравнений первого порядка Федорова – Редже. В результате исключения в этих уравнениях дополнительных вектора и тензора третьего ранга выведены уравнения второго порядка Паули – Фирца для скаляра и симметричного тензора. Детально проанализирован предельный переход к безмассовому пределу; исследована имеющаяся согласно анализу Паули – Фирца калибровочная симметрия. В явном виде построены решения в виде плоских волн для массивной частицы, которые соответствуют пяти линейно независимым состояниям. В случае безмассового поля найдены 6 независимых решений и показано, что четыре из них являются калибровочными и, следовательно, могут быть исключены как нефизические. Два независимых решения, которые не содержат калибровочных степеней свободы, найдены в явном виде.

Ключевые слова: *поле спина* 2, *уравнение второго порядка Паули – Фирца*, *уравнение первого порядка Федорова – Редже*, *плоские волны*, *независимые решения*, *безмассовая частица*, *устранение калибровочных степеней свободы*.

A general theory for a field with spin 2 based on the 30-component system of first-order Fedorov – Regge equations is presented. As a result of the elimination of the additional vector and the third-rank tensor in these equations, the Pauli – Fierz second-order equations for the scalar and symmetric tensor are derived. Transition to the massless limit is analyzed in detail; the gauge symmetry available according to the Pauli – Fierz analysis is investigated. There are explicitly constructed solutions in the form of plane waves for a massive particle, which correspond to five linearly independent states. In the case of a massless field, 6 independent solutions are found, and it is shown that four of them are gauge ones and, therefore, can be excluded as nonphysical. Two independent solutions that do not contain gauge degrees of freedom are found explicitly.

Keywords: *spin* 2 *field*, *second order equation by Pauli – Fierz*, *first order equation by Fedorov – Regge*, *plane waves*, *linearly independent solutions*, *massless particle*, *exclusion of the gauge degrees of freedom*.

Введение

Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1], [2], всегда присутствовала в литературе [3]–[21]; см. также в [22]–[25]. Большая часть работ выполнена в рамках формализма уравнений второго порядка. Известно, что много сложностей в теории частиц с высшими спинами возникает из-за так называемой неоднозначности порядка написания производных. Также известно, что с такого рода неоднозначностями можно справиться, если с самого начала использовать формализм уравнений первого порядка.

По-видимому, первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф.И. Федоровым [7]. Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной волновой функции. Позднее это описание было заново переоткрыто и дополнительно исследовано в работе Т. Редже [15]. Наиболее известным в теории поля со спином 2 является подход Паули – Фирца. Он основан на системе уравнений 2-го порядка для симметричного спинора 2-ранга. Подход, развитый значительно позже, основан на общей теории релятивистских волновых уравнений 1-го порядка; при этом для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, при этом все свойства симметрии тензоров вместе с условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане.

Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные степени свободы не должны давать вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные.

В массивном случае возникают известные трудности при рассмотрении частицы со спином 2 в присутствие внешних электромагнитных полей. Они выражаются в том, что возникают аномальные решения, относящиеся к частицам, двигающимся в пространстве со скоростями больше, чем скорость света. Дополнительных трудностей в теории частицы со спином 2 можно ожидать при учете внешних гравитационных полей, описываемых в рамках общей теории относительности. Здесь особенно существенным является выбор исходного формализма в пространстве Минковского, который затем обобщается на общековариантный случай. Это касается как возникновения новых аномальных решений в массивном случае, так и проблем с калибровочными степенями свободы.

В настоящей работе изложена общая теория для поля со спином 2 на основе уравнений первого порядка Федорова – Редже. В результате исключения в этих уравнениях дополнительных вектора и тензора третьего ранга выведены уравнения второго порядка Паули – Фирца для скаляра и симметричного тензора. Детально проанализирован предельный переход к безмассовому пределу; исследована имеющаяся здесь калибровочная симметрия. В явном виде построены решения в виде плоских волн для массивной частицы, которые соответствуют пяти линейно независимым состояниям. В случае безмассовой частицы найдены 6 независимых решений и показано, что четыре из них являются калибровочными. Два независимых решения, которые не содержат калибровочных степеней свободы, найдены в явном виде.

1 30-компонентная система уравнений

Будем исходить из системы уравнений первого порядка для массивной частицы со спином 2 в следующем виде:

$$A\partial^a \Phi_a = m\Phi, \qquad (1.1)$$

$$C\partial_a \Phi + B\,\partial^b \Phi_{ab} = m\Phi_a, \qquad (1.2)$$

$$E\left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_{[kn]}{}^n\right) + N\left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_k\right) = m\Phi_{(ab)}, \qquad (1.3)$$

$$F\left[\partial_a \Phi_{(bc)} - \partial_b \Phi_{(ac)} + \frac{1}{3}\left(g_{bc}\partial^k \Phi_{(ak)} - g_{ac}\partial^k \Phi_{(bk)}\right)\right] = m\Phi_{[ab]c}, \qquad (1.4)$$

где $A, B, \ldots$ – некоторые постоянные; их зафиксируем ниже, накладывая требование получить из (1.1)–(1.4) систему уравнений второго порядка, предложенную Паули и Фирцем. Круглые скобки при индексах обозначают симметричность, квадратные скобки – антисимметричность. Используется метрический тензор с сигнатурой $(+,-,-,-)$.

Из уравнения (1.3) следуют симметричность и неприводимость тензора 2-го ранга Φ_{ab}:

$$\Phi_{(ab)} = +\Phi_{(ba)}, \quad g^{ab}\Phi_{(ab)} = \Phi^a_a = 0. \qquad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что тензор третьего ранга антисимметричен по первым двум индексам:

$$\Phi_{[ab]c} = -\Phi_{[ba]c}.$$

Сворачивая в уравнении (1.4) индексы b и c и учитывая (1.5), получаем условие неприводимости тензора третьего ранга к тензору первого ранга: $\Phi_{[ab]}{}^b = 0$. Наконец, используя уравнение (1.4), находим еще одно условие для тензора третьего ранга:

$$\Phi_{[ab]c} + \Phi_{[bc]a} + \Phi_{[ca]b} = 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon^{kabc}\Phi_{abc} = 0.$$

Общее число независимых компонент в наборе тензоров $\Phi, \Phi_a, \Phi_{(ab)}, \Phi_{[ab]c}$ равно тридцати:

$$\Phi(x) \Rightarrow 1, \;\; \Phi_a \Rightarrow 4, \;\; \Phi_{(ab)} \Rightarrow (10-1) = 9,$$

$$\Phi_{[ab]c} \Rightarrow 6\times 4 - 4 - 4 = 16.$$

Без ограничения общности можно положить A и F равными единице; тем самым параметр A переносим в свободу в выборе величины C, а параметр F – в свободу выбора величины E.

В соответствие с этим дальше будем исследовать уравнения

$$\partial^a \Phi_a = m\Phi, \qquad (1.6)$$

$$C\partial_a \Phi + B\partial^b \Phi_{(ab)} = m\Phi_a, \qquad (1.7)$$

$$E\left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a}\right) + N\left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \Phi_k\right) = m\Phi_{(ab)}, \qquad (1.8)$$

$$\partial_a \Phi_{(bc)} - \partial_b \Phi_{(ac)} + \frac{1}{3}\left(g_{bc}\partial^k \Phi_{(ak)} - g_{ac}\partial^k \Phi_{(bk)}\right) = m\Phi_{[ab]c}. \qquad (1.9)$$

При этом можно учитывать условия, являющиеся следствиями исходной системы (1.1)–(1.4):

$$\Phi_{(ab)} = +\Phi_{(ba)}, \;\; \Phi^a_a = 0, \;\; \Phi_{[ab]c} = -\Phi_{[ba]c},$$

$$\Phi_{[ab]}{}^b = 0, \;\; \Phi_{[ab]c} + \Phi_{[bc]a} + \Phi_{[ca]b} = 0.$$

Исключая из (1.6)–(1.9) векторную и (третьего ранга) тензорную функции, будем находить уравнения для полей Φ и $\Phi_{(ab)}$. Для этого сначала, воспользовавшись (1.7) и (1.9), получим выражения для двух членов из уравнения (1.8):

$$E\left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a}\right) = \frac{-E}{m}\left[\frac{4}{3}\left(\partial_a \partial^k \Phi_{(kb)} + \partial_b \partial^k \Phi_{(ka)}\right) - 2\partial^k \partial_k \Phi_{(ab)} - \frac{2}{3} g_{ab}\partial^k \partial^n \Phi_{(kn)}\right],$$

$$N\left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \Phi_k\right) = \frac{N}{m}\left[2C\left(\partial_a \partial_b - \frac{1}{4} g_{ab}\partial^k \partial_k\right)\Phi + \right.$$

$$+B\left[\partial_a\partial^k\Phi_{(kb)}+\partial_b\partial^k\Phi_{(ka)}-\frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)\Bigg].$$

С учетом чего уравнение (1.8) принимает вид (вводим обозначение $\Box=\partial^k\partial_k$)

$$2CN\left(\partial_a\partial_b-\frac{1}{4}\Box g_{ab}\right)\Phi+2E\Box\Phi_{(ab)}+\left(NB-\frac{4}{3}E\right)\times$$
$$\times\left(\partial_a\partial^k\Phi_{(kb)}+\partial_b\partial^k\Phi_{(ka)}-\frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)= \qquad (1.10)$$
$$=m^2\Phi_{(ab)}.$$

Аналогично из уравнения (1.6), учитывая (1.7), находим

$$C\Box\Phi+B\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}=m^2\Phi. \qquad (1.11)$$

Таким образом, получены уравнения 2-го порядка (1.10) и (1.11), содержащие скаляр и симметричный тензор.

Найдем условия, ограничивающие выбор параметров B, C, E, N. Для этого подействуем на уравнение (1.10) оператором ∂^b, в результате приходим к

$$\frac{3}{2}CN\partial_a\Box\Phi+\frac{1}{2}\left(NB-\frac{4}{3}E\right)\partial_a\partial^b\partial^k\Phi_{(bk)}+$$
$$+\left(NB+\frac{2}{3}E\right)\Box\partial^k\Phi_{(ka)}=m^2\partial^b\Phi_{(ab)}. \qquad (1.12)$$

Потребуем выполнения равенства

$$NB+\frac{2}{3}E=0,$$

тогда (1.12) примет вид

$$\partial_a\left(\frac{3}{2}CN\Box\Phi-E\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)=m^2\partial^k\Phi_{(ka)}. \qquad (1.13)$$

Теперь обратимся к уравнению (1.11). Действуя на обе его части оператором ∂_a, получаем

$$\partial_a\left(C\Box\Phi+B\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)=m^2\partial_a\Phi. \qquad (1.14)$$

Потребуем, чтобы параметры удовлетворяли условиям

$$C=\mu^{-1}\frac{3}{2}CN,\ \ B=-\mu^{-1}E,$$

тогда (1.14) можно представить так:

$$\partial_a\left(\frac{3}{2}CN\Box\Phi-E\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)=\mu m^2\partial_a\Phi. \qquad (1.15)$$

Левые части равенств (1.13) и (1.15) совпадают, соответственно равны и правые:

$$\partial^k\Phi_{kl}=\mu\partial_l\Phi. \qquad (1.16)$$

Действуя на обе части равенства (1.16) оператором ∂^l, получаем

$$\mu\Box\Phi-\partial^k\partial^l\Phi_{(kl)}=0. \qquad (1.17)$$

Сопоставим это равенство с уравнением (1.11), записанным в виде

$$-B\left(-\frac{C}{B}\Box\Phi-\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)=m^2\Phi. \qquad (1.18)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\mu=-C/B.$$

Тогда из (1.17) и (1.18) следует равенство нулю скалярного поля Φ:

$$\Phi=0. \qquad (1.19)$$

При этом из (1.16) получаем условие на тензорное поле $\Phi_{(ab)}$:

$$\partial^k\Phi_{(ka)}=0. \qquad (1.20)$$

Остается убедиться, что наложенным на свободные параметры условиям можно удовлетворить. Соберем их вместе:

$$NB+\frac{2}{3}E=0,\ \ C=\mu^{-1}\frac{3}{2}CN,$$
$$B=-\mu^{-1}E,\ \ \mu=-\frac{C}{B}. \qquad (1.21)$$

Из (1.21) получаем

$$\mu=\frac{3}{2}N,\ \ C=E=-\frac{3}{2}NB. \qquad (1.22)$$

Если выбрать решение уравнений (1.22) в виде

$$C=E=1/2,\ \ N=1,\ \ B=-1/3, \qquad (1.23)$$

то система уравнений (1.10), (1.11) принимает вид

$$\left(\partial_a\partial_b-\frac{1}{4}g_{ab}\Box\right)\Phi+\left(\Box-m^2\right)\Phi_{(ab)}-$$
$$-\left(\partial_a\partial^k\Phi_{(kb)}+\partial_b\partial^k\Phi_{(ka)}-\frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}\right)=0, \qquad (1.24)$$

$$\left(\frac{1}{2}\Box-m^2\right)\Phi-\frac{1}{3}\partial^k\partial^n\Phi_{(kn)}=0; \qquad (1.25)$$

они совпадают (с точностью до замены обозначений) с уравнениями, приведенными в работе Паули – Фирца. При учете условий (1.19) и (1.20) из системы уравнений (1.24)–(1.25) получаем

$$\Phi=0,\quad (\Box+M^2)\Phi_{(ab)}=0, \qquad (1.26)$$

$$\Phi_{(ab)}=\Phi_{(ba)},\quad \Phi^a{}_a=0,\quad \partial^k\Phi_{(ka)}=0. \qquad (1.27)$$

С учетом равенств (1.23) исходная система первого порядка (1.6)–(1.9) примет вид

$$\partial^a\Phi_a=m\Phi, \qquad (1.28)$$

$$\frac{1}{2}\partial_a\Phi-\frac{1}{3}\partial^b\Phi_{(ab)}=m\Phi_a, \qquad (1.29)$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial^k\Phi_{[ka]b}+\partial^k\Phi_{[kb]a}-\frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\Phi_{[kn]}{}^n\right)+$$
$$+\left(\partial_a\Phi_b+\partial_b\Phi_a-\frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\Phi_k\right)=m\Phi_{(ab)}, \qquad (1.30)$$

$$\partial_a\Phi_{(bc)}-\partial_b\Phi_{(ac)}+$$
$$+\frac{1}{3}\left(g_{bc}\partial^k\Phi_{(ak)}-g_{ac}\partial^k\Phi_{(bk)}\right)=m\Phi_{[ab]c}, \qquad (1.31)$$

$$m=iM.$$

Будем рассматривать систему (1.28)–(1.31) как основную для теории частицы со спином 2. Уравнения второго порядка (1.26)–(1.27) могут рассматриваться как производные, поскольку они следуют из (1.28)–(1.31). Отметим, что включение в эту систему скалярного поля Φ лишнее, скалярное поле обращается в нуль только в случае свободной частицы.

2 Плоские волны, массивный случай

Обратимся к построению решений в виде плоских волн для уравнений (1.26)–(1.27):

$$(\Box + M^2)\Phi_{(ab)} = 0, \qquad (2.1)$$

$$\Phi^a{}_a = 0, \ \partial^n \Phi_{(an)} = 0. \qquad (2.2)$$

Подстановка для волновой функции имеет вид (учитываем симметричность тензора)

$$[\Phi_{ab}(x)] = e^{-ik_n x^n} \begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = \qquad (2.3)$$

$$= e^{-ik_n x^n} \begin{vmatrix} f_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & f_1 & c_3 & c_2 \\ d_2 & c_3 & f_2 & c_1 \\ d_3 & c_2 & c_1 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Дополнительные условия (2.2) дают

$$f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} = 0,$$
$$f_{00}k^0 + f_{01}k^1 + f_{02}k^2 + f_{03}k^3 = 0,$$
$$f_{10}k^0 + f_{11}k^1 + f_{12}k^2 + f_{13}k^3 = 0,$$
$$f_{20}k^0 + f_{21}k^1 + f_{22}k^2 + f^{23}k_3 = 0,$$
$$f_{30}k^0 + f_{31}k^1 + f_{32}k^2 + f_{33}k^3 = 0;$$

с учетом обозначений из (2.3) они записываются в виде:

$$f_0 = f_1 + f_2 + f_3,$$
$$f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3 = 0,$$
$$d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_3 k^2 + c_2 k^3 = 0, \qquad (2.4)$$
$$d_2 k^0 + c_3 k^1 + f_2 k^2 + c_1 k^3 = 0,$$
$$d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_1 k^2 + f_3 k^3 = 0.$$

Основное уравнение (2.1) приводит к условию связи между энергией и импульсом:

$$k_0^2 = M^2 + k^j k^j = M^2 + k_j k_j .$$

Таким образом, имеем 5 уравнений для 10 переменных $f_{(ab)} = \{f_0, f_i, c_i, d_i\}$. Найдем явный вид независимых решений системы (2.4). Для этого в уравнениях перенесем вправо переменные f_1, f_2, f_3, c_3, d_3 (одновременно опуская все индексы вниз); в результате получим неоднородную систему уравнений относительно f_0, c_1, c_2, d_1, d_2:

$$f_0 = f_1 + f_2 + f_3, \ k_0 f_0 - k_1 d_1 - k_2 d_2 = d_3 k_3,$$
$$k_0 d_1 - k_3 c_2 - k_2 c_3 = f_1 k_1, \ k_0 d_2 - k_1 c_3 = f_2 k_2 + c_1 k_3,$$
$$-c_2 k_1 = c_1 k_2 + f_3 k_3 - d_3 k_0.$$

В матричной форме ее можно записать так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_0 & 0 & 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & -k_2 & k_0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_0 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 + f_2 + f_3 \\ d_3 k_3 \\ f_1 k_1 \\ f_2 k_2 + c_1 k_3 \\ c_1 k_2 + f_3 k_3 - d_3 k_0 \end{vmatrix},$$

$$Ax = y.$$

Убеждаемся, что основной определитель системы отличен от нуля: $\det A = -2k_0 k_1^2 k_2 \equiv D^{-1}$. Решение строится на основе формулы $x_i = D \det A_i$, $i = 1, ..., 5$; в явном виде оно имеет вид

$$f_0 = -2D\left(f_1 + f_2 + f_3\right) k_0 k_1^2 k_2,$$
$$c_2 = 2k_0 k_1 k_2 D\left(c_1 k_2 - d_3 k_0 + f_3 k_3\right),$$
$$c_3 = -k_0 k_1 D\Big[-2d_3 k_3 k_0 + f_3 k_0^2 + f_3 k_3^2 +$$
$$+ f_1\left(k_0^2 - k_1^2\right) + f_2\left(k_0^2 - k_2^2\right)\Big],$$
$$d_1 = -k_1 k_2 D\Big[-2c_1 k_2 k_3 + f_3 k_0^2 - f_3 k_3^2 +$$
$$+ f_1\left(k_0^2 + k_1^2\right) + f_2\left(k_0^2 - k_2^2\right)\Big],$$
$$d_2 = k_1^2 D\Big[-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_3 k_0^2 - f_3 k_3^2 +$$
$$+ f_1\left(k_1^2 - k_0^2\right) - f_2\left(k_0^2 + k_2^2\right)\Big].$$

Его можно представить в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} f_0 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2D\left(f_1 + f_2 + f_3\right) k_0 k_1^2 k_2 \\ 2k_0 k_1 k_2 D\left(c_1 k_2 - d_3 k_0 + f_3 k_3\right) \\ -k_0 k_1 D\Big[-2d_3 k_3 k_0 + f_3 k_0^2 + f_3 k_3^2 + \\ + f_1\left(k_0^2 - k_1^2\right) + f_2\left(k_0^2 - k_2^2\right)\Big] \\ -k_1 k_2 D\Big[-2c_1 k_2 k_3 + f_3 k_0^2 - f_3 k_3^2 + \\ + f_1\left(k_0^2 + k_1^2\right) + f_2\left(k_0^2 - k_2^2\right)\Big] \\ k_1^2 D\Big[-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_3 k_0^2 - \\ - f_3 k_3^2 + f_1\left(k_1^2 - k_0^2\right) - f_2\left(k_0^2 + k_2^2\right)\Big] \end{vmatrix},$$

что можно разложить в линейную суперпозицию пяти независимых слагаемых (учитываем выражение для D):

$$\begin{vmatrix} f_0 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} = f_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0^2}{k_1 k_2} - \frac{k_1}{k_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{k_1} + \frac{k_1}{k_0}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{k_1^2}{k_0 k_2} + \frac{k_0}{k_2}\right) \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0^2}{k_1 k_2} - \frac{k_2}{k_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{k_1} - \frac{k_2^2}{k_0 k_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{k_2} + \frac{k_2}{k_0}\right) \end{vmatrix} +$$

$$+ f_3 \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{k_3}{k_1} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0^2}{k_1 k_2} + \frac{k_3^2}{k_1 k_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{k_1} - \frac{k_3^2}{k_0 k_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{k_2} + \frac{k_3^2}{k_0 k_2}\right) \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{k_1} \\ 0 \\ -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{k_0}{k_1} \\ -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{k_2} \end{vmatrix}.$$

3 Безмассовый предел

Система уравнений 1-го порядка, описывающая безмассовую частицу со спином 2, имеет вид

$$\partial^a \Phi_a = 0, \qquad (3.1)$$

$$\frac{1}{2}\partial_a \Phi - \frac{1}{3}\partial^b \Phi_{(ab)} = \Phi_a, \qquad (3.2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \Phi_{[kn]}{}^n\right) + \\ + \left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \Phi_k\right) = 0, \qquad (3.3)$$

$$\partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_a \Phi_{(kb)} - \\ -\frac{1}{3}\left(g_{kb}\partial^n \Phi_{(an)} - g_{ba}\partial^n \Phi_{(kn)}\right) = \Phi_{[ka]b}. \qquad (3.4)$$

Сразу же отметим, что здесь реализуется иная ситуация с дополнительными условиями, нежели в массивном случае. Так, сворачивая в уравнении (3.3) индексы a и b, приходим только к тождеству $0 \equiv 0$, т. е. условие неприводимости симметричного тензора не возникает. Сворачивая в уравнении (3.4) индексы a и b, получаем дополнительное условие в виде

$$\partial_k \Phi_n{}^n = \Phi_{[kn]}{}^n.$$

Теория безмассового поля основана на функции с $(1+4+10+24-40) = 35$ компонентами.

Исключим из уравнений (3.1) дополнительное поле Φ_a, получаем уравнение второго порядка для скаляра $\Phi(x)$ и тензора $\Phi_{(ab)}(x)$:

$$\frac{1}{2}\Box\Phi - \frac{1}{3}\partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0. \qquad (3.5)$$

Будем исключать из уравнений (3.3) поля Φ_a и $\Phi_{[ka]b}$. Так, уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \Phi_{[kn]}{}^n\right) + \\ + \left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \Phi_k\right) = 0$$

дает

$$\frac{1}{2}\Big\{\partial^k \Big[\partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_a \Phi_{(kb)} - \\ -\frac{1}{3}\left(g_{kb}\partial^n \Phi_{(an)} - g_{ba}\partial^n \Phi_{(kn)}\right)\Big] + \\ +\partial^k \left[\partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_b \Phi_{(ka)} - \frac{1}{3}\left(g_{ka}\partial^n \Phi_{(bn)} - g_{ba}\partial^n \Phi_{(kn)}\right)\right] - \\ -\frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \partial_k \Phi_n^n\Big\} + \Big\{\partial_a\left(\frac{1}{2}\partial_b \Phi - \frac{1}{3}\partial^n \Phi_{nb}\right) + \\ +\partial_b\left(\frac{1}{2}\partial_a \Phi - \frac{1}{3}\partial^n \Phi_{na}\right) - \\ -\frac{1}{2} g_{ab}\partial^k\left(\frac{1}{2}\partial_k \Phi - \frac{1}{3}\partial^n \Phi_{nk}\right)\Big\} = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены, в результате получаем

$$\left(\partial_a \partial_b - \frac{1}{4}\Box g_{ab}\right)\Phi - \frac{1}{4} g_{ab}\Box\Phi_n^n + \Box\Phi_{(ab)} - \\ -\partial_a \partial^n \Phi_{(nb)} - \partial_b \partial^n \Phi_{(na)} + \frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} = 0.$$

Учитывая (3.5) в форме:

$$\partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} = \frac{3}{2}\Box\Phi,$$

последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\left(\partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab}\Box\right)\Phi - \frac{1}{4} g_{ab}\Box\Phi_n^n + \Box\Phi_{(ab)} - \\ -\partial_a \partial^n \Phi_{(nb)} - \partial_b \partial^n \Phi_{(na)} = 0. \qquad (3.6)$$

Убедимся, что уравнения второго порядка (3.5)–(3.6) (следовательно, и уравнения первого порядка (3.1)–(3.4)) имеют класс калибровочных решений (этот факт впервые был установлен в работах Паули и Фирца):

$$\bar{\Phi} = \partial^l \Lambda_l, \ \bar{\Phi}_{(ab)} = \partial_a \Lambda_b + \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab}\partial^l \Lambda_l, \qquad (3.7)$$

где $\Lambda_l(x)$ – произвольный 4-вектор. Действительно, для этого калибровочного решения находим равенство

$$-\frac{1}{3}\partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} = -\frac{1}{2}\Box\partial^l \Lambda_l = -\frac{1}{2}\Box\bar{\Phi},$$

оно может быть переписано так:

$$\frac{1}{2}\Box\bar{\Phi} - \frac{1}{3}\partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} = 0;$$

последнее соотношение согласуется с уравнением (3.5). Далее, учитывая равенства

$$\left(\partial_a \partial_b - \frac{1}{4} g_{ab}\Box\right)\bar{\Phi} = \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l, \ \bar{\Phi}^a{}_a = 0,$$

$$\Box\bar{\Phi}_{(ab)} = \Box\partial_a \Lambda_b + \Box\partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab}\Box\partial^l \Lambda_l,$$

$$-\partial_a \partial^l \Phi^{(0)}_{(bl)} = -\frac{1}{2}\partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l - \Box\partial_a \Lambda_b,$$

$$-\partial_b \partial^l \Phi^{(0)}_{(al)} = -\frac{1}{2}\partial_b \partial_a \partial^l \Lambda_l - \Box\partial_b \Lambda_a,$$

$$\frac{1}{2} g_{ab}\partial^k \partial^l \Phi^{(0)}_{(kl)} = +\frac{3}{2} g_{ab}\Box\partial^l \Lambda_l,$$

убеждаемся, что набор полей (3.7) удовлетворяет и уравнению (3.6).

Найдем выражения для тензоров $\bar{\Phi}_a$ и $\bar{\Phi}_{[ka]b}$, сопутствующих набору полей (3.7):

$$\bar{\Phi}_a = +\frac{1}{3}\partial_a \partial^l \Lambda_l - \frac{1}{3}\Box\Lambda_a,$$

$$\bar{\Phi}_{[ab]c} = \partial_c\left(\partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a\right) - \\ -\frac{1}{3}\left(g_{cb}\partial_a - g_{ca}\partial_b\right)\partial^l \Lambda_l + \frac{1}{3}\left(g_{cb}\Box\Lambda_a - g_{ca}\Box\Lambda_b\right).$$

Отмечаем справедливость равенства $\bar{\Phi}_{[ac]}{}^c = 0$. Последнее согласуется с приведенным выше соотношением $\bar{\Phi}^a{}_a = 0$ и дополнительным условием $\partial_a \bar{\Phi}^b_b = \bar{\Phi}_{[ac]}{}^c$.

Таким образом, безмассовое поле со спином 2 можно описывать либо системой уравнений первого порядка (3.1)–(3.4), либо системой уравнений второго порядка (3.5)–(3.6):

$$\frac{1}{2}\,\Box\Phi - \frac{1}{3}\partial^k\partial^l\Phi_{(kl)} = 0, \qquad (3.8)$$

$$\left(\partial_a\partial_b + \frac{1}{2}g_{ab}\Box\right)\Phi - \frac{1}{4}g_{ab}\Box\Phi_c^c + \Box\Phi_{(ab)} - \\ -\partial_a\partial^l\Phi_{(bl)} - \partial_b\partial^l\Phi_{(al)} = 0. \qquad (3.9)$$

При этом в уравнениях имеется калибровочная симметрия, связанная с существованием класса решений (3.7), определяемых произвольным 4-вектором $\Lambda_a(x)$:

$$\bar{\Phi} = \partial^l\Lambda_l,\ \bar{\Phi}_{(ab)} = \partial_a\Lambda_b + \partial_b\Lambda_a - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^l\Lambda_l,$$

$$\bar{\Phi}_a = +\frac{1}{3}\partial_a\partial^l\Lambda_l - \frac{1}{3}\Box\Lambda_a,$$

$$\bar{\Phi}_{[ab]c} = \partial_c\left(\partial_a\Lambda_b - \partial_b\Lambda_a\right) - \frac{1}{3}\left(g_{cb}\partial_a - g_{ca}\partial_b\right)\partial^l\Lambda_l + \\ +\frac{1}{3}\left(g_{cb}\Box\Lambda_a - g_{ca}\Box\Lambda_b\right). \qquad (3.10)$$

4 Плоские волны, безмассовый случай

Получим решения системы уравнений для безмассовой частицы. Подстановка остается прежней (однако отсутствует условие неприводимости симметричного тензора):

$$\Phi(x) = e^{-ik_ax^a}f,\ \Phi_{ab}(x) = e^{-ik_ax^a}f_{ab},$$

$$f_{ab} = \begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & f_1 & c_1 & c_2 \\ d_2 & c_1 & f_2 & c_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 & f_3 \end{vmatrix};$$

позднее в этом разделе мы сменим систему обозначений, чтобы она совпадала с использованной в массивном случае:

$$c_1, c_2, c_3 \iff c_3, c_2, c_1.$$

Уравнение (3.8) дает (ввиду равенства $k_0^2 = \vec{k}^2$ имеем тождество $\Box\Phi = 0$)

$$\frac{1}{2}\,\Box\Phi - \frac{1}{3}\partial^a\partial^b\Phi_{(ab)} = 0 \ \Rightarrow\ k^ak^bf_{ab} = 0;$$

в свою очередь, уравнение (3.9) приводит к

$$-k_ak_bf + k_ak^lf_{bl} + k_bk^lf_{al} = 0.$$

Таким образом, здесь имеем алгебраическую систему уравнений

$$k^ak^bf_{ab} = 0,\ -k_ak_bf + k_ak^lf_{bl} + k_bk^lf_{al} = 0. \quad (4.1)$$

Калибровочные решения определяются произвольным 4-вектором $\Lambda_l(x) = e^{-ik_ax^a}\lambda_l$ и задаются соотношениями (см. (3.10)):

$$\bar{\Phi} = \bar{f}e^{-ik_ax^a},\ \bar{f} = -ik^l\lambda_l;$$

$$\bar{\Phi}_{(ab)} = \bar{f}_{ab}e^{-ik_ax^a},$$

$$\bar{f}_{ab} = -i\left[k_a\lambda_b + k_b\lambda_a - \frac{1}{2}g_{ab}k^l\lambda_l\right]. \qquad (4.2)$$

Легко убедиться, что решения (4.2) удовлетворяют уравнениям (4.1):

$$k^ak^b\bar{f}_{ab} = (-i)k^ak^b\left[k_a\lambda_b + k_b\lambda_a - \frac{1}{2}g_{ab}k^l\lambda_l\right] = \\ = (-i)\left[0 + 0 - \frac{1}{2}k^ak^bg_{ab}k^l\lambda_l\right] \equiv 0;$$

$$-k_ak_b\bar{f} + k_ak^l\bar{f}_{bl} + k_bk^l\bar{f}_{al} = (-i)\times \\ \times\left\{-k_ak_b\cdot k^n\lambda_n + k_ak^l\cdot\left[k_b\lambda_l + k_l\lambda_b - \frac{1}{2}g_{bl}k^n\lambda_n\right] + \right. \\ \left. +k_bk^l\cdot\left[k_a\lambda_l + k_l\lambda_a - \frac{1}{2}g_{al}k^n\lambda_n\right]\right\} \equiv 0.$$

Детализируем уравнения из (4.1). Первое уравнение дает

$$k^0\left(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3\right) + \\ +k^1\left(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3\right) + \\ +k^2\left(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3\right) + \\ +k^3\left(d_3k^0 + c_2k^1 + c_3k^2 + f_3k^3\right) = 0.$$

Второе уравнение приводит к 16 уравнениям:

$$(00)\quad k^0k^0f = k_0(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3) + \\ +(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3)k_0,$$

$$(01)\quad k^0k^1f = k^0(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3) + \\ +(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3)k_1,$$

$$(02)\quad k^0k^2f = k^0(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3) + \\ +(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3)k_2,$$

$$(03)\quad k^0k^3f = k^0(d_3k^0 + c_2k^1 + c_3k^2 + f_3k^3) + \\ +(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3)k_3,$$

$$(10)\quad k^1k^0f = k_1(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3) + \\ +(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3)k_0,$$

$$(11)\quad k^1k^1f = k_1(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3) + \\ +(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3)k_1,$$

$$(12)\quad k^1k^2f = k_1(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3) + \\ +(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3)k_2,$$

$$(13)\quad k^1k^3f = k_1(d_3k^0 + c_2k^1 + c_3k^2 + f_3k^3) + \\ +(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3)k_3,$$

$$(20)\quad k^2k^0f = k_2(f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3) + \\ +(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3)k_0,$$

$$(21)\quad k^2k^1f = k_2(d_1k^0 + f_1k^1 + c_1k^2 + c_2k^3) + \\ +(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3)k_1,$$

$$(22)\quad k^2k^2f = k_2(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3) + \\ +(d_2k^0 + c_1k^1 + f_2k^2 + c_3k^3)k_2,$$

$$(23)\quad k^2k^3f = k_2(d_3k^0 + c_2k^1 + c_3k^2 + f_3k^3) +$$

$$+(d_2k^0+c_1k^1+f_2k^2+c_3k^3)k_3,$$

(30) $$k^3k^0f=k_3(f_0k^0+d_1k^1+d_2k^2+d_3k^3)+$$
$$+(d_3k^0+c_2k^1+c_3k^2+f_3k^3)k_0,$$

(31) $$k^3k^1f=k_3(d_1k^0+f_1k^1+c_1k^2+c_2k^3)+$$
$$+(d_3k^0+c_2k^1+c_3k^2+f_3k^3)k_1,$$

(32) $$k^3k^2f=k_3(d_2k^0+c_1k^1+f_2k^2+c_3k^3)+$$
$$+(d_3k^0+c_2k^1+c_3k^2+f_3k^3)k_2,$$

(33) $$k^3k^3f=k_3(d_3k^0+c_2k^1+c_3k^2+f_3k^3)+$$
$$+(d_3k^0+c_2k^1+c_3k^2+f_3k^3)k_3.$$

С учетом совпадающих остаются только 10 уравнений (опускаем все индексы вниз):

$$k_0(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)+$$
$$+(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)k_0=k_0k_0f,$$
$$k_1(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)+$$
$$+(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)k_1=k_1k_1f,$$
$$k_2(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)+$$
$$+(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)k_2=k_2k_2f,$$
$$k_3(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)k_3=k_3k_3f,$$
$$k_0(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)+$$
$$+(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)k_1=-k^0k_1f,$$
$$k_0(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)+$$
$$+(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)k_2=-k_0k_2f,$$
$$k_0(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)k_3=-k^0k_3f,$$
$$k_1(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)+$$
$$+(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)k_2=k_1k_2f,$$
$$k_1(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)k_3=k_1k_3f,$$
$$k_2(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)k_3=k_2k_3f.$$

Таким образом, уравнения (4.1) приводят к

$$k^0(f_0k^0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)+$$
$$+k^1(d_1k^0+f_1k^1+c_1k^2+c_2k^3)-$$
$$-k_2(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)-$$
$$-k_3(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)=0,$$
$$2(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=k_0f,$$
$$2(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)=k_1f,$$
$$2(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)=k_2f,$$
$$2(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)=k_3f;$$
$$2k_0(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)+$$
$$+2k_1(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=-2k^0k_1f,$$
$$2k_0(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)+$$
$$+2k_2(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=-2k_0k_2f,$$
$$2k_0(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+2k_3(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=-2k^0k_3f;$$
$$2k_1(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)+$$
$$+2k_2(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)=2k_1k_2f,$$
$$2k_1(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+2k_3(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)=2k_1k_3f,$$
$$2k_2(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+$$
$$+2k_3(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)=2k_2k_3f.$$

Используя уравнения 2,3,4 из первой четверки, преобразуем две тройки уравнений:

$$2(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=k_0f,$$
$$2(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)=k_1f,$$
$$2(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)=k_2f,$$
$$2(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)=k_3f;$$
$$2k_0k_1f+2k_1(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=-2k^0k_1f,$$
$$2k_0k_2f+2k_2(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=-2k_0k_2f,$$
$$2k_0k_3f+2k_3(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=-2k^0k_3f;$$
$$2k_1(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)+k_2k_1f=2k_1k_2f,$$
$$2k_1(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+k_3k_1f=2k_1k_3f,$$
$$2k_2(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)+k_3k_2f=2k_2k_3f.$$

Отбрасывая лишние (из-за совпадения) уравнения, получаем:

$$2(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=k_0f,$$
$$2(d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3)=k_1f,$$
$$2(d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3)=k_2f,$$
$$2(d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3)=k_3f,$$
$$2k_0f+(f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3)=0,$$
$$d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3=0,$$
$$d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3=0.$$

С учетом двух последних уравнений приходим к равенству $f=0$, при этом остаются только 4 независимых уравнения

$$\begin{aligned}
&f_0k_0-d_1k_1-d_2k_2-d_3k_3=0,\\
&d_1k_0-f_1k_1-c_1k_2-c_2k_3=0,\\
&d_2k_0-c_1k_1-f_2k_2-c_3k_3=0,\\
&d_3k_0-c_2k_1-c_3k_2-f_3k_3=0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Таким образом, имеем 4 уравнения на 10 переменных. С учетом замены в обозначениях $c_1\longleftrightarrow c_3$ из (4.3) приходим к

$$d_1k_1+d_2k_2=f_0k_0-d_3k_3,\quad d_1k_0-c_3k_2-c_2k_3=f_1k_1,$$
$$d_2k_0-c_3k_1=f_2k_2+c_1k_3,$$
$$c_2k_1=d_3k_0-c_1k_2-f_3k_3.$$

В матричной форме она имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_0k_0-d_3k_3 \\ f_1k_1 \\ c_1k_3+f_2k_2 \\ -c_1k_2+d_3k_0-f_3k_3 \end{vmatrix}.$$

Строим решение на основе формул $x_i = D \det A_i$, $\det A = -2k_0 k_1^2 k_2 \equiv D^{-1}$:

$$c_2 = D\left[k_0 k_1 k_2 \left(2c_1 k_2 - 2d_3 k_0 + 2 f_3 k_3\right)\right],$$

$$c_3 = D\left[k_0 k_1 \left(2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2\right)\right],$$

$$d_1 = D\left[k_1 k_2 \left(2c_1 k_2 k_3 - f_0 k_0^2 - f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 + f_3 k_3^2\right)\right],$$

$$d_2 = D\left[k_1^2 \left(-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 - f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2\right)\right].$$

Его можно представить в матричной форме и разложить в линейную комбинацию из 6 слагаемых:

$$\begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} = f_0 \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{k_0^2}{2k_1 k_2} \\ \dfrac{k_0}{2k_1} \\ \dfrac{k_0}{2k_2} \end{vmatrix} + f_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -\dfrac{k_1}{2k_2} \\ \dfrac{k_1}{2k_0} \\ -\dfrac{k_1^2}{2k_0 k_2} \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} 0 \\ -\dfrac{k_2}{2k_1} \\ -\dfrac{k_2^2}{2k_0 k_1} \\ \dfrac{k_2}{k_0} \end{vmatrix} +$$

$$+ f_3 \begin{vmatrix} -\dfrac{k_3}{k_1} \\ \dfrac{k_3^2}{2k_1 k_2} \\ -\dfrac{k_3^2}{2k_0 k_1} \\ \dfrac{k_3^2}{2k_0 k_2} \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} -\dfrac{k_2}{k_1} \\ 0 \\ -\dfrac{k_2 k_3}{k_0 k_1} \\ \dfrac{k_3}{k_0} \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} \dfrac{k_0}{k_1} \\ -\dfrac{k_0 k_3}{k_1 k_2} \\ 0 \\ -\dfrac{k_3}{k_2} \end{vmatrix}.$$

Это общее решение можно записать в виде матрицы, которая является симметричной относительно главной диагонали:

$$f_{(ab)} = \begin{vmatrix} f_0 & g_{12} & g_{13} & d_3 \\ g_{12} & f_1 & g_{23} & g_{24} \\ g_{13} & g_{23} & f_2 & c_1 \\ d_3 & g_{24} & c_1 & f_3 \end{vmatrix},$$

где

$$g_{12} = \frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 - \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} f_2 - \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} f_3 - \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} c_1,$$

$$g_{13} = \frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 + \frac{k_2}{2k_0} f_2 +$$
$$+ \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} f_3 + \frac{k_3}{k_0} c_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3,$$

$$g_{23} = \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_2}{2k_1} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} f_3 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3,$$

$$g_{24} = -\frac{k_3}{k_1} f_3 - \frac{k_2}{k_1} c_1 + \frac{k_0}{k_1} d_3.$$

Это общее решение можно разложить в линейную суперпозицию 6 независимых:

$$f_{(ab)} = f_0 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{k_0}{2k_1} & \dfrac{k_0}{2k_2} & 0 \\ \dfrac{k_0}{2k_1} & 0 & \dfrac{k_0^2}{2k_1 k_2} & 0 \\ \dfrac{k_0}{2k_2} & \dfrac{k_0^2}{2k_1 k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ f_1 \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{k_1}{2k_0} & -\dfrac{k_1^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \dfrac{k_1}{2k_0} & 1 & -\dfrac{k_1}{2k_2} & 0 \\ -\dfrac{k_1^2}{2k_0 k_2} & -\dfrac{k_1}{2k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ f_2 \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{k_2^2}{2k_0 k_1} & \dfrac{k_2}{2k_0} & 0 \\ -\dfrac{k_2^2}{2k_0 k_1} & 0 & -\dfrac{k_2}{2k_1} & 0 \\ \dfrac{k_2}{2k_0} & -\dfrac{k_2}{2k_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ f_3 \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{k_3^2}{2k_0 k_1} & \dfrac{k_3^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ -\dfrac{k_3^2}{2k_0 k_1} & 0 & \dfrac{k_3^2}{2k_1 k_2} & -\dfrac{k_3}{k_1} \\ \dfrac{k_3^2}{2k_0 k_2} & \dfrac{k_3^2}{2k_1 k_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{k_3}{k_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \tag{4.4}$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & \dfrac{k_3}{k_0} & 0 \\ -\dfrac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & 0 & 0 & -\dfrac{k_2}{k_1} \\ \dfrac{k_3}{k_0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k_2}{k_1} & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ d_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{k_3}{k_2} & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & \dfrac{k_0}{k_1} \\ -\dfrac{k_3}{k_2} & -\dfrac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{k_0}{k_1} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

или коротко так:

$$f_{(ab)} = f_0 F_0 + f_1 F_1 + f_2 F_2 + f_3 F_3 + c_1 C_1 + d_3 D_3 . \quad (4.5)$$

Теперь учтем существование калибровочных решений; они задаются соотношениями

$$\bar f = -i(k_0\lambda_0 - k_1\lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3),$$

$$\bar f_0 = -i\left(\frac{3}{2}k_0\lambda_0 + \frac{1}{2}k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}k_3\lambda_3\right),$$

$$\bar f_1 = -i\left(\frac{1}{2}k_0\lambda_0 + \frac{3}{2}k_1\lambda_1 - \frac{1}{2}k_2\lambda_2 - \frac{1}{2}k_3\lambda_3\right),$$

$$\bar f_2 = -i\left(\frac{1}{2}k_0\lambda_0 - \frac{1}{2}k_1\lambda_1 + \frac{3}{2}k_2\lambda_2 - \frac{1}{2}k_3\lambda_3\right),$$

$$\bar f_3 = -i\left(\frac{1}{2}k_0\lambda_0 - \frac{1}{2}k_1\lambda_1 - \frac{1}{2}k_2\lambda_2 + \frac{3}{2}k_3\lambda_3\right),$$

$$\bar d_1 = -i(k_0\lambda_1 + k_1\lambda_0),\ \bar d_2 = -i(k_0\lambda_2 + k_2\lambda_0),$$

$$\bar d_3 = -i(k_0\lambda_3 + k_3\lambda_0),$$

$$\bar c_1 = -i(k_2\lambda_3 + k_3\lambda_2),\ \bar c_2 = -i(k_1\lambda_3 + k_3\lambda_1),$$

$$\bar c_3 = -i(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1).$$

Поскольку решения исходной системы построены с учетом равенства $f = 0,$ нужно требовать, чтобы калибровочные преобразования не нарушали этого условия; поэтому накладываем ограничение $k_0\lambda_0 - k_1\lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3 = 0$. В результате общее калибровочное решение примет вид

$$\bar f_0 = -2ik_1\lambda_1 - 2i\lambda_2 k_2 - 2i\lambda_3 k_3,$$

$$\bar f_1 = -2ik_1\lambda_1,\ \bar f_2 = -2ik_2\lambda_2,\ \bar f_3 = -2ik_3\lambda_3,$$

$$\bar d_1 = -i\frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0}\lambda_1 - i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_2 - i\frac{k_1 k_3}{k_0}\lambda_3,$$

$$\bar d_2 = -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_1 - i\frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0}\lambda_2 - i\frac{k_2 k_3}{k_0}\lambda_3,$$

$$\bar d_3 = -i\frac{k_3 k_1}{k_0}\lambda_1 - i\frac{k_3 k_2}{k_0}\lambda_2 - i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3,$$

$$\bar c_1 = -ik_2\lambda_3 - ik_3\lambda_2,\ \bar c_2 = -ik_1\lambda_3 - ik_3\lambda_1,$$

$$\bar c_3 = -ik_1\lambda_2 - ik_2\lambda_1.$$

Его можно разложить в комбинацию трех независимых:

$$\bar f_0 = -2ik_1\lambda_1,\ \bar f_1 = -2ik_1\lambda_1,\ \bar f_2 = 0,\ \bar f_3 = 0,$$

$$\bar d_1 = -i\frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0}\lambda_1,\ \bar d_2 = -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_1,\ \bar d_3 = -i\frac{k_3 k_1}{k_0}\lambda_1,$$

$$\bar c_1 = 0,\ \bar c_2 = -ik_3\lambda_1,\ \bar c_3 = -ik_2\lambda_1,$$

$$f_{(ab)}^{(1)} = \begin{vmatrix} -2ik_1\lambda_1 & -i\frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0}\lambda_1 & -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_1 & -i\frac{k_3 k_1}{k_0}\lambda_1 \\ -i\frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0}\lambda_1 & -2ik_1\lambda_1 & -ik_2\lambda_1 & -ik_3\lambda_1 \\ -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_1 & -ik_2\lambda_1 & 0 & 0 \\ -i\frac{k_3 k_1}{k_0}\lambda_1 & -ik_3\lambda_1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar f_0 = -2i\lambda_2 k_2,\ \bar f_1 = 0,\ \bar f_2 = -2ik_2\lambda_2,\ \bar f_3 = 0,$$

$$\bar d_1 = -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_2,\ \bar d_2 = -i\frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0}\lambda_2,\ \bar d_3 = -i\frac{k_3 k_2}{k_0}\lambda_2,$$

$$\bar c_1 = -ik_3\lambda_2,\ \bar c_2 = 0,\ \bar c_3 = -ik_1\lambda_2,$$

$$f_{(ab)}^{(2)} = \begin{vmatrix} -2i\lambda_2 k_2 & -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_2 & -i\frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0}\lambda_2 & -i\frac{k_3 k_2}{k_0}\lambda_2 \\ -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_2 & 0 & -ik_1\lambda_2 & 0 \\ -i\frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0}\lambda_2 & -ik_1\lambda_2 & -2ik_2\lambda_2 & -ik_3\lambda_2 \\ -i\frac{k_3 k_2}{k_0}\lambda_2 & 0 & -ik_3\lambda_2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar f_0 = -2i\lambda_3 k_3,\ \bar f_1 = 0,\ \bar f_2 = 0,\ \bar f_3 = -2ik_3\lambda_3,$$

$$\bar d_1 = -i\frac{k_1 k_3}{k_0}\lambda_3,\ \bar d_2 = -i\frac{k_2 k_3}{k_0}\lambda_3,\ \bar d_3 = -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3,$$

$$\bar c_1 = -ik_2\lambda_3,\ \bar c_2 = -ik_1\lambda_3,\ \bar c_3 = 0,$$

$$f_{(ab)}^{(3)} = \begin{vmatrix} -2i\lambda_3 k_3 & -i\frac{k_1 k_3}{k_0}\lambda_3 & -i\frac{k_2 k_3}{k_0}\lambda_3 & -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \\ -i\frac{k_1 k_3}{k_0}\lambda_3 & 0 & 0 & -ik_1\lambda_3 \\ -i\frac{k_2 k_3}{k_0}\lambda_3 & 0 & 0 & -ik_2\lambda_3 \\ -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 & -ik_1\lambda_3 & -ik_2\lambda_3 & -2ik_3\lambda_3 \end{vmatrix}.$$

Три простейших калибровочных решения должны содержаться в найденном общем решении (4.4).

Сначала рассматриваем случай $\lambda_1 \neq 0.$ Из равенства $f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}$ следует система из 10 уравнений:

$$f_0 = -2ik_1\lambda_1,\ f_1 = -2ik_1\lambda_1,\ f_2 = 0,$$

$$f_3 = 0,\ c_1 = 0,\ d_3 = -i\frac{k_3 k_1}{k_0}\lambda_1,$$

$$\frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3 = -ik_2\lambda_1,\ \frac{k_0}{k_1} d_3 = -ik_3\lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 = -i\frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0}\lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3 = -i\frac{k_1 k_2}{k_0}\lambda_1,$$

что эквивалентно следующему:

$$f_0 = -2ik_1\lambda_1,\ f_1 = -2ik_1\lambda_1,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,$$

$$c_1 = 0,\ d_3 = -i\frac{k_3 k_1}{k_0}\lambda_1,$$

$$k_0^2 + k_1^2 \equiv k_0^2 + k_1^2,\ k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0.$$

Т. е. это калибровочное решение отождествляется со случаем общего решения согласно

$$f_{(ab)} = f^{(1)}_{(ab)},\; f_0 = -2ik_1\lambda_1,\; f_1 = -2ik_1\lambda_1,\; f_2 = 0,$$

$$f_3 = 0,\; c_1 = 0,\; d_3 = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1.$$

Аналогично рассматриваем случай $\lambda_2 \neq 0$. Из равенства $f_{(ab)} = f^{(2)}_{(ab)}$ следует система

$$f_0 = -2i\lambda_2 k_2,\; f_1 = 0,\; f_2 = -2ik_2\lambda_2,\; f_3 = 0,$$

$$c_1 = -ik_3\lambda_2,\; d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2,$$

$$\frac{k_0}{2k_1}(-2i\lambda_2k_2) - \frac{k_2^2}{2k_0k_1}(-2ik_2\lambda_2) -$$

$$-\frac{k_2k_3}{k_0k_1}(-ik_3\lambda_2) = -i\frac{k_1k_2}{k_0}\lambda_2,$$

$$\frac{k_0}{2k_2}(-2i\lambda_2k_2) + \frac{k_2}{2k_0}(-2ik_2\lambda_2) + \frac{k_3}{k_0}(-ik_3\lambda_2) -$$

$$-\frac{k_3}{k_2}\left(-i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2\right) = -i\frac{k_0^2+k_2^2}{k_0}\lambda_2,$$

$$\frac{k_0^2}{2k_1k_2}(-2i\lambda_2k_2) - \frac{k_2}{2k_1}(-2ik_2\lambda_2) -$$

$$-\frac{k_0k_3}{k_1k_2}\left(-i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2\right) = -ik_1\lambda_2,$$

$$-\frac{k_2}{k_1}(-ik_3\lambda_2) + \frac{k_0}{k_1}\left(-i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2\right) = 0.$$

В результате приходим к соотношениям

$$f_0 = -2i\lambda_2 k_2,\; f_1 = 0,\; f_2 = -2ik_2\lambda_2,\; f_3 = 0,$$

$$c_1 = -ik_3\lambda_2,\; d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,\; k_0^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,\; k_2k_3 - k_2k_3 \equiv 0.$$

Следовательно, это калибровочное решение описывается равенствами

$$f_{(ab)} = f^{(2)}_{(ab)},\; f_0 = -2i\lambda_2k_2,\; f_1 = 0,\; f_2 = -2ik_2\lambda_2,$$

$$f_3 = 0,\; c_1 = -ik_3\lambda_2,\; d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2.$$

Рассмотрим случай $\lambda_3 \neq 0$. Из равенства $f_{(ab)} = f^{(3)}_{(ab)}$ следуют 10 уравнений:

$$f_0 = -2i\lambda_3 k_3,\; f_1 = 0,\; f_2 = 0,\; f_3 = -2ik_3\lambda_3,$$

$$c_1 = -ik_2\lambda_3,\quad d_3 = -i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3,$$

$$\frac{k_0}{2k_1}(-2i\lambda_3k_3) - \frac{k_3^2}{2k_0k_1}(-2ik_3\lambda_3) -$$

$$-\frac{k_2k_3}{k_0k_1}(-ik_2\lambda_3) = -i\frac{k_1k_3}{k_0}\lambda_3,$$

$$\frac{k_0}{2k_2}(-2i\lambda_3k_3) + \frac{k_3^2}{2k_0k_2}(-2ik_3\lambda_3) + \frac{k_3}{k_0}(-ik_2\lambda_3) -$$

$$-\frac{k_3}{k_2}\left(-i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) = -i\frac{k_2k_3}{k_0}\lambda_3,$$

$$\frac{k_0^2}{2k_1k_2}(-2i\lambda_3k_3) + \frac{k_3^2}{2k_1k_2}(-2ik_3\lambda_3) -$$

$$-\frac{k_0k_3}{k_1k_2}\left(-i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) = 0,$$

$$-\frac{k_3}{k_1}(-2ik_3\lambda_3) - \frac{k_2}{k_1}(-ik_2\lambda_3) +$$

$$+\frac{k_0}{k_1}\left(-i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) = -ik_1\lambda_3.$$

В результате приходим к

$$f_0 = -2i\lambda_3k_3,\; f_1 = 0,\; f_2 = 0,\; f_3 = -2ik_3\lambda_3,$$

$$c_1 = -ik_2\lambda_3,\; d_3 = -i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,\; k_0^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,$$

$$k_0^2 + k_3^2 - k_0^2 - k_3^2 \equiv 0,\; k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - 2k_3^2 + k_3^2 \equiv 0;$$

это калибровочное решение отождествляется со случаем общего решения согласно

$$f_{(ab)} = f^{(3)}_{(ab)},\; f_0 = -2i\lambda_3k_3,\; f_1 = 0,\; f_2 = 0,$$

$$f_3 = -2ik_3\lambda_3,\; c_1 = -ik_2\lambda_3,\; d_3 = -i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3.$$

Таким образом, действительно, среди общего решения исходной системы уравнений существуют три, которые могут быть отождествлены с калибровочными:

$$f_0^{(1)} = -2ik_1\lambda_1,\; f_1^{(1)} = -2ik_1\lambda_1,\; f_2^{(1)} = 0,\; f_3^{(1)} = 0,$$

$$c_1^{(1)} = 0,\; d_3^{(1)} = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1,\; f_0^{(2)} = -2ik_2\lambda_2,$$

$$f_1^{(2)} = 0,\; f_2^{(2)} = -2ik_2\lambda_2,\; f_3^{(2)} = 0,\; c_1^{(2)} = -ik_3\lambda_2,$$

$$d_3^{(2)} = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2,\; f_0^{(3)} = -2ik_3\lambda_3,$$

$$f_1^{(3)} = 0,\; f_2^{(3)} = 0,\; f_3^{(3)} = -2ik_3\lambda_3,\; c_1^{(3)} = -ik_2\lambda_3,$$

$$d_3^{(3)} = -i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3.$$

Приведем здесь же явный вид общего решения (4.5) – ограничимся символической формой:

$$(f_{(ab)}) = f_0F_0 + f_1F_1 + f_2F_2 + f_3F_3 + c_1C_1 + d_3D_3.$$

Присутствие калибровочных решений внутри общего может быть пояснено следующим образом:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \text{Общее}: & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & c_1 & d_3 \\ (1): & f_0^{(1)} & f_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & d_3^{(1)} \\ (2): & f_0^{(2)} & 0 & f_2^{(2)} & 0 & c_1^{(2)} & d_3^{(2)} \\ (3): & f_0^{(3)} & 0 & 0 & f_3^{(3)} & c_1^{(3)} & d_3^{(3)} \end{array}\right|.$$

Отсюда можно сделать вывод, что решения F_1, F_2, F_3 являются калибровочными. Дальше нужно исследовать величину

$$f_{ab}^{phys} = f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3} \qquad (4.6)$$

с учетом трех равенств

$$f_1 = f_1^{(1)} = -2ik_1\lambda_1,$$
$$f_2 = f_3^{(3)} = -2ik_2\lambda_2,$$
$$f_3 = f_3^{(3)} = -2ik_3\lambda_3.$$

В явном виде равенство (4.6) принимает вид

$$f_{ab}^{phys} = f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3} =$$
$$= f_0 \cdot F_0 + f_1 \cdot F_1 + f_2 \cdot F_2 + f_3 \cdot F_3 + c_1 \cdot C_1 + d_3 \cdot D_3 +$$
$$+2ik_1\lambda_1 \cdot F_0 + 2ik_1\lambda_1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 +$$
$$+0 \cdot F_3 + 0 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 \cdot D_3 +$$
$$+2ik_2\lambda_2 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 2ik_2\lambda_2 \cdot F_2 +$$
$$+0 \cdot F_3 + ik_3\lambda_2 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 \cdot D_3 +$$
$$+2ik_3\lambda_3 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 2ik_3\lambda_3 \cdot F_3 +$$
$$+ik_2\lambda_3 \cdot C_1 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \cdot D_3;$$

отсюда после приведения подобных получаем (обращаем внимание на то, что множитель перед решением F_0 обращается в нуль)

$$f_{ab}^{phys} = f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3} =$$
$$= \left(f_0 - \overline{f}_0\right)^{\equiv 0} \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 +$$
$$+\left(c_1 + ik_3\lambda_2 + ik_2\lambda_3\right) \cdot C_1 +$$
$$+\left(d_3 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) \cdot D_3.$$

Следовательно, общее решение, не содержащее калибровочных компонент, выглядит так:

$$f_{ab}^{phys} = \mu_1 \cdot C_1 + \mu_2 \cdot D_3 =$$
$$= \mu_1 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{k_2k_3}{k_0k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ -\frac{k_2k_3}{k_0k_1} & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$\mu_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ -\frac{k_3}{k_2} & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_0}{k_1} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Этот симметричный тензор содержит только два произвольных числовых параметра μ_1 и μ_2; он описывает два линейно независимых решения уравнения для безмассовой частицы со спином 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pauli*, *W*. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. *Fierz*, *M*. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. *De Broglie*, *L*. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1941. – Vol. 212. – P. 657–659.

4. *Гельфанд*, *И.М*. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

5. *Фрадкин*, *Э.Е*. К теории частиц с высшими спинами / Э.Е. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

6. *Федоров*, *Ф.И*. К теории частицы со спином 2 / Ф.И. Федоров // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.

7. *Крылов*, *Б.В*. Уравнения первого порядка для гравитона / Б.В. Крылов, Ф.И Федоров // ДАН БССР. – 1967. – Т. 11, № 8. – С. 681–684.

8. *Богуш*, *А.А*. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А.А. Богуш, Б.В. Крылов, Ф.И. Федоров // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1968. – № 1. – С. 74–81.

9. *Федоров*, *Ф.И*. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф.И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.

10. *Крылов*, *Б.В*. О системах уравнений первого порядка для гравитона / Б.В. Крылов // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1972. – № 6. – С. 82–89.

11. *Федоров*, *Ф.И*. Уравнения первого порядка для гравитационного поля в вакууме / Ф.И. Федоров, А.А. Кирилов // Acta Physica Polonica. B. – 1976. – Vol. 7, № 3. – P. 161–167.

12. *Кисель*, *В.В*. О релятивистских волновых уравнениях для массивной частицы со спином 2 / В.В. Кисель // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1986. – № 5. – С. 94–99.

13. *Файнберг*, *В.Я*. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электро-магнитным и мезонным полями / В.Я. Файнберг // Тр. ФИАН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

14. *Regge*, *T*. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.

15. *Buchdahl*, *H.A*. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field /

H.A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.

16. *Buchdahl*, *H.A*. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H.A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1962. – Vol. 25. – P. 486–496.

17. *Johnson*, *K*. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E.C.G. Sudarshan // Ann. Phys. N.Y. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.

18. *Johnson*, *K*. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Johnson, E.C.G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 126–145.

19. *Velo*, *G*. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, № 5. – P. 2218–2222.

20. *Cox*, *W*. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.

21. *Loide*, *R.K*. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R.K. Loide // J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19, № 5. – P. 827–829.

22. *Об уравнениях для частицы со спином* 2 *во внешних электромагнитных и гравитационных полях* / А.А. Богуш [и др.] // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 62–67.

23. *Red'kov*, *V.M*. Graviton in a curved space-time background and gauge symmetry / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, V.V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 772–778.

24. *Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином* 2 / В.В. Кисель [и др.] // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.

25. *Нерелятивистский предел в теории частицы со спином* 2 / В.В. Кисель [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.

Поступила в редакцию 27.01.2021.