Проблемы физики, математики и техники, № 2 (47), 2021

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ σ-РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В.М. Селькин, И.В. Близнец, В.С. Закревская

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

A σ-SOLUBILITY CRITERION OF A FINITE GROUP

V.M. Sel'kin, I.V. Blisnets, V.S. Zakrevskaya

Francisk Skorina Gomel State University

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, σ является некоторым разбиением множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, где $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$. Множество подгрупп $\mathcal{H}$ группы G называется *полным холловым* σ*-множеством* G, если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой группы G для некоторого i и $\mathcal{H}$ содержит ровно одну холлову σ_i-подгруппу группы G для каждого i. Подгруппа A группы G называется: σ*-перестановочной в* G, если G обладает полным холловым σ-множеством $\mathcal{H}$ таким, что $AH^x=H^xA$ для всех $H\in\mathcal{H}$ и всех $x\in G$; σ*-субнормальной* в G, если в G имеется цепь подгрупп $A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_t=G$ такая, что либо $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой для всех $i=1,\ldots,t$. Подгруппа A группы G является *слабо* σ*-перестновочной* в G, если в G имеются σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T такие, что $G=AT$ и $A\cap T\leq S\leq A$. В данной работе доказывается, что если в каждой максимальной цепи $M_3<M_2<M_1<M_0=G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является либо субмодулярной, либо слабо σ-перестановочной в G, то G σ-разрешима.

Ключевые слова: *конечная группа*, σ*-разрешимая группа*, σ*-субнормальная подгруппа*, σ*-перестановочная подгруппа*, *слабо* σ*-перестановочная подгруппа*, *модулярная подгруппа*.

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, where $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ for all $i\neq j$. A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is a *complete Hall* σ*-set* of G if every member $\neq 1$ of $\mathcal{H}$ is a Hall σ_i-subgroup of G for some $\sigma_i\in\sigma$ and $\mathcal{H}$ contains exactly one Hall σ_i-subgroup of G for every $\sigma_i\in\sigma(G)$. A subgroup A of G is said to be: σ*-permutable* in G if G possesses a complete Hall σ-set $\mathcal{H}$ such that $AH^x=H^xA$ for all $H\in\mathcal{H}$ and all $x\in G$; σ*-subnormal* in G if there is a subgroup chain $A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_n=G$ such that either $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$ or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i=1,\ldots,n$. A subgroup A of G is said to be *weakly* σ*-permutable* in G if there is a σ-permutable subgroup S and a σ-subnormal subgroup T of G such that $G=AT$ and $A\cap T\leq S\leq A$. In this paper it is proved that if in every maximal chain $M_3<M_2<M_1<M_0=G$ of G of length 3 at least one of the subgroups M_3, M_2, or M_1 is either submodular or weakly σ-permutable in G, then G is σ-soluble.

Keywords: *finite group*, σ*-soluble group*, σ*-subnormal subgroup*, σ*-permutable subgroup*, *weakly* σ*-permutable subgroup*, *modular subgroup*.

Введение

В этой статье все группы конечны и G всегда означает конечную группу. Кроме того, $\mathbb{P}$ – это множество всех простых чисел, $\pi\subseteq\mathbb{P}$ и $\pi'=\mathbb{P}\setminus\pi$. Если n – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n, $\pi(G)=\pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок G.

Подгруппа M группы G называется *модулярной* в G [1], если M – модулярный элемент (в смысле Куроша [1, С. 43]) решетки всех подгрупп $\mathcal{L}(G)$ группы G, т. е.

(i) $\langle X, M\cap Z\rangle=\langle X,M\rangle\cap Z$ для всех $X\leq G$, $Z\leq G$ таких, что $X\leq Z$ и

(ii) $\langle M, Y\cap Z\rangle=\langle M,Y\rangle\cap Z$ для всех $Y\leq G$, $Z\leq G$ таких, что $M\leq Z$.

Подгруппа A группы G называется *субмодулярной* в G, если в G имеется цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_t=G$$

такая, что A_{i-1} является модулярной группой в A_i для всех $i=1,\ldots,t$.

Напомним теперь некоторые понятия теории σ-свойств групп [2]–[8].

Мы используем символ σ для обозначения некоторого разбиения множества $\mathbb{P}$. Таким образом, $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, где $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$.

Группа G называется: σ*-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$; σ*-нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$, σ*-разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным.

Множество подгрупп $\mathcal{H}$ группы G называется *полным холловым* σ*-множеством* G, если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой группы G для некоторого i и $\mathcal{H}$ содержит ровно одну холлову σ_i-подгруппу группы G для каждого i.

Подгруппа A группы G называется: σ*-перестановочной в* G, если G обладает полным холловым σ-множеством $\mathcal{H}$ таким, что

$$AH^x = H^x A$$

для всех $H \in \mathcal{H}$ и всех $x \in G$; σ*-субнормальной* в G, если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой для всех $i = 1, \ldots, t$.

В работе [8] введено следующее обобщение понятия σ-перестановочности.

***Определение* 0.1.** Мы говорим, что подгруппа A группы G является *слабо* σ*-перестановочной* в G, если в G имеются σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T такие, что $G = AT$ и $A \cap T \leq S \leq A$.

В данной работе мы доказываем следующий результат.

***Теорема* 0.2.** *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы в одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является либо субмодулярной, либо слабо σ-перестановочной в G, то G σ-разрешима.

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots, \}$ из теоремы 0.2 получаем следующие известные результаты.

***Следствие* 0.3** (Цимерман [9]). *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является субмодулярной, то G разрешима.

***Следствие* 0.4** (Спенсер [10]). *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является субнормальной в G, то G разрешима.

***Следствие* 0.5** (Шмидт [11]). *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является модулярной в G, то G разрешима.

Подгруппа A группы G называется *c-нормальной* в G [12], если для некоторой нормальной подгруппы T группы G имеет место

$$AT = G \text{ и } A \cap T \leq A_G.$$

Понятно, что каждая *c*-нормальная подгруппа является слабо σ-пере-становочной в группе. Таким образом, мы получаем из теоремы 0.2 следующий результат.

***Следствие* 0.6.** *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является c-нормальной в G, то G разрешима.

1 Некоторые предварительные результаты

Напомним, что символ $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначает класс всех σ-нильпотентных групп; $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-нильпотентный корадикал группы G.

***Лемма* 1.1** [3, следствие 2.4, лемму 2.5].

(1) *Класс $\mathfrak{N}_\sigma$ замкнут относительно взятия произведений нормальных подгрупп, гомоморфных образов и подгрупп.*

(2) *Если G/N и G/R – σ-нильпотентные группы, то факторгруппа $G/(N \cap R)$ σ-нильпотентна.*

(3) *Если E – нормальная подгруппа G и $E/(E \cap \Phi(G))$ σ-нильпотентна, то E σ-нильпотентна.*

***Лемма* 1.2.** *Пусть A, K и N – подгруппы группы G. Предположим, что A σ-субнормальна в G и N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *подгруппа $A \cap K$ σ-субнормальна в K*;

(2) *подгруппа AN/N является σ-субнормальной в G/N*;

(3) *если $N \leq K$ и K/N σ-субнормальна в G/N, то K σ-субнормальна в G*;

(4) *если A является σ_i-группой, то $A \leq O_{\sigma_i}(G)$*;

(5) *подгруппа $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в G.*

Доказательство. (1)–(4) [1, лемму 2.6].

(5) Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка.

По условию, в G существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_r = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, или $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой для всех $i = 1, \ldots, r$.

Пусть $M = A_{r-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $M \neq G$.

Сначала покажем, что

$$A^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq M_G.$$

Это ясно, если M нормальна в G. Теперь предположим, что G / M_G является σ_i-группой для некоторого i. Тогда $G^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq M_G$.

Более того, из изоморфизма

$$AG^{\mathfrak{N}_\sigma} / G^{\mathfrak{N}_\sigma} \simeq A / (A \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$$

и леммы 1.1 мы получаем, что

$$A^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq G^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq M_G.$$

Выбор G означает, что $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в AM_G, поэтому $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в M_G. Следовательно $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в G. □

***Лемма* 1.3** [8, лемма 2.8]. *Пусть A, K и N – подгруппы группы G. Предположим, что A слабо σ-перестановочна и N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если либо $N \leq A$, либо $(|N|,|A|) = 1$, то AN / N является слабо σ-перестановочной в G / N.*

(2) *если G является σ-полной группой силовского типа, $N \leq K$ и K / N слабо σ-перестановочна в G / N, то K слабо σ-перестановочна в G.*

(3) *если G является σ-полной группой силовского типа и $A \leq E \leq G$, тогда A слабо σ-перестановочна в E.*

(4) *если $A \leq E \leq G$ и E нормальна в G, то A является слабо σ-перестановочной в E.*

***Лемма* 1.4** [9, леммы 1, 4 и 7]. *Пусть A, K и N – подгруппы группы G. Предположим, что A субмодулярна и N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *подгруппа AN / N является субмодулярной в G / N*;

(2) *$N \cap K$ субмодулярна в K*;

(3) *если $\mathfrak{F}$ – формация всех абелевых групп с элементарными силовскими подгруппами, то $\mathfrak{F}$-корадикал $A^{\mathfrak{F}}$ подгруппы A субнормален в G*;

(4) *если A разрешима и N –неабелева минимальная нормальная подгруппа в G, то*

$$A \leq C_G(N).$$

***Лемма* 1.5** [13, VI, теорема 26.1]. *Если G – группа Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ является силовской p-подгруппой в G, а $Q = \langle x \rangle$ – циклическая силовская q-подгруппа в G для некоторых простых чисел $p \neq q$.*

2 Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что данная теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) *Если R – минимальная нормальная подгруппа в G, то G / R – σ-разрешимая группа. Следовательно, R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $C_G(R) \leq R$ и R не является σ-примарной группой.*

Сначала покажем, что группа G / R σ-разрешима для любой минимальной нормальной подгруппы R группы G.

Предположим, что это неверно. Тогда G / R не является нильпотентной группой и поэтому G / R имеет подгруппу Шмидта H / R. Тогда H / R – разрешимая группа по лемме 1.5, поэтому $H < G$. Более того, из леммы 1.5 следует, что для любого простого p, делящего $|H / R|$, и для любой силовской p-подгруппы P группы H / R следует, что P содержится в некоторой 2-максимальной подгруппе в G / R. Следовательно, R содержится в некоторой 3-максимальной подгруппе группы G.

Пусть теперь

$$M_3 / R < M_2 / R < M_1 / R < M_0 / R = G / R$$

– произвольная максимальная цепь длины 3 в G / R. Тогда $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ является максимальной цепью в G длины 3 и поэтому для некоторого $i > 0$ подгруппа M_i является либо субмодулярной, либо слабо σ-перестановочной в G. Но тогда M_i / R – либо субмодулярная, либо слабо σ-перестановочная в G / R подгруппа ввиду лемм 1.2 (2) и 1.3 (1). Следовательно, гипотеза выполняется для G / R, поэтому из выбора группы G следует, что G / R σ-разрешима, что противоречит выбору группы G.

Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq R$, то G / N σ-разрешима и, следовательно,

$$R \simeq R / 1 \simeq RN / N$$

является σ-примарной, поэтому G является σ-разрешимой группой. Следовательно R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и R не является σ-примарной группой и, следовательно, абелевой группой. Таким образом, утверждение (1) является верным, поскольку $C_G(R)$ является нормальной подгруппой в G.

Пусть p – любое нечетное простое число, разделяющее $|R|$ и R_p – силовская p-подгруппа в R. Ввиду аргумента Фраттини и утверждения (1) следует, что существует максимальная подгруппа M в G такая, что $N_G(R_p) \leq M$ и $G = RM$. Ясно, что $M_G = 1$. Более того, для некоторой силовской p-подгруппы G_p группы G имеем $R_p = G_p \cap R$, поэтому

$$G_p \leq N_G(R_p) \leq M$$

и, следовательно, p не делит $|G : M|$.

(2) *$D := M \cap R$ не является нильпотентным. Следовательно, $D \nleq \Phi(M)$ и D не является p-группой.*

Предположим, что это неверно. Тогда D – нильпотентная нормальная подгруппа в M и R_p является силовской p-подгруппой в D. Более того, R_p нормальна в M, поскольку D нильпотентна и, следовательно, подгруппа $Z(J(R_p)$ нормальна в M. Поскольку $M_G = 1$, то

$$N_G(Z(J(R_p))) = M.$$

Тогда $N_R(Z(J(R_p))) = D$ – нильпотентная группа. Отсюда следует, что R p-нильпотентна по теореме Глаубермана – Томпсона о нормальных p-дополнениях. Но тогда R – p-группа, противоречие. Следовательно, имеем (2).

(3) $V = 1$ *для любой субнормальной подгруппы из G, содержащейся в максимальной подгруппе F из G с условием $F_G = 1$.*

Предположим, что $V \neq 1$. Утверждение (1) влечет, что

$$1 < V^G = V^{RF} = V^F \leq F_G$$

согласно [15, часть A, лемма 14.3], что противоречит условию. Таким образом, утверждение (1) является верным.

(4) $V^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$ *для любой неединичной σ-субнормальной подгруппы V группы G.*

Действительно, предположим, что $V^{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$. Тогда V σ-нильпотентна и поэтому для некоторого i имеет место

$$1 < O_{\sigma_i}(V) \leq O_{\sigma_i}(G)$$

ввиду леммы 1.2 (4), что противоречит утверждению (1).

(5) *Если H является слабо σ-перестановочной подгруппой G, содержащейся в максимальной подгруппе K группы G с уловием $K_G = 1$, то для некоторой σ-субнормальной подгруппы T группы G имеет место $G = HT$ и $H \cap T = 1$.*

Согласно определению слабо σ-перестановочной подгруппы, в G существуют σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и

$$H \cap T \leq S \leq H.$$

Предположим, что $S \neq 1$. Тогда $S_G = 1 = K_G$, поэтому $S^G / S_G = S^G / 1 \simeq S^G$ является неединичной σ-нильпотентной подгруппой в G и поэтому для некоторого i имеет место

$$1 < O_{\sigma_i}(S^G) \leq O_{\sigma_i}(G),$$

что противоречит утверждению (1). Значит $S = 1$ и поэтому $T \cap H = 1$.

(6) *M не является ни слабо σ-перестановочной, ни субмодулярной в G. Следовательно, M σ-разрешима.*

Предположим, что M является слабо σ-перестановочной в G. Тогда для некоторой σ-субнормальной подгруппы T группы G имеет место $G = MT$ и $M \cap T = 1$ по утверждению (5). Более того, $W := T^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$ и W – субнормальная в G подгруппа согласно лемме 1.2 (5).

Пусть теперь L – минимальная субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в W. Тогда $L \leq R$, поэтому p делит $|L|$, где $|L|$ делит $|T| = |G : M|$. Но p не делит $|G : M|$, поскольку $G_p \leq M$, противоречие. Следовательно, M не является слабо σ-перестановочной в G.

Предположим, что M субмодулярна в G. Тогда M модулярна в G и поэтому

$$G \simeq G / M_G = G / 1$$

сверхразрешима согласно [1, лемма 5.1.2]. Это противоречие завершает доказательство первой части утверждения (6). И тогда в любой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 = M < G$ длины 3 группы G одна из подгрупп M_3 или M_2 является по условию либо слабо σ-перестановочной, либо субмодулярной в G. В первом случае эта подгруппа слабо σ-перестановочна в M согласно лемме 1.3 (3). Во втором случае эта подгруппа субмодулярна в M согласно лемме 1.4 (2). Таким образом, гипотеза сохраняется в M и поэтому M σ-разрешима ввиду выбора группы G.

(7) $R < G$.

Предположим, что $R = G$ – простая неабелева группа. И допустим, что некоторая собственная неединичная подгруппа A группы G является σ-субнормальной в G. Тогда в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой для всех $i = 1, \ldots n$. Без ограничения общности можно считать, что $V = A_{n-1} < G$. Тогда $V_G = 1$, поскольку группа $G = R$ является простой, поэтому $G \simeq G / 1$ является σ-примарной. Но тогда G σ-нильпотентна, противоречие. Таким образом, каждая собственная неединичная подгруппа группы G не является σ-субнормальной в G.

Предположим теперь, что некоторая собственная неединичная подгруппа H группы G является субмодулярной в G, и пусть V – максимальная модулярная подгруппа группы G такая, что $H \leq V$. Тогда V – максимальная подгруппа в G такая, что $G / V_G = G / 1$ сверхразрешима согласно [1, 5.1.2], противоречие. Следовательно, каждая собственная субмодулярная подгруппа группы G тривиальна.

Пусть Q – силовская q-подгруппа в G, где q – наименьшее простое число, делящее $|G|$, и пусть L – максимальная подгруппа в G, содержащая Q.

Тогда с учетом [14, IV, 2.8], $|Q|>q$. Пусть V – максимальная подгруппа в Q. Если $|V|=q$, то Q абелева, поэтому $Q<L$. Следовательно, существует 3-максимальная подгруппа W в группе G такая, что $V\le W$. Но тогда некоторая собственная неединичная подгруппа группы G либо субмодулярна, либо σ-субнормальна в G, противоречие. Следовательно, $|V|>q$, что снова влечет, что некоторая собственная неединичная подгруппа группы G либо субмодулярна, либо σ-субнормальна в G. Это противоречие показывает, что утверждение (7) является верным.

(8) *Если* $G_p\le V\le M$, *то* V *не является ни слабо* σ*-перестановочной, ни субмодулярной в* G. Предположим, что для некоторой σ-субнормальной подгруппы T в G имеет место $G=VT$ и $V\cap T=1$. Ясно, что $1<T<G$. Тогда подгруппа $T^{\mathfrak{N}_\sigma}$ не является тривиальной согласно утверждению (4) и эта подгруппа является субнормальной G по лемме 1.2 (5). Следовательно, для минимальной субнормальной подгруппы Z группы G, содержащейся в $T^{\mathfrak{N}_\sigma}$ имеет место $Z\le T$ и $Z\le R$. Тогда Z является p'-группой, поскольку

$$V\cap T=1 \text{ и } G_p\le V.$$

С другой стороны, Z – это минимальная нормальная подгруппа в R, поэтому p делит $|Z|$. Это противоречие показывает, что V не является слабо σ-субнормальной в G.

Теперь предположим, что V субмодулярна в G. С учетом утверждения (3) и леммы 1.4 (3), V – собственная абелева подгруппа в M.

Предположим, что $V\le W<F<M$, где F максимальна в M, а W максимальна в F. Тогда хотя бы одна из подгрупп W или F является абелевой субмодулярной подгруппой в G. Следовательно, G_p субмодулярна в G. Следовательно,

$$G_p\le C_G(R)$$

по лемме 1.4 (3), противоречие. Следовательно, $|G_p|=p$ и $G_p=V$ – максимальная подгруппа в M, поэтому $G_p=R_p$ является субмодулярной в R, противоречие.

Следовательно, утверждение (8) является верным.

(9) $M=D\rtimes L$ *– разрешимая группа, где* L *– группа простого порядка.*

Ввиду [14, IV, 7.4] для некоторой максимальной подгруппы L группы M имеем $G_p\le L$ поскольку $p>2$ и G неразрешима. Сначала покажем, что $G_p=L$. Действительно, предположим, что для некоторой максимальной подгруппы V в L имеем $G_p\le V$. Тогда в каждой максимальной цепи

$$V=M_3<M_2<M_1=M<M_0=G$$

из G длины 3 все подгруппы M_3, M_2 и M_1 не являются ни слабо σ-перестановочными, ни субмодулярными в G, противоречие.

Следовательно, $G_p=L$ – максимальная подгруппа в M, поэтому M разрешима согласно [14, IV, 7.4]. Если $G_p\le D$, то

$$D=M\cap R=M,$$

поскольку $L\ne D$ по утверждению (2), откуда следует, что $R=G$ вопреки утверждению (7). Следовательно, $G_p\le D$, поэтому $DL=M$. Поэтому в случае $|G_p|=p$ имеем $D\cap L=1$, откуда следует, что $M=D\rtimes L$ а значит, утверждение (9) верно, поскольку M разрешима.

Наконец, предположим, что $|G_p|>p$. Прежде заметим, что L не является ни слабо σ-перестановочной, ни субмодулярной в G по утверждению (8). Но с другой стороны, M также не является ни слабо σ-перестановочной, ни субмодулярной в G по утверждению (6). Следовательно, любая максимальная подгруппа в $L=G_p$ либо слабо σ-перестановочна, либо субмодулярна в G.

Из $G_p\nleq D$ следует, что для некоторой максимальной подгруппы V из G_p имеем

$$R_p=R\cap G_p\le V.$$

Предположим, что V слабо σ-перестановочна в G. Тогда для σ-субнормального дополнения T для V в G имеем $T\cap R_p=1$. По лемме 1.2 (5) и утверждению (3) для некоторой минимальной субнормальной подгруппы Z группы G имеем $Z\le T^{\mathfrak{N}_\sigma}\le T$. Следовательно, $Z\cap R=1$ и тогда

$$ZR=Z\times R$$

ввиду [15, гл. А, 14.3], вопреки утверждению (1).

Следовательно, $1<V$ субмодулярна в G. Тогда R_p субмодулярна в G и, значит, R_p субмодулярна в R по лемме 1.3 (3), противоречие. Значит, утверждение (9) является верным.

Заключительное противоречие. Из утверждения (9) следует, что $|D|$ – степень простого числа, что противоречит утвеждению (2). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt*, *R.* Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

2. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

3. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

4. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

5. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

6. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

7. *Skiba*, *A.N.* On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4. – P. 281–309.

8. *Huang*, *J.* On weakly σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2018. – Vol. 92, № 1-2, P. 201–216.

9. *Zimmermann*, *I.* Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

10. *Spencer*, *A.E.* Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.

11. *Schmid*, *R.* Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmid // Abhan. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – Vol. 34. – P. 115–125.

12. *Wang*, *Y.* *c*-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.

13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – 1978. – Москва: Наука, 1978.

14. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

15. *Doerk*, *K. Finite Soluble Groups* / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

Поступила в редакцию 28.04.2021.