МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

TRIGONOMETRIC PADÉ APPROXIMANTS OF SPECIAL FUNCTIONS

N.V. Ryabchenko

Francisk Skorina Gomel State University

Для функций $H_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx / (\gamma)_k$, где $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$ и их тригонометрических аппроксимаций Паде $\pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ найдена асимптотика убывания разности $H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ в случае, когда $0 \le m \le m(n)$, $m(n) = o(n)$ и $n \to \infty$. При сделанных предположениях установлено, что тригонометрические аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ приближают функцию H_γ равномерно на $\mathbb{R}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Ключевые слова: *аппроксимации Паде*, *асимптотические равенства*, *наилучшие равномерные приближения*, *тригонометрические аппроксимации*.

For the functions $H_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx / (\gamma)_k$, where $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$ and their trigonometric Padé approximations $\pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ the asymptotics of decreasing difference $H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ in the case is found, where $0 \le m \le m(n)$, $m(n) = o(n)$, as $n \to \infty$. Particulary, we determine that, under the same assumption,the trigonometric Padé approximations $\pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ converge to H_γ uniformly on the $\mathbb{R}$ with the asymptotically best rate.

Keywords: *Padé approximations*, *asymptotic equality*, *best uniform approximation*, *trigonometric Padé approximations*, *rational approximations*.

Введение

Пусть $f \in C_{2\pi}$, т. е. является вещественной 2π-периодической функцией и представима в каждой точке прямой рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (0.1)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа.

Обозначим через $\mathcal{R}^t_{n,m}$ класс всех рациональных тригонометрических функций

$$r^t(x) = p^t_n(x) / q^t_m(x),$$

у которых $p^t_n(x)$, $q^t_m(x)$ являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами и $\deg p^t_n \le n$, $\deg q^t_m \le m$. Определим наилучшие равномерные рациональные тригонометрические приближения f в классе $\mathcal{R}^t_{n,m}$, полагая

$$\mathrm{R}^t_{n,m}(f) := \inf\left\{\| f - r^t \| : r^t \in \mathcal{R}^t_{n,m}\right\},$$

а $\| g \| = \max_{x\in\mathbb{R}} | g(x) |$.

Тригонометрической аппроксимацией Паде функции *f*, заданной рядом (0.1), назовем такую рациональную дробь $\pi^t_{n,m}(x)$ из класса $\mathcal{R}^t_{n,m}$, которая непрерывна на $\mathbb{R}$, представима своим рядом Фурье и имеет максимально возможный (по числу свободных параметров) порядок касания к ряду (0.1), т. е.

$$f(x) - \pi^t_{n,m}(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx), \ (0.2)$$

где $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ – действительные числа. Отметим, что в случае произвольного ряда Фурье (0.1) тригонометрические аппроксимации Паде могут не существовать [1].

Предполагая, что параметр $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \ldots\}$, рассмотрим семейство функций $\mathcal{H}^t = \{H_\gamma\}$, представимых в виде

$$H_\gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{(\gamma)_k}.$$

Основной целью данной работы является доказательство следующих теорем.

***Теорема* 0.1.** *Пусть* $H_\gamma \in \mathcal{H}^t$. *Тогда для любых целых неотрицательных n и m тригонометрические аппроксимации Паде* $\pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$

существуют и равномерно по всем $x \in \mathbb{R}$ *и* m, $n \geq m-1$, *при* $n \to \infty$

$$H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\left\{ie^{2mz/(n+m)} z^{n+m+1}\left(1+o(1)\right)\right\}. \quad (0.3)$$

***Теорема* 0.2.** *Пусть* $H_\gamma \in \mathcal{H}^t$. *Тогда если* $m(n) = o\left(n\right)$, *то равномерно по всем* m, $0 \leq m \leq m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$R^t_{n,m}(H_\gamma) \sim \| H_\gamma - \pi^t_{n,m}(\cdot; H_\gamma) \| \sim \frac{m! \,|\, (\gamma)_n \,|}{|\, (\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1} \,|}.$$

Равномерно по всем m, $n \geq m-1$ *и* $n \to \infty$

$$R^t_{n,m}(H_\gamma) \asymp \| H_\gamma - \pi^t_{n,m}(\cdot; H_\gamma) \| \asymp \frac{m! \,|\, (\gamma)_n \,|}{|\, (\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1} \,|}.$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называются эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\alpha_n / \beta_n \to 1$ при $n \to \infty$. Если существуют положительные постоянные A и B, для которых $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, то говорят, что б. м. α_n и β_n имеют одинаковый порядок при ($\alpha_n \asymp \beta_n$).

Теоремы 0.1 и 0.2 при более ограничительных условиях $m(n) = o(n^{2/3})$ были доказаны ранее в работе [2]. Метод работы [2] опирается на детерминантные представления числителя и знаменателя дроби $\pi^t_{n,m}(x)$, которые получены в [1]. Приведенные далее доказательства теорем 0.1 и 0.2 основаны на связи алгебраических и тригонометрических аппроксимаций Паде и метод их доказательства отличен от метода работы [2].

1 Доказательство теоремы 0.1

Рассмотрим алгебраические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$ функции Миттаг – Леффлера

$$F_\gamma(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{(\gamma)_k}.$$

В работе [3] установлено, что при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ для неотрицательных целых n и m аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$ существуют, являются рациональными дробями вида

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; F_\gamma) =$$

$$= \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \ldots + q_m z^m},$$

где $p_j, q_j \in \mathbb{R}$ и равномерно по всем $|\, z \,| \leq 1$ и m, $n \geq m-1$ и $n \to \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) =$$

$$= \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1}\left(1+o(1)\right). \quad (1.1)$$

Далее будем опираться на следующую лемму [4, с. 345].

***Лемма* 1.1.** *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Положим $c_k = a_k - ib_k$ (i – *мнимая единица*), *и рассмотрим функцию*

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k.$$

Тогда при $z = e^{ix}$ $f(x) = Re\left\{F(z)\right\}$, *а*

$$Re\left\{\pi_{n,m}(z; F)\right\} = \quad (1.2)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m \left\{Re(p_j \bar{q}_k)\cos(j-k)x - Im(p_j \bar{q}_k)\sin(j-k)x\right\}}{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \left\{Re(q_j \bar{q}_k)\cos(j-k)x - Im(q_j \bar{q}_k)\sin(j-k)x\right\}},$$

где числитель и знаменатель $\pi_{n,m}(z; F)$ *имеют вид*

$$P_n(z; F) = \sum_{j=0}^n p_j z^j, \; Q_m(z; F) = \sum_{j=0}^m q_j z^j.$$

Возьмём в лемме 1.1 в качестве $f(x)$ функцию $H_\gamma(x)$. Тогда при $z = e^{ix}$

$$H_\gamma(x) = Re\left\{-iF_\gamma(z)\right\},$$

а (1.2) примет вид

$$Re\left\{\pi_{n,m}(z; -iF_\gamma)\right\} = \frac{-\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m p_j q_k \sin(j-k)x}{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m p_j p_k \cos(j-k)x}. \quad (1.3)$$

Умножая соотношение (1.1) на $-i$ и выделяя действительную часть в левой и правой части полученного равенства, при $z = e^{ix}$ получим

$$H_\gamma(x) - Re\left\{\pi_{n,m}(z; -iF_\gamma)\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\left\{ie^{2mz/(n+m)} z^{n+m+1}\left(1+o(1)\right)\right\}.$$

Из представления (1.3) следует, что

$$\pi^t_{n,m}(x; H_\gamma) = Re\left\{\pi_{n,m}(z; -iF_\gamma)\right\}.$$

Тем самым теорема 0.1 доказана. □

2 Доказательство теоремы 0.2

Предположим, что $m(n) = o(n)$ и $0 \leq m \leq m(n)$. Тогда из (0.3) следует, что

$$H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} Re\left\{ie^{i(n+m+1)x}\left(1+o(1)\right)\right\}. \quad (2.1)$$

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{m+1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} ie^{i(n+m+1)x}.$$

Тогда опираясь на (2.1) легко показать, что при достаточно больших n знак разности $H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ совпадает со знаком $Re\varphi(x)$.

Когда x пробегает весь промежуток $[0, 2\pi)$, точка $(n+m+1)x$ пробегает весь полуинтервал $[0, 2\pi(n+m+1))$. Поэтому существуют $2(n+m+1)$ таких действительных чисел x_j, $j = 1, 2, \ldots, 2(n+m+1)$, что

$$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{2(n+m+1)} < 2\pi,$$

$$\varphi(x_j) = \frac{(-1)^{m+j} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}.$$

Следовательно, в точках x_j разность $H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma)$ принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае, согласно рациональному аналогу известной теоремы Валле Пуссена (см., например, [5]),

$$\mathrm{R}^t_{n,m}(H_\gamma) \ge \min_{1\leqslant j\leqslant 2(n+m+1)} \left| H_\gamma(x_j) - \pi^t_{n,m}(x_j; H_\gamma) \right| \ge$$

$$\ge \frac{m!(\gamma)_n}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}\left(1 - |o(1)|\right).$$

С другой стороны

$$\mathrm{R}^t_{n,m}(H_\gamma) \le \max_{x\in\mathbb{R}} \left| H_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; H_\gamma) \right| \le$$

$$\le \frac{m!(\gamma)_n}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}\left(1 + |o(1)|\right).$$

Таким образом, первая часть теоремы 0.2 доказана. Вторая её часть доказывается аналогично. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лабыч*, *Ю.А*. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

2. *Лабыч*, *Ю.А*. О рациональной аппроксимации периодической функции / Ю.А. Лабыч // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2003. – № 3. – С. 77–86.

3. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

4. *Бейкер*, *Дж.* мл. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

5. *Lorentz*, *G.G*. Constructive Approximation, Advanced problems / G.G. Lorentz, M. v. Golitschek, Y. Makovoz. – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. – 651 p.

Поступила в редакцию 05.03.2021.