МАТЕМАТИКА

УДК 517.9 + 537.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ В СЛОЖНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, В.В. Орлов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RANDOM DISTURBANCES ON OSCILLATIONS IN COMPLEX QASILINEAR SYSTEMS WITH DELAY

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, V.V. Orlov

Francisk Skorina Gomel State University

Исследованы вопросы воздействия случайных сил на колебательные процессы в системах, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащих как звенья с сосредоточенными параметрами, так и звенья с распределенными параметрами и запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями. Описывается поэтапное применение метода усреднения нелинейной механики и метода уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова к исследованию таких систем.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения*, *запаздывание*, *стохастические дифференциальные уравнения в частных производных*, *звенья с сосредоточенными параметрами*, *звенья с распределенными параметрами*, *метод усреднения нелинейной механики*, *метод уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова*.

The questions of the influence of random forces on oscillatory processes in systems described by differential equations containing both links with lumped parameters and links with distributed parameters and delay, connected by delay connections, are investigated. The step-by-step application of the averaging method of nonlinear mechanics and the method of Fokker – Planck – Kolmogorov equations to the study of such systems is described.

Keywords: *stochastic differential equations*, *delay*, *stochastic partial differential equations*, *units with lumped parameters*, *units with distributed parameters*, *averaging method of nonlinear mechanics*, *method of Fokker – Planck – Kolmogorov equations.*

Введение

В современной науке и технике, особенно в таких отраслях, как теория управления, радиофизика, радиотехника и электроника необходимо исследовать динамические системы с учетом случайных возмущений. Исследование влияния случайных сил, шумов, других случайных факторов на колебательные процессы в различных сложных технических системах, содержащих как звенья с сосредоточенными параметрами, так и звенья с распределенными параметрами и запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями, является важной задачей и имеет большое теоретическое и практическое значение [1]–[2]. В работах [3]–[4] доказаны теоремы о существовании и единственности, непрерывной зависимости от параметра и начальных условий решений сложных стохастических дифференциально-функциональных систем. Результаты работ [3]–[4] обосновывают применимость к подобным системам метода усреднения нелинейной механики в сочетании с методом уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК). Рассмотрим поэтапное применение методов усреднения нелинейной механики и уравнений ФПК для данного класса динамических систем.

1 Постановка задачи

Рассмотрим возмущенную колебательную систему, описываемую квазилинейными стохастическими дифференциально-функциональными уравнениями:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(t,\bar{x})}{\partial t^2} &= \mathcal{L}_{\bar{x}}^{(2m)}[\bar{x}, u(t,\bar{x})] + \\
&+\varepsilon f\left[\nu_s t, \bar{x}, u(t-\Delta_r,\bar{x}), y_k(t-\Delta_r), \frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial t},\right. \\
&\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial x_l}, \frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt}\right] + \\
&+\sqrt{\varepsilon} g\left[\nu_s t, \bar{x}, u(t-\Delta_r,\bar{x}), y_k(t-\Delta_r), \frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial t},\right. \\
&\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial x_l}, \frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt}\right]\frac{dw_0(t)}{dt};
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 y_k(t) &= \varepsilon \tilde{\varphi}_k\left[\nu_s t, u(t-\Delta_r,\bar{\zeta}), y_p(t-\Delta_r),\right. \\
&\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial t}, \frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial x_l}, \frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt}\right] + \\
&+\sqrt{\varepsilon}\tilde{h}_k\left[\nu_s t, u(t-\Delta_r,\bar{\zeta}), y_p(t-\Delta_r), \frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial t},\right.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial x_l},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt}\right]\frac{dw_k(t)}{dt}$$

$$(k,\ p=\overline{1,K},\ r=\overline{0,R},\ l=\overline{1,n},\ s=\overline{1,M}).$$

с краевым и начальными условиями

$$\mathcal{L}_{\bar{x}}^{(q,\beta)}[u(t,\bar{x})]_{|x\in S}=0,\ q=\overline{1,m}, \qquad (1.3)$$

$$u(t,\bar{x})_{|t\in E_0}=\varphi_0(t,\bar{x}), \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t}_{|t\in E_0}=\varphi_1(t,\bar{x}), \qquad (1.5)$$

$$y_k(t)_{|t\in E_0}=h_{k0}(t),\ k=\overline{1,K}, \qquad (1.6)$$

$$\frac{dy_k(t)}{dt}_{|t\in E_0}=h_{k1}(t),\ k=\overline{1,K}, \qquad (1.7)$$

где $t\in E_0\bigcup[0,T]\subset R$, $T<\infty$, E_0 – начальное множество значений времени t вида $[-\Delta_{max},0]$, где $\Delta_{max}=\max\{\Delta_0,\Delta_1,...,\Delta_R\}$, $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – n-мерный вектор пространственных координат, принадлежащий ограниченной области $\Gamma\bigcup S$, $\mathcal{L}_{\bar{x}}^{(2m)}$ – линейный дифференциальный оператор эллиптического типа порядка $2m$ с дифференцированием по пространственным координатам, имеющий постоянные или зависящие от $\bar{x}$ коэффициенты, $f,g,\tilde{\varphi}_k,\tilde{h}_k$, $k=\overline{1,K}$ – нелинейные функционалы, периодические с периодом 2π по аргументам $\nu_s t$ и удовлетворяющие определенным условиям гладкости, $w_k(t)$, $k=\overline{0,K}$ – стохастически независимые винеровские процессы единичной интенсивности, ω_k, $k=\overline{1,K}$, ν_s, $s=\overline{1,M}$ – положительные постоянные, Δ_r, $r=\overline{0,R}$ – неотрицательные постоянные ($\Delta_0=0$), $\bar{\zeta}\in\Gamma$ – некоторое фиксированное значение $\bar{x}$, $\mathcal{L}_{\bar{x}}^{(q,\beta)}$ – линейные дифференциальные операторы порядка $\beta\le 2m-1$, $h_{k0}(t)$, $h_{k1}(t)$, $k=\overline{1,K}$, $\varphi_0(t,\bar{x})$, $\varphi_1(t,\bar{x})$ – функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости, $\varepsilon>0$ – малый параметр.

2 Исследование системы методами усреднения нелинейной механики и марковских диффузионных процессов

Наряду с системой (1.1)–(1.7) рассмотрим однородную краевую задачу

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\bar{x}}^{(2m)}[\bar{x},X(\bar{x})]+\lambda X(\bar{x})=0,\\ \mathcal{L}_{\bar{x}}^{(q,\beta)}[X(\bar{x})]_{|x\in S}=0,\ q=\overline{1,m}.\end{gathered} \qquad (2.1)$$

Пусть задача (2.1) имеет положительные собственные значения $\lambda_s=\Omega_s^2$, $s=1,2,...$, которые соответствуют собственным функциям $X_s(\bar{x})$.

Будем искать решение возмущенной задачи (1.1) в виде ряда

$$u(t,\bar{x})=\sum_{n=1}^{\infty}z_n(t)X_n(\bar{x}), \qquad (2.2)$$

где $z_n(t)$, $n=1,2,...$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (2.2) в уравнения (1.1), (1.2) и начальные условия (1.4), (1.5), умножая (1.1), (1.4), (1.5) последовательно на $X_n(\bar{x})$, $n=1,2,...$ и интегрируя по области Γ, получаем счетную систему обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d^2z_n(t)}{dt^2}+\Omega_n^2z_n(t)=\varepsilon f_n[\nu_s t,z_p(t-\Delta_r),y_k(t-\Delta_r),\\ \dot{z}_p(t-\Delta_r),\dot{y}_k(t-\Delta_r)]+\sqrt{\varepsilon}f_n[\nu_s t,z_p(t-\Delta_r),\\ y_k(t-\Delta_r),\dot{z}_p(t-\Delta_r),\dot{y}_k(t-\Delta_r)]\frac{dw_0(t)}{dt},\end{gathered} \qquad (2.3)$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2y_k(t)}{dt^2}+\omega_k^2y_k(t)=\varepsilon\tilde{\tilde{\varphi}}_k\left[\nu_s t,z_p(t-\Delta_r),y_l(t-\Delta_r),\right.\\ \dot{z}_p(t-\Delta_r),\dot{y}_l(t-\Delta_r)]+\sqrt{\varepsilon}\tilde{\tilde{h}}_k[\nu_s t,z_p(t-\Delta_r),\\ y_l(t-\Delta_r),\dot{z}_p(t-\Delta_r),\dot{y}_l(t-\Delta_r)]\frac{dw_k(t)}{dt},\end{gathered} \qquad (2.4)$$

$$(n,p=1,2,...;\ k,l=\overline{1,K};\ r=\overline{0,R};\ s=\overline{1,M})$$

с начальными условиями:

$$z_n(t)_{|t\in E_0}=\varphi_n^0(t),\ \frac{dz_n(t)}{dt}_{|t\in E_0}=\varphi_n^1(t),n=1,2,..., \qquad (2.5)$$

$$y_k(t)_{|t\in E_0}=h_{k0}(t),\ \frac{dy_k(t)}{dt}_{|t\in E_0}=h_{k1}(t),k=\overline{1,K}. \qquad (2.6)$$

Пусть выполняются условия резонанса

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{N}p_n^{(i,\sigma)}\Omega_n+\sum_{k=1}^{K}q_k^{(i,\sigma)}\omega_k+\sum_{\mu=1}^{M}r_\mu^{(i,\sigma)}\nu_\mu\approx\Omega_\sigma\\ (\sigma=\overline{1,N};\ i=\overline{1,J_\sigma}),\\ \sum_{n=1}^{N}p_n^{(i,l)}\Omega_n+\sum_{k=1}^{K}q_k^{(i,l)}\omega_k+\sum_{\mu=1}^{M}r_\mu^{(i,l)}\nu_\mu\approx\omega_l\\ (l=\overline{1,K};\ i=\overline{1,J_l}),\end{gathered} \qquad (2.7)$$

где $p_n^{(i,\sigma)},q_k^{(i,\sigma)},r_\mu^{(i,\sigma)},p_n^{(i,l)},q_k^{(i,l)},r_\mu^{(i,l)}$ – небольшие целые числа, а резонансов другого вида нет. Тогда $z_n(t)$ при $n>N$ будут ничтожно малы и ими можно пренебречь, сводя бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений (2.3)–(2.6) к конечной, состоящей из $N+K$ уравнений.

Приведем систему (2.3)–(2.6) к стандартной по Н.Н. Боголюбову форме. Для этого введем новые медленно изменяющиеся комплексно сопряженные переменные $x_n(t)$ и $x_{-n}(t)=\overline{x_n(t)}$, $\tilde{y}_k(t)$ и $\tilde{y}_{-k}(t)=\overline{\tilde{y}_k(t)}$ с помощью соотношений

$$\begin{gathered}z_n(t)=x_n(t)e^{i\Omega_n t}+x_{-n}(t)e^{-i\Omega_n t},\\ \dot{z}_n(t)=i\Omega_n\left[x_n(t)e^{i\Omega_n t}-x_{-n}(t)e^{-i\Omega_n t}\right],\overline{n=1,N},\\ y_k(t)=\tilde{y}_k(t)e^{i\omega_k t}+\tilde{y}_{-k}(t)e^{-i\omega_k t},\\ \dot{y}_k(t)=i\omega_k\left[\tilde{y}_k(t)e^{i\omega_k t}-\tilde{y}_{-k}(t)e^{-i\omega_k t}\right],k=\overline{1,K}.\end{gathered} \qquad (2.8)$$

Исходя из (2.8), несложно получить обратное преобразование вида:

$$x_n(t)=\frac{1}{2}\left(z_n(t)+\frac{\dot z_n(t)}{i\Omega_n}\right)e^{-i\Omega_n t},$$

$$x_{-n}(t)=\frac{1}{2}\left(z_n(t)-\frac{\dot z_n(t)}{i\Omega_n}\right)e^{i\Omega_n t},\ n=\overline{1,N},$$

$$\tilde y_k(t)=\frac{1}{2}\left(y_k(t)+\frac{\dot y_k(t)}{i\omega_k}\right)e^{-i\omega_k t}, \qquad (2.9)$$

$$\tilde y_{-k}(t)=\frac{1}{2}\left(y_k(t)-\frac{\dot y_k(t)}{i\omega_k}\right)e^{i\omega_k t},\ k=\overline{1,K}.$$

Применяя к выражениям (2.9) с учетом уравнений (2.3), (2.4) формулу Ито [1] дифференцирования сложной случайной функции, получаем следующую систему уравнений

$$\frac{dx_n(t)}{dt}=\varepsilon F_n^1[\nu_s t,x_p(t-\Delta_r),\tilde y_l(t-\Delta_r),x_{-p}(t-\Delta_r),$$
$$\tilde y_{-l}(t-\Delta_r),\Omega_p t,\omega_l t,\Delta_r]+\sqrt{\varepsilon}F_n^2[\nu_s t,x_p(t-\Delta_r),$$
$$\tilde y_{-l}(t-\Delta_r),\Omega_p t,\omega_l t,\Delta_r]\frac{dw_0(t)}{dt}, \qquad (2.10)$$
$$\frac{d\tilde y_k(t)}{dt}=\varepsilon Y_k^1[\nu_s t,x_p(t-\Delta_r),\tilde y_l(t-\Delta_r),x_{-p}(t-\Delta_r),$$
$$\tilde y_{-l}(t-\Delta_r),\Omega_p t,\omega_l t,\Delta_r]+\sqrt{\varepsilon}Y_k^2[\nu_s t,x_p(t-\Delta_r),$$
$$\tilde y_l(t-\Delta_r),x_{-p}(t-\Delta_r)\tilde y_{-l}(t-\Delta_r),\Omega_p t,\omega_l t,\Delta_r]\frac{dw_k(t)}{dt}$$
$$(n=\overline{\pm1,\pm N},k=\overline{\pm1,\pm K},s=\overline{1,M},$$
$$p=\overline{1,N},l=\overline{1,K},r=\overline{0,R})$$

с начальными условиями вида:

$$x_n(t)_{|t\in E_0}=\frac{i\Omega_n\varphi_n^0(t)+\varphi_n^1(t)}{2i\Omega_n},\ \ n=\overline{\pm1,\pm N}$$

$$\tilde y_k(t)_{|t\in E_0}=\frac{i\omega_k h_{k0}(t)+h_{k1}(t)}{2i\omega_k},\ \ k=\overline{\pm1,\pm K}, \qquad (2.11)$$

где

$$w_{-k}(t)=w_k(t),\ -\omega_{-k}=\omega_k,\ -\Omega_{-n}=\Omega_n,$$
$$F_{-n}^1=F_n^1,\ F_{-n}^2=F_n^2,\ Y_{-k}^1=Y_k^1,\ Y_{-k}^2=Y_k^2,$$
$$\varphi_{-n}^0=\varphi_n^0,\ \varphi_{-n}^1=\varphi_n^1,\ h_{-k0}=h_{k0},\ h_{-k1}=h_{k1},$$
$$\begin{Bmatrix}F_n^1\\ F_n^2\end{Bmatrix}[\nu_s t,x_p(t-\Delta_r),\tilde y_l(t-\Delta_r),x_{-p}(t-\Delta_r),$$
$$\tilde y_{-l}(t-\Delta_r),\Omega_p t,\omega_l t,\Delta_r]=\frac{e^{-i\Omega_n t}}{2i\Omega_n}\begin{Bmatrix}f_n\\ g_n\end{Bmatrix}[\nu_s t,$$
$$x_p(t-\Delta_r)e^{i\Omega_p(t-\Delta_r)}+x_{-p}(t-\Delta_r)e^{-i\Omega_p(t-\Delta_r)},\ldots,$$
$$i\omega_l(\tilde y_l(t-\Delta_r)e^{i\omega_l(t-\Delta_r)}-\tilde y_{-l}(t-\Delta_r)e^{-i\omega_l(t-\Delta_r)})],$$
$$\begin{Bmatrix}Y_k^1\\ Y_k^2\end{Bmatrix}[\nu_s t,x_p(t-\Delta_r),\tilde y_l(t-\Delta_r),x_{-p}(t-\Delta_r),$$
$$\tilde y_{-l}(t-\Delta_r),\Omega_p t,\omega_l t,\Delta_r]=\frac{e^{-i\omega_k t}}{2i\omega_k}\begin{Bmatrix}\tilde{\tilde\varphi}_k\\ \tilde{\tilde h}_k\end{Bmatrix}[\nu_s t,$$
$$x_p(t-\Delta_r)e^{i\Omega_p(t-\Delta_r)}+x_{-p}(t-\Delta_r)e^{-i\Omega_p(t-\Delta_r)},\ldots,$$
$$i\omega_l(\tilde y_l(t-\Delta_r)e^{i\omega_l(t-\Delta_r)}-\tilde y_{-l}(t-\Delta_r)e^{-i\omega_l(t-\Delta_r)})].$$

Мы получили систему стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием в стандартной форме. Отметим, что система (2.3), (2.4) сводится к системе в стандартной форме относительно медленно меняющихся функций $a_k(t)$, $\alpha_k(t),\ k=\overline{1,K},\ b_n(t),\ \beta_n(t),\ n=\overline{1,N}$, если вместо (2.8) применить следующую замену переменных:

$$y_k(t)=a_k(t)\cos[\omega_k t+\alpha_k(t)],$$
$$\dot y_k(t)=-\omega_k a_k(t)\sin[\omega_k t+\alpha_k(t)],\ k=\overline{1,K},$$
$$z_n(t)=b_n(t)\cos[\Omega_n t+\beta_n(t)], \qquad (2.12)$$
$$\dot z_n(t)=-\Omega_n b_n(t)\sin[\Omega_n t+\beta_n(t)],\ n=\overline{1,N},$$

которой соответствует обратное преобразование вида

$$a_k(t)=\left[y_k^2(t)+\frac{1}{\omega_k^2}\dot y_k^2(t)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_k(t)=-\omega_k t-\operatorname{arctg}\frac{\dot y_k(t)}{\omega_k y_k(t)},\ \ k=\overline{1,K},$$

$$b_n(t)=\left[z_n^2(t)+\frac{1}{\Omega_n^2}\dot z_n^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.13)$$

$$\beta_n(t)=-\Omega_n t-\operatorname{arctg}\frac{\dot z_n(t)}{\Omega_n z_n(t)},\ \ n=\overline{1,N}.$$

К системе (2.10) в силу теоремы о непрерывной зависимости от параметров и запаздываний [4] можно применить принцип усреднения на достаточно большом временном интервале.

Усреднение проводится в два этапа. Вначале усредняем нефлуктуационные члены, выделяя при этом переменные вида

$$\zeta_{(i,\sigma)}(t)=\sum_{n=1}^{N}p_n^{(i,\sigma)}\Omega_n t+\sum_{k=1}^{K}q_k^{(i,\sigma)}\omega_k t+\sum_{\mu=1}^{M}r_\mu^{(i,\sigma)}\nu_\mu t-\Omega_\sigma t,$$

$$\zeta_{(i,l)}(t)=\sum_{n=1}^{N}p_n^{(i,l)}\Omega_n t+\sum_{k=1}^{K}q_k^{(i,l)}\omega_k t+\sum_{\mu=1}^{M}r_\mu^{(i,l)}\nu_\mu t-\omega_l t,$$

которые в силу условий резонанса (2.7) будут медленными и сохранятся в усредненных уравнениях. Затем составляем соответствующее уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), в котором также проводим усреднение, но уже во флуктуационных членах.

3 О решении уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова для исследуемых систем

Решая полученное полностью усредненное уравнение ФПК при соответствующих краевых и начальных условиях, можно определить плотность распределения $p(t,x_p,\tilde y_l,x_{-p},\tilde y_{-l})$ и затем найти основные вероятностные характеристики случайных функций $x_p(t),\ \tilde y_l(t)$. Однако аналитическое решение уравнения ФПК для сложных нелинейных систем является довольно трудной задачей [5], разрешимой лишь для некоторых частных случаев системы (1.1), (1.2), в большинстве же случаев для его решения требуется применение численных методов.

Если исходная система (1.1), (1.2) содержит только одно уравнение с сосредоточенными параметрами относительно $y_1(t)$, на систему действует внешняя сила, периодическая с периодом 2π по $\nu_1 t$, и других внешних воздействий нет, а начальные условия (1.4), (1.5) имеют вид

$$u(t,\overline{x})_{|t\in E_0} = p_0 X_{\tilde{s}}(\overline{x}) + \varepsilon\alpha(t,\overline{x}),$$

$$\frac{\partial u(t,\overline{x})}{\partial t}_{|t\in E_0} = q_0 X_{\tilde{s}}(\overline{x}) + \varepsilon\beta(t,\overline{x})$$

и выполняются условия резонанса

$$\Omega_{\tilde{s}} \approx \omega_1 \approx \nu_1,$$

то при достаточно малом положительном ε в системе будут наблюдаться колебания, близкие к одночастотным.

Применяя при сделанных предположениях к системе (2.3), (2.4), в которой $k,l,s=1$, $n,p=\tilde{s}$, преобразования (2.12), (2.13) и формулу дифференцирования Ито, получим систему из трех стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме относительно случайных функций $a_1(t)$, $b_{\tilde{s}}(t)$, $\eta_{1\tilde{s}}(t) = \alpha_1(t) - \beta_{\tilde{s}}(t)$, в которой, как и в соответствующем уравнении ФПК, проведем усреднение.

К полученному полностью усредненному трехмерному уравнению ФПК применим метод разложения стационарного решения по целым степеням амплитуд колебаний, являющийся обобщением метода, предложенного Нгуеном Донг Анем [6] для решения двумерного стационарного уравнения ФПК, соответствующего квазилинейной динамической системе с одной степенью свободы.

Стационарное решение трехмерного уравнения ФПК при сделанных предположениях будет удовлетворять выражению

$$\Phi(a_1, b_{\tilde{s}}, \eta_{1\tilde{s}}) = \ln C + \ln a_1^{\tau_1} + \ln b_{\tilde{s}}^{\tau_2} + \sum_{l,j=-1}^{\infty} \mu_{lj}(\eta_{1\tilde{s}}) a_1^l b_{\tilde{s}}^j, \tag{3.1}$$

где $\Phi(a_1, b_{\tilde{s}}, \eta_{1\tilde{s}}) = \ln p(a_1, b_{\tilde{s}}, \eta_{1\tilde{s}})$, C, τ_1, τ_2 – постоянные, $\mu_{lj}(\eta_{1\tilde{s}})$ – неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению. Подставляя ряд (3.1) в уравнение для логарифма плотности вероятностей $p(a_1, b_{\tilde{s}}, \eta_{1\tilde{s}})$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях a_1 и $b_{\tilde{s}}$, получаем систему разделяющихся дифференциальных уравнений, из которой последовательно находим неизвестные $\mu_{lj}(\eta_{1\tilde{s}})$.

Следует отметить, что данный метод требует довольно трудоёмких расчетов, которые целесообразно проводить с помощью современных пакетов компьютерной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубаник*, *В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Минск: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.

2. *Иваницкая*, *О.В.* Взаимодействие генератора с объемным резонатором при наличии нелинейных связей с запаздыванием / О.В. Иваницкая, В.П. Рубаник // Радиотехника и электроника. – 1987. – Т. 32, № 2. – С. 371–377.

3. *Жогаль*, *С.П.* О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.

4. *Жогаль*, *С.П.* О непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2 (39). – С. 66–69.

5. *Risken*, *H.* The Fokker – Planck equation. Methods of solution and applications / H. Risken. – Berlin: Springer, 1984. – 454 p.

6. *Митропольский*, *Ю.А.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев: Навукова думка, 1992. – 344 с.

Поступила в редакцию 26.04.2021.