

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Е.В. Кузьмина

*Брестский государственный технический университет;
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина*

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL FIRST-ORDER EQUATION WITH THE SPECIAL RATIONAL COEFFICIENT

E.V. Kuzmina

*Brest State Technical University;
A.S. Pushkin Brest State University*

Рассмотрены решения в пространстве обобщенных функций линейного дифференциального уравнения первого порядка, в котором коэффициентом является обобщенная функция, порожденная рациональной функцией $\frac{2x-a}{x^2-ax}$, $a > 0$. Найдены условия существования обобщенного решения задачи Коши, показано, что обобщенное решение существует не для всех рассматриваемых коэффициентов.

Ключевые слова: обобщенная функция, дифференциальное уравнение с обобщенным коэффициентом, аналитическое представление.

Solutions in the space of generalized functions of a linear first-order differential equation in which the coefficient is the generalized function generated by the rational function $\frac{2x-a}{x^2-ax}$, $a > 0$ are considered. Conditions for the existence of a generalized solution to the Cauchy problem are found. It is shown that the generalized solution does not exist for all considered coefficients.

Keywords: generalized functions, differential equation with generalized coefficient, analytical representation.

Введение

Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами имеют формальный характер, так как произведения коэффициентов на решение, входящие в такие уравнения, не определены. Поэтому обобщенная функция не может быть подставлена в уравнение и классическое определение решения для таких уравнений не имеет смысла. Общий подход к введению понятия решения для таких уравнений заключается в том, что обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации гладкими функциями и тогда решением называется предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует. Наибольшее внимание уделялось уравнениям, в которых коэффициенты являются дельта-функциями или, в более общем случае, производными функций ограниченной вариации. Для таких уравнений доказаны теоремы существования решений и им посвящена обширная литература (С. Альберверо [1], С.Т. Завалишин, А.Н. Сесекин [2], Н.В. Лазакович [3] и др.).

Но если коэффициент q не представляется как производная функции ограниченной вариации, то ситуация качественно меняется уже для простейших обыкновенных линейных уравнений первого порядка вида

$$u' + qu = 0.$$

В [4] доказано что, если обобщенная функция q является производной в смысле теории обобщенных функций от локально интегрируемой функции $\ln|x| + M\Theta(x)$, где $\Theta(x)$ есть функция Хэвисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

то обобщенное решение существует только при значениях числа $M = i\pi(1-2m)$, где $m \in \mathbb{Z}$. Это показывает, что утверждение о существовании обобщенного решения в общем случае не выполнено и общая задача заключается в выяснении того, от каких свойств коэффициентов зависит существование обобщенного решения.

При анализе обобщенных решений в [4] использовалось то, что при $x \neq 0$ коэффициент q совпадает с рациональной функцией $\frac{1}{x}$, причем

существенно было то, что в числителе стоит число 1. Это показывает, что общая задача содержательна даже для рациональных коэффициентов специального вида. В данной работе вопрос о существовании обобщенного решения рассмотрен

для уравнений, в которых коэффициенты являются рациональными функциями более общего вида, имеющими особенности в двух точках и показано, какие отличия возникают при переходе к таким более общим уравнениям. Результаты естественным образом переносятся на случай рациональных коэффициентов, имеющих аналогичные особенности в конечном числе точек.

1 Классические, формальные и обобщенные решения задачи Коши

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u' + \frac{2x-a}{x^2-ax}u = 0, \quad a, x \in \mathbb{R}, \quad a > 0. \quad (1.1)$$

Его классические решения есть функции вида

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2-ax}, & x < 0; \\ \frac{C_1}{x^2-ax}, & 0 < x < a; \\ \frac{C_2}{x^2-ax}, & x > a, \end{cases}$$

где C, C_1, C_2 – произвольные постоянные. При $x < 0$ решение задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$ есть функция $u(x) = \frac{C}{x^2-ax}$. При $x \rightarrow -0$ это решение уходит на бесконечность и в классической теории дифференциальных уравнений нет методов, позволяющих естественным образом продолжить это решение для $x > 0$.

Наряду с (1.1) можно рассмотреть аналогичное уравнение в пространстве функций на комплексной плоскости

$$u'(z) + \frac{2z-a}{z^2-az}u(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

где дифференцирование понимается по комплексной переменной z . У этого уравнения решение задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$

является рациональной функцией $u(z) = \frac{C}{z^2-az}$,

однозначно определенной при $z \neq 0, z \neq a$ и, в частности, однозначно определенной на вещественной оси. Обратим внимание на то, что если $b(z)$ – произвольная рациональная функция, то аналогичное уравнение

$$u'(z) + b(z)u(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

может не иметь однозначно определенных аналитических решений, а в уравнении (1.1) коэффициент специально выбран таким, что соответствующее уравнение (1.2) имеет рациональное решение.

Рассмотрим уравнение (1.1) с точки зрения теории обобщенных функций (распределений) [5]. Прежде всего отметим, что функция

$$\frac{2x-a}{x^2-ax} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} \quad (1.3)$$

не является локально интегрируемой и не задает непосредственно обобщенную функцию. Но ей соответствует двухпараметрическое семейство распределений, которые определяются как производные в смысле обобщенных функций от локально интегрируемых функций

$$g(x) = \ln|x| + \ln|x-a| + M_1\Theta(x) + M_2\Theta(x-a), \quad (1.4)$$

где M_1 и M_2 – произвольные комплексные постоянные. Соответствующие распределения есть

$$q = P\left(\frac{1}{x}\right) + P\left(\frac{1}{x-a}\right) + M_1\delta_0 + M_2\delta_1, \quad (1.5)$$

где $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$,

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int \frac{1}{x} \varphi(x) dx$$

и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [5].

Поэтому с уравнением (1.1) связано семейство уравнений вида

$$u' + qu = 0 \quad (1.6)$$

с обобщенными коэффициентами (1.5) и эти уравнения могут иметь разные свойства при разных значениях M_1 и M_2 .

Если коэффициент в уравнении вида (1.6) является непрерывной функцией, то решение задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$ задается формулой

$$u(x) = \frac{1}{a+1} C e^{-g(x)+g(-1)}, \quad (1.7)$$

где g – первообразная для коэффициента. Для любой обобщенной функции q существует первообразная, которая в общем случае также является обобщенной функцией. Если первообразная есть регулярная обобщенная функция, т. е. соответствует обычной локально интегрируемой функции g , то она может быть подставлена в формулу (1.7) и для таких q получаем по этой формуле функцию, определенную на всей прямой, которую будем называть *формальным решением задачи Коши*.

Заметим, что рассматриваемые ниже вопросы связаны с существованием экспоненты в пространстве распределений, так как экспоненту можно определить как сумму ряда

$$e^{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k(x)}{k!}. \quad (1.8)$$

Тогда, если функция g локально ограничена, то ряд (1.8) сходится в пространстве распределений и его сумму естественно считать обобщенным решением рассматриваемого уравнения. Это выполнено, если q является производной функции

ограниченной вариации и, в частности, является суммой дельта-функций.

Для распределений (1.5) первообразные есть локально интегрируемые обычные функции (1.4) и поэтому определены и в явном виде выписываются по формуле (1.7) формальные решения задачи Коши

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2 - ax}, & x < 0; \\ \frac{-Ce^{-M_1}}{x^2 - ax}, & 0 < x < a; \\ \frac{Ce^{-(M_1+M_2)}}{x^2 - ax}, & x > a. \end{cases} \quad (1.9)$$

Таким образом, выбор конкретной обобщенной функции, соответствующей коэффициенту (1.3) (т. е. выбор чисел M_1 и M_2), позволяет задать однозначно определенное продолжение решения задачи Коши через особенности: формальное решение (1.9) задачи Коши однозначно определено не только при $x < 0$, но и при $x > 0$ ($x \neq a$).

Но функции (1.4) не являются локально ограниченными и для них ряд (1.8) может расходиться в пространстве распределений. Полученные ниже результаты позволяют найти те значения M_1 и M_2 , при которых экспоненте из (1.7) можно придать смысл.

Построенное формально решение (1.9) нельзя рассматривать как обобщенную функцию и оно не является обобщенным решением. Этой функции, как и (1.3), при заданных M_1 и M_2 соответствует двухпараметрическое семейство обобщенных функций U . Поэтому при детальном исследовании уравнения (1.1) возникает четырехпараметрическое семейство распределений, которые могут быть кандидатами на обобщенное решение этого уравнения. Основная проблема заключается в том, что при подстановке такого распределения U в уравнение возникает произведение qU , которое не определено в классической теории.

Применим общий подход, согласно которому обобщенный коэффициент q следует заменить на его аппроксимацию гладкими функциями $q_\varepsilon(x)$, где ε – положительный малый параметр, и рассмотреть семейство уравнений

$$u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0. \quad (1.10)$$

Определение 1.1 [4]. Будем говорить, что задача Коши для уравнения (1.1) разрешима в пространстве распределений $D'(R)$, если у семейства $u_\varepsilon(x)$ решений уравнений (1.10), удовлетворяющих условию Коши $u_\varepsilon(x_0) = C_0$, существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon := U$$

в смысле сходимости в $D'(R)$. Распределение U будем называть *обобщенным решением задачи Коши при заданном способе аппроксимации*.

Согласно [4], решение задачи Коши для аппроксимирующего уравнения задается формулой

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{a+1} Ce^{-g_\varepsilon(x)+g_\varepsilon(-1)}, \quad (1.11)$$

где g_ε – первообразная для q_ε . Поэтому вопрос о построении обобщенного решения сводится к нахождению предела в пространстве распределений при $\varepsilon \rightarrow 0$ семейства экспонент (1.11) и основную сложность представляет выяснение того, для каких M_1 и M_2 такой предел существует.

Как уже отмечалось, произведение распределений в общем случае не определено. Если для распределений v и w заданы аппроксимации гладкими функциями $v_\varepsilon \rightarrow v$, $w_\varepsilon \rightarrow w$, то произведения $v_\varepsilon w_\varepsilon$ могут не иметь предела; если предел произведений существует, то его называют *произведением v и w при заданных способах аппроксимации*. Обратим внимание на то, что для более сложных уравнений, содержащих более двух слагаемых, из сходимости семейства решений $u_\varepsilon(x)$ аппроксимирующих уравнений в пространстве распределений не следует, что каждое слагаемое имеет предел, т. е. что определены все произведения, входящие в уравнение. Например, пусть решения семейства уравнений вида

$$u''_\varepsilon + p_\varepsilon u'_\varepsilon + q_\varepsilon u_\varepsilon = 0$$

сходятся к распределению U . Тогда $u''_\varepsilon \rightarrow U''$ и $p_\varepsilon u'_\varepsilon + q_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow -U''$, но при этом может оказаться, что произведения $p_\varepsilon u'_\varepsilon$ и $q_\varepsilon u_\varepsilon$ не имеют предела.

Для уравнений вида (1.10) из того, что $u_\varepsilon \rightarrow U$, следует, что $q_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow -U'$, поэтому обобщенное решение U должно быть таким распределением, для которого определено в указанном смысле произведение qU . Здесь распределение q порождено рациональной функцией (1.3), основной результат работы заключается в том, что обобщенное решение существует только для тех распределений (1.5), при которых формальное решение также является рациональной функцией, т. е. когда

$$e^{-M_1} = -1, e^{-M_2} = -1.$$

В [4] этот общий подход был применен для исследования уравнения с коэффициентом $\frac{1}{x}$, имеющим особенность в одной точке. В данной работе он применен для уравнений с коэффициентом, имеющим особенность в двух точках: 0 и a .

2 Решения аппроксимирующих уравнений

Для коэффициента (1.5) будем использовать аппроксимирующее семейство, порожденное аналитическим представлением

$$q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [q^+(x+i\varepsilon) - q^-(x-i\varepsilon)],$$

где q^+ – функция, аналитическая в верхней полуплоскости, q^- – в нижней полуплоскости [7]. Распределение называется *рациональным*, если в его аналитическом представлении функции $q^\pm$ являются рациональными.

Для распределения $P\left(\frac{1}{x}\right)$ соответствующее аппроксимирующее семейство есть

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon} \right] = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2},$$

а для δ -функции – семейство

$$\frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Поэтому для распределения (1.5) аппроксимирующее семейство может быть записано в виде

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{1}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda) \frac{1}{x-i\varepsilon} + \beta \frac{1}{(x+i\varepsilon)-a} + (1-\beta) \frac{1}{(x-i\varepsilon)-a},$$

где $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{M_1 i}{2\pi}$, $\beta = \frac{1}{2} + \frac{M_2 i}{2\pi}$.

Из этого представления видно, что распределения (1.5) являются рациональными.

Теорема 2.1. Решения задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$ для аппроксимирующих уравнений (1.10) при

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{1}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda) \frac{1}{x-i\varepsilon} + \beta \frac{1}{(x+i\varepsilon)-a} + (1-\beta) \frac{1}{(x-i\varepsilon)-a}$$

представляются в виде

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) \times \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon} \cdot \frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon} \right)^\lambda \left(\frac{x-i\varepsilon-a}{x+i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1+i\varepsilon}{-a-1-i\varepsilon} \right)^\beta \quad (2.1)$$

и при $\varepsilon \leq 1$ для них имеет место оценка

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x| \cdot |x-a|}. \quad (2.2)$$

При $x \neq 0$, $x \neq a$ функции $u_\varepsilon(x)$ точечно сходятся к формальному решению (1.9) и при этом сходимость равномерная вне любой окрестности указанных точек.

Доказательство. Для функции

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \mp i \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

первообразная имеет вид

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) \mp i \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}.$$

Для функции

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon - a} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} \mp i \frac{\varepsilon}{(x-a)^2 + \varepsilon^2},$$

первообразной является

$$\frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) \mp i \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon}.$$

Следовательно, одной из первообразных для $q_\varepsilon(x)$ является функция

$$Q_\varepsilon(x) = \lambda \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) - i \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right] + (1-\lambda) \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) + i \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right] + \beta \left[\frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) - i \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} \right] + (1-\beta) \left[\frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) + i \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} \right].$$

Поэтому, согласно (1.11), решения аппроксимирующих уравнений есть

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{a+1} C e^{-Q_\varepsilon(x) + Q_\varepsilon(-1)}.$$

Для последующего анализа поведения u_ε представим экспоненту в более явном виде.

Пусть $\arg(x+iy)$ есть непрерывная ветвь аргумента комплексного числа $x+iy$, определенная на комплексной плоскости с выброшенной положительной действительной полуосью и принимающая значения на интервале $(0; 2\pi)$. Тогда

$$\arg(x+i\varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon},$$

$$\arg(x-i\varepsilon) = \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}$$

и

$$Q_\varepsilon(x) = \ln|x-i\varepsilon| + i \arg(x-i\varepsilon) - \frac{3\pi}{2}i + \lambda \left[\ln|x+i\varepsilon| + i \arg(x+i\varepsilon) - \frac{\pi}{2}i \right] - \lambda \left[\ln|x-i\varepsilon| + i \arg(x-i\varepsilon) - \frac{3\pi}{2}i \right] + \ln|x-i\varepsilon-a| + i \arg(x-i\varepsilon-a) - \frac{3\pi}{2}i + \beta \left[\ln|x+i\varepsilon-a| + i \arg(x+i\varepsilon-a) - \frac{\pi}{2}i \right] - \beta \left[\ln|x-i\varepsilon-a| + i \arg(x-i\varepsilon-a) - \frac{3\pi}{2}i \right].$$

Равенство

$$\operatorname{Ln}(x+iy) = \ln|x+iy| + i \arg(x+iy)$$

задает непрерывную ветвь логарифма комплексного числа. Это позволяет после преобразований записать Q_ε в виде

$$Q_\varepsilon(x) = \ln|x-i\varepsilon| + i \arg(x-i\varepsilon) -$$

$$\begin{aligned} & -3\pi i + i\lambda [\arg(x+i\varepsilon) - \arg(x-i\varepsilon) + \pi] + \\ & + \ln|x-i\varepsilon-a| + i\arg(x-i\varepsilon-a) + \\ & + i\beta [\arg(x+i\varepsilon-a) - \arg(x-i\varepsilon-a) + \pi] = \\ & = \operatorname{Ln}(x-i\varepsilon) + \lambda \left[\operatorname{Ln} \frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} + \pi i \right] + \\ & + \operatorname{Ln}(x-i\varepsilon-a) + \beta \left[\operatorname{Ln} \frac{x+i\varepsilon-a}{x-i\varepsilon-a} + \pi i \right] - 3\pi i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(-1) &= \operatorname{Ln} \left(\frac{x-i\varepsilon}{-1-i\varepsilon} \right) + \operatorname{Ln} \left(\frac{x-i\varepsilon-a}{-a-1-i\varepsilon} \right) + \\ &+ \lambda \operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \cdot \frac{-1-i\varepsilon}{-1+i\varepsilon} \right] + \beta \operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon-a}{x-i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1-i\varepsilon}{-a-1+i\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} z &= z(x, \varepsilon) = \exp \left(-\operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \cdot \frac{-1-i\varepsilon}{-1+i\varepsilon} \right] \right) = \\ &= \frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon} \cdot \frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon}, \\ l &= l(x, \varepsilon) = \exp \left(-\operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon-a}{x-i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1-i\varepsilon}{-a-1+i\varepsilon} \right] \right) = \\ &= \frac{x-i\varepsilon-a}{x+i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1+i\varepsilon}{-a-1-i\varepsilon}. \end{aligned}$$

После представления рассматриваемой функции $Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(-1)$ в виде суммы логарифмов получаем выражение для экспонент, задающих решения, в виде произведения

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{a+1} C e^{-Q_\varepsilon(x) + Q_\varepsilon(-1)} = \\ &= \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) z^\lambda(x, \varepsilon) l^\beta(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что если число λ целое, то степень z^λ определена однозначно, а при нецелом λ функция z^λ многозначна. Но здесь $|z(x, \varepsilon)| = 1$ и z представляется в виде $z(x, \varepsilon) = e^{i\tau(x, \varepsilon)}$. Поэтому выражение z^λ определено однозначно по формуле $z^\lambda = e^{i\lambda\tau(x, \varepsilon)}$. Аналогично задается ветвь функции l^β .

Оценка (2.2) очевидным образом следует из (2.3).

Найдём предел в смысле точечной сходимости рассматриваемого семейства функций. Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} &\rightarrow \frac{1}{x}, \\ \frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} &\rightarrow \frac{a+1}{x-a}. \end{aligned}$$

Если $x \neq 0$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ значения $z(x, \varepsilon)$ стремятся к 1, причем сходимость неравномерная в окрестности точки 0, так как $z(0, \varepsilon) \rightarrow -1$. При этом, если $x < 0$ значения $z(x, \varepsilon)$ стремятся

к 1 из верхней полуплоскости, поэтому аргумент $\tau(x, \varepsilon)$ стремится к нулю, $\lambda\tau(x, \varepsilon)$ также стремится к нулю и $z(x, \varepsilon)^\lambda$ стремится к 1.

Но если $x > 0$, то значения $z(x, \varepsilon)$ стремятся к 1 из нижней полуплоскости, аргумент $\tau(x, \varepsilon)$ стремится к 2π , $\lambda\tau(x, \varepsilon) \rightarrow \lambda 2\pi$ и $z(x, \varepsilon)^\lambda$ стремится к $e^{i2\pi\lambda}$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z(x, \varepsilon))^\lambda = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ e^{i2\pi\lambda}, & x > 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $l(x, \varepsilon)$ стремится к 1 при $x \neq a$, при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (l(x, \varepsilon))^\beta = \begin{cases} 1, & x < a; \\ e^{i2\pi\beta}, & x > a. \end{cases}$$

Следовательно, при $x \neq 0$, $x \neq a$, семейство $u_\varepsilon(x)$ точно сходится к формальному решению (1.9), так как $e^{i2\pi\lambda} = -e^{-M_1}$, $e^{i2\pi\beta} = -e^{-M_2}$, причем вне окрестностей точек 0 и a сходимость равномерная.

В частности, если числа λ и β целые, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z(x, \varepsilon))^\lambda = 1$, $x \neq 0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (l(x, \varepsilon))^\beta = 1$, $x \neq a$, а тогда $u_\varepsilon(x)$ точно сходится к рациональной

$$\text{функции } \frac{C}{x^2 - ax}. \quad \square$$

3 Существование обобщенных решений

Основной результат работы заключается в исследовании сходимости аппроксимирующих решений (1.11) в пространстве обобщенных функций.

Согласно (2.3), семейство $u_\varepsilon(x)$ представлено в виде произведения четырех семейств, сходящихся в пространстве распределений. Но из сходимости множителей не следует сходимость их произведений и ниже показано, что сходимость имеет место только в особых случаях, когда формальное решение является рациональной функцией.

Теорема 3.1. Если числа λ и β целые, то решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений (1.10) при

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x) &= \lambda \frac{1}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda) \frac{1}{x-i\varepsilon} + \\ &+ \beta \frac{1}{(x+i\varepsilon)-a} + (1-\beta) \frac{1}{(x-i\varepsilon)-a} \end{aligned}$$

имеют предел в пространстве распределений, т. е. существует обобщенное решение задачи Коши. При этом обобщенными решениями могут быть только четыре распределения:

$$1) U_1 = \frac{C}{a} \left[P \left(\frac{1}{x-a} \right) - P \left(\frac{1}{x} \right) + i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda \leq 0$ и $\beta \leq 0$;

$$2) U_2 = \frac{C}{a} \left[P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda \leq 0$ и $\beta > 0$;

$$3) U_3 = \frac{C}{a} \left[P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_a + i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda > 0$ и $\beta \leq 0$;

$$4) U_4 = \frac{C}{a} \left[P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_a + i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda > 0$ и $\beta > 0$.

Доказательство. При целых значениях λ и β все сомножители в (2.3) являются рациональными функциями, а для произведений такого вида условия существования предела в пространстве распределений получены в [6]. Поэтому утверждения теоремы 3.1 являются следствием общих результатов из [6]. Чтобы не записывать довольно громоздкую формулировку общего результата из [6], проведем явное доказательство.

Используя (2.1), запишем решения $u_\varepsilon(x)$ в виде

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C}{a+1} (1+i\varepsilon)^{1-\lambda} (1-i\varepsilon)^\lambda \times \\ \times (a+1+i\varepsilon)^{1-\beta} (a+1-i\varepsilon)^\beta \cdot \widetilde{u_\varepsilon(x)},$$

где

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{1}{(x+i\varepsilon)^\lambda} \frac{1}{(x-i\varepsilon)^{1-\lambda}} \times \\ \times \frac{1}{(x+i\varepsilon-a)^\beta} \frac{1}{(x-i\varepsilon-a)^{1-\beta}}.$$

Числовой множитель

$$\frac{C}{a+1} (1+i\varepsilon)^{1-\lambda} (1-i\varepsilon)^\lambda (a+1+i\varepsilon)^{1-\beta} (a+1-i\varepsilon)^\beta$$

сходится к C и не влияет на сходимость, поэтому достаточно исследовать поведение функций $\widetilde{u_\varepsilon(x)}$.

Пусть $\lambda \leq 0$ и $\beta \leq 0$. Обозначив $-\lambda = n$ и $-\beta = m$, получаем

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{(x+i\varepsilon)^n}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \frac{(x+i\varepsilon-a)^m}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} = \\ = \frac{((x-i\varepsilon)+2i\varepsilon)^n}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \frac{((x-i\varepsilon-a)+2i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} = \\ = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k (x-i\varepsilon)^{n-k} (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \frac{\sum_{k=0}^m C_m^k (x-i\varepsilon-a)^{m-k} (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} = \\ = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon)^{1+k}} \frac{\sum_{k=0}^m C_m^k (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon-a)^{1+k}} = \\ = \left[\frac{1}{x-i\varepsilon} + 2i\varepsilon \frac{n}{(x-i\varepsilon)^2} - 2\varepsilon^2 \frac{n(n-1)}{(x-i\varepsilon)^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{4i\varepsilon^3}{3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(x-i\varepsilon)^4} + \dots + \frac{(2i\varepsilon)^n}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{x-i\varepsilon-a} + 2i\varepsilon \frac{m}{(x-i\varepsilon-a)^2} - 2\varepsilon^2 \frac{m(m-1)}{(x-i\varepsilon-a)^3} - \right. \\ \left. - \frac{4i\varepsilon^3}{3} \frac{m(m-1)(m-2)}{(x-i\varepsilon-a)^4} + \dots + \frac{(2i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} \right].$$

Каждое из семейств $\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{1+k}}$ и $\frac{1}{(x-i\varepsilon-a)^{1+k}}$

сходится в пространстве распределений, причем к функциям, имеющим особенности в разных точках: 0 и a , а значит, существует предел произведения

$$\frac{1}{(x-i\varepsilon)^i} \frac{1}{(x-i\varepsilon-a)^j} \quad (i = \overline{1, 1+n}, j = \overline{1, 1+m}).$$

Поэтому, если раскрыть скобки, то все слагаемые, содержащие ε в качестве множителя, стремятся к нулю. И остается только семейство

$$\frac{1}{(x-i\varepsilon)} \frac{1}{(x-i\varepsilon-a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x-i\varepsilon-a} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right),$$

которое сходится в пространстве распределений к

$$\frac{1}{a} \left(P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right).$$

Таким образом, если $\lambda \leq 0$ и $\beta \leq 0$, то предел $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений существует и равен

$$\frac{C}{a} \left(P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right).$$

Аналогично в других случаях получаем, что при целых λ и β обобщенное решение является пределом семейства функций

$$C \frac{1}{(x-is(\lambda)\varepsilon)} \frac{1}{(x-is(\beta)\varepsilon-a)} = \\ = \frac{C}{a+i\varepsilon(s(\beta)-s(\lambda))} \left(\frac{1}{x-is(\beta)\varepsilon-a} - \frac{1}{x-is(\lambda)\varepsilon} \right),$$

где

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 0; \\ -1, & n > 0. \end{cases}$$

Такие семейства исследуются аналогично и отличие заключается только в знаках при $i\varepsilon$. Таким образом, вид обобщенного решения определяется функцией $s(n)$ – модифицированным знаком целого числа. Получаем, что при целых λ и β предел решений $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений существует и равен

$$\frac{C}{a} \left(P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi s(\beta)\delta_a - i\pi s(\lambda)\delta_0 \right). \quad \square$$

Теорема 3.2. Если хотя бы одно из чисел λ или β не является целым, то решения задачи

Коши для аппроксимирующих уравнений (1.10) не имеют предела в пространстве распределений и обобщенное решение задачи Коши не существует.

Доказательство. Пусть число λ не является целым. Для доказательства достаточно показать, что хотя бы для одной основной функции φ не существует конечный предел интегралов

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx.$$

Если $\varphi(0) = 0$, то оценка (2.2) позволяет применить теорему Лебега о мажорированной сходимости и получить существование предела. Поэтому расходимость может иметь место, только если $\varphi(0) \neq 0$.

Для пояснения того, за счет чего возникает расходимость, рассмотрим сначала пример уравнения, соответствующий $\lambda = 1/2$ и $\beta = 1/2$:

$$u' + \left[P\left(\frac{1}{x}\right) + P\left(\frac{1}{x-a}\right) \right] u = 0.$$

Решения аппроксимирующих уравнений в этом случае не задаются с помощью рациональных функций и записываются в виде

$$u_{\varepsilon}(x) = \frac{C}{a+1} \times \frac{(1+i\varepsilon)^{1/2} (1-i\varepsilon)^{1/2} (a+1-i\varepsilon)^{1/2} (a+1+i\varepsilon)^{1/2}}{(x-i\varepsilon)^{1/2} (x+i\varepsilon)^{1/2} (x-i\varepsilon-a)^{1/2} (x+i\varepsilon-a)^{1/2}}.$$

Для этого случая

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon}(x) &= \frac{1}{4} \ln(x^2 + \varepsilon^2) - i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln(x^2 + \varepsilon^2) + i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) - i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) + i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2), \end{aligned}$$

поэтому выбор ветвей степени при вычислении степени $1/2$ таков, что семейство решений аппроксимирующих уравнений сходится к формальному решению

$$u(x) = \frac{C}{|x(x-a)|}$$

и их поведение определяется поведением множителя

$$\exp(-Q_{\varepsilon}(x)) = \frac{1}{(x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \frac{1}{((x-a)^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}.$$

Пусть $0 < 2h < a$. Возьмем функцию $\varphi(x)$ такую, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| < h$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2h$. Ввиду равномерной сходимости $u_{\varepsilon}(x)$ на множестве $\{x: h \leq |x| \leq 2h\}$, для любой основной функции существует предел интегралов

$$\int_{h \leq |x| \leq 2h} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx$$

и вопрос сводится к рассмотрению интегралов

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^h u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \\ &= C \int_{-h}^h \frac{\sqrt{(1+\varepsilon^2)((a+1)^2 + \varepsilon^2)}}{(a+1)\sqrt{(x^2 + \varepsilon^2)((x-a)^2 + \varepsilon^2)}} dx. \end{aligned}$$

Здесь подынтегральные функции неотрица-

тельны и почти всюду сходятся к $\frac{1}{|x|} \frac{1}{|x-a|}$.

Если предположить, что существует предел таких интегралов, то по теореме Фату предельная функция должна быть интегрируемой и получаем противоречие.

В общем случае рассуждения аналогичны. Воспользуемся тем, что при $|x| < h$ семейство функций

$$\left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon)$$

равномерно сходится к гладкой функции $\frac{a+1}{x-a}$,

причем при $|x| < h$ имеет место оценка

$$\left| \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon) - \frac{a+1}{x-a} \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon. \quad (3.1)$$

Это позволяет записать решение в виде

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon}(x) &= \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) l^{\beta}(x, \varepsilon) = \\ &= \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) \frac{a+1}{x-a} + \\ &+ \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) \left[\left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon) - \frac{a+1}{x-a} \right]. \end{aligned}$$

Существует такая основная функция φ , что

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{a+1} \text{ при } |x| < h \text{ и } \varphi(x) = 0 \text{ при } |x| > 2h.$$

Для этой функции получаем, что

$$\int_{|x| \leq 2h} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon),$$

где

$$I_1(\varepsilon) = \frac{C}{a+1} \int_{|x| \leq h} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) dx,$$

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \frac{C}{a+1} \int_{|x| \leq h} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) \times \\ &\times \left[\left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon) - \frac{a+1}{x-a} \right] \frac{x-a}{a+1} dx, \end{aligned}$$

$$I_3(\varepsilon) = \int_{h \leq |x| \leq 2h} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx.$$

При $h \leq |x| \leq 2h$ сходимость равномерная, поэтому существует конечный предел у $I_3(\varepsilon)$.

Интеграл $I_1(\varepsilon)$ был рассмотрен в [4] при исследовании уравнения с коэффициентом $\frac{1}{x}$, он стремится к бесконечности, если λ не является целым. Более того, известно асимптотическое поведение этого интеграла – он растет со скоростью $\ln \varepsilon$, причем

$$\int_{|x| \leq h} \left| \frac{1}{x - i\varepsilon} \right| dx$$

растет со скоростью $\ln \varepsilon$.

Из этого и оценки (3.1) получаем, что

$$|I_2(\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$$

и, следовательно, для выбранной функции

$$\int u_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, обобщенное решение уравнения (1.6) с коэффициентом q вида (1.5) существует, только когда

$$M_1 = i\pi(1 - 2\lambda),$$

$$M_2 = i\pi(1 - 2\beta),$$

где $\lambda, \beta \in \mathbb{Z}$.

Полностью аналогично изложенному выше получаем более общее утверждение.

Теорема 3.3. Если коэффициент q имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{x - a_k} + b(x), \quad a_k \in \mathbb{R},$$

где $b(x)$ есть гладкая функция, a_k – различные числа, то обобщенные решения задачи Коши уравнения (1.6) существуют только при

$$M_k = i\pi(1 - 2m_k),$$

где m_k – целые числа. При этом существует ровно 2^N различных обобщенных решений, соответствующих разным m_k , которые могут быть определены как пределы семейств функций

$$u_\varepsilon(x) = C \left(\frac{1}{x - a_1 \pm i\varepsilon} \right) \times \left(\frac{1}{x - a_2 \pm i\varepsilon} \right) \dots \left(\frac{1}{x - a_N \pm i\varepsilon} \right) e^{B(x)},$$

где $B(x)$ – первообразная для функции $b(x)$, при произвольных выборах знаков $\pm$.

Заключение

Проведенное исследование показывает, что существование обобщенного решения линейного дифференциального уравнения с обобщенным коэффициентом достаточно сложным образом зависит от вида особенностей коэффициента.

Естественно рассмотреть уравнения с коэффициентами более общего вида

$$q(x) = \sum_{k=1}^N \frac{s_k}{x - a_k} + b(x),$$

где $b(x)$ есть гладкая функция. В [8] исследовано существование обобщенного решения при

$$q(x) = \frac{s}{x}, \quad \text{где } s - \text{натуральное число, и показано,}$$

что здесь ситуация усложняется по сравнению со случаем $s = 1$ – при аппроксимации этого коэффициента семейством гладких функций

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{s}{x + i\varepsilon} + (1 - \lambda) \frac{s}{x - i\varepsilon}$$

обобщенное решение существует только при условии, что число $\lambda s = m$ целое и при этом $m \geq s$ или $m \leq 0$.

Вопрос о существовании обобщенных решений при произвольных значениях s_k требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден. – М.: Мир, 1991. – 568 с.
2. Завалишин, С.Т. Импульсные процессы. Модели и приложения / С.Т. Завалишин, А.Н. Секин. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. Лазакович, Н.В. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский, А.К. Хмызов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 5–9.
4. Антоневиц, А.Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.
5. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
6. Шагова, Т.Г. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ / Т.Г. Шагова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 6–17.
7. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1968. – 276 с.
8. Антоневиц, А.Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А.Б. Антоневиц, Е.В. Кузьмина // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.

Поступила в редакцию 02.11.2021.