МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ *l*-АРНОЙ ПОЛУГРУППЫ $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON SETS OF GENERATORS OF *l*-ARY SEMIGROUP $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

Решена задача нахождения по известному порождающему множеству полугруппы A порождающего множества l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени произвольного группоида A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Ключевые слова: *полугруппа*, *l-арная полугруппа*, *порождающее множество.*

The problem of finding, from a known generating set of the semigroup A, the generating set of the l-ary semigroup $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ with the l-ary operation $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, which is defined on the k-th Cartesian power of an arbitrary groupoid A for any integer $l \geq 2$ and any permutation σ from the set $\mathbf{S}_k$ of all permutations of the set $\{1, 2, \ldots, k\}$ has been solved.

Keywords: *semigroup*, *l-ary semigroup*, *set of generators.*

Введение

Данная статья посвящена изучению порождающих множеств l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая определяется [1] на k-ой декартовой степени произвольного группоида A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ следующим образом.

Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathrm{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathrm{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1y_{\sigma(1)}, x_2y_{\sigma(2)}, \ldots, x_ky_{\sigma(k)}),$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = \mathrm{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathrm{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathrm{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathrm{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathrm{x}_l)) \ldots)).$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\,\sigma,\,k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathrm{x} \circ \mathrm{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{k-1}y_k, x_ky_1)$$

из [2, определения 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,\,k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[\ ]_{l,\,k}$ впервые были определены в [3], где также впервые была определена и операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ для случая полугруппы A. Заметим также, что операция $[\ ]_{n,\,n-1}$ аналогична n-арной операции, которую Э. Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [4].

1 Вспомогательные результаты

Следующая теорема позволяет находить значения l-арной операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, не используя явно n-арную операцию $\overset{\sigma}{\circ}$.

***Теорема* 1.1** [2], [3]. *Пусть A – полугруппа,*

$$\mathrm{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Если в универсальной алгебре $< A, [\ ] >$ с одной l-арной операцией $[\ ]: A^l \to A$ для любого $i = 1, \ldots, l-1$ выполняется тождество ассоциативности

$$[[a_1 \ldots a_l]a_{l+1} \ldots a_{2l-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+l}]a_{i+l+1} \ldots a_{2l-1}],$$

то такую универсальную алгебру называют *l-арной полугруппой*, а l-арную операцию $[\ ]$ − *ассоциативной.*

***Теорема* 1.2** [2], [3]. *Если A – полугруппа, σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *– l-арная полугруппа.*

***Теорема* 1.3** [1]. *Если полугруппа A содержит более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *то в l-арном группоиде* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *нет единиц.*

Для l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ этот результат был доказан ранее в [2].

Согласно соответствующему определению для произвольных универсальных алгебр, l-арная подполугруппа $< B, [\ ] >$ l-арной полугруппы $< A, [\ ] >$ называется *порожденной* множеством $M \subseteq A$, если она совпадает с пересечением всех

l-арных подполугрупп $< C, [\ ] >$ из $< A, [\ ] >$ таких, что $M \subseteq C$. Множество M в этом случае называют *порождающим*.

Порождающее множество l-арной полугруппы $< A, [\ ] >$ называют *неприводимым* или *базисом*, если любое его собственное подмножество не порождает $< A, [\ ] >$. Если порождающее множество l-арной полугруппы $< A, [\ ] >$ конечно, то $< A, [\ ] >$ называют *конечно порожденной*. Если порождающее множество l-арной полугруппы $< A, [\ ] >$ состоит из n элементов, то $< A, [\ ] >$ называют *n-порожденной*.

Известно, что *подполугруппа B полугруппы A порождается множеством* $M \subseteq A$ *тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M, либо является произведением элементов из M, то есть*

$$b = m_1 \dots m_r,\ m_i \in M,\ r = 1, 2 \dots .$$

Аналогичное утверждение справедливо для многоместного аналога полугруппы.

***Предложение* 1.1**. *l-Арная подполугруппа* $< B, [\ ] >$ *l-арной полугруппы* $< A, [\ ] >$ *порождается множеством* $M \subseteq A$ *тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M, либо может быть представлен в виде*

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}],\ m_i \in M,\ r = 1, 2, \dots .$$

***Замечание* 1.1**. Если в порождающем множестве M l-арной полугруппы $< A, [\ ] >$ имеется элемент c, который с помощью l-арной операции $[\ ]$ выражается через другие элементы множества M, то есть

$$c = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}],\ m_i \in M,\ m_i \neq c$$

для некоторого $r = 1, 2, \dots$, то этот элемент можно удалить из порождающего множества. В этом случае l-арная полугруппа $< A, [\ ] >$ порождается множеством $M \setminus \{c\}$.

2 Порождающее множество *l*-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$

В данном разделе будет получен положительный ответ на следующий

***Вопрос* 2.1**. *Можно ли, зная порождающее множество полугруппы A с единицей, построить порождающее множество l-арной полугруппы* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$?

Прежде чем отвечать на этот вопрос, докажем несколько вспомогательных утверждений. При этом для сокращения записей будем использовать обозначение

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}),$$

где 1 – единица полугруппы A.

Согласно теореме 1.3, указанный элемент $\mathbf{e}$ не является единицей l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

***Лемма* 2.1.** *Пусть A – полугруппа с единицей* 1, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k),\ \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in A^k.$$

Тогда:

1) $[\mathbf{b}\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, \mathbf{c}]_{l,\sigma,k} = (b_1c_1, \dots, b_kc_k)$;

2) $\mathbf{b} = [(b_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1})\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (1, b_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2})\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2} \dots$

$\dots \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}, b_{k-1}, 1)\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_k)]_{l,\sigma,k}$.

Доказательство. 1) Полагая

$$[\mathbf{b}\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, \mathbf{c}]_{l,\sigma,k} = (d_1, \dots, d_k),$$

и, применяя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а также тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$d_j = b_j \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} c_{\sigma^{l-1}(j)} = b_j \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} c_j = b_j c_j.$$

Следовательно, верно равенство из 1).

2) Прежде всего заметим, что, согласно теореме 1.2, l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, является ассоциативной.

Обозначая правую часть равенства из 2) через $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_k)$, а затем, снова используя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, и, применяя $k-1$ раз утверждение 1), получим

$$\mathbf{h} = [(b_1, b_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2})\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}$$

$$(1, 1, b_3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-3})]_{l,\sigma,k}\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}, b_{k-1}, 1)$$

$$\underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_k)]_{l,\sigma,k} =$$

$$= [(b_1, b_2, b_3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-3})\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}$$

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}, b_{k-1}, 1)\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_k)]_{l,\sigma,k} =$$

$$\dots$$

$$= [(b_1, \dots, b_{k-1}, 1)\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_k)]_{l,\sigma,k} =$$

$$= (b_1, \dots, b_k) = \mathbf{b},$$

т. е. $\mathbf{h} = \mathbf{b}$. Следовательно, верно равенство из 2).□

Следующее следствие получается применением $r-1$ раз утверждения 1) леммы 2.1.

***Следствие* 2.1.** *Пусть A – полугруппа с единицей* 1, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{c}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, d_s, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k,\ s = 1, 2, \dots, r$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. *Тогда*

$$[\mathbf{c}_1\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, \mathbf{c}_2\, \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathrm{e} \dots \mathrm{e}}_{l-2}\, \mathbf{c}_r]_{l,\sigma,k} =$$

$$= (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, d_1 d_2 \dots d_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Для подмножества M полугруппы A с единицей 1, натурального $k \geq 1$ и любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ положим

$$\mathbf{U}_j(M) = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \mid a \in M\},$$

$$\mathbf{U}(M) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_j(M).$$

***Замечание* 2.1**. Ясно, что если $1 \in M$, то $\mathbf{e} \in \mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$, откуда $\mathbf{e} \in \mathbf{U}(M)$. Если же $1 \notin M$, то $\mathbf{e} \notin \mathbf{U}(M)$.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 2.1.

***Теорема* 2.1**. *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент из A^k. Так как полугруппа A порождается множеством M, то

$$a_j = b_{j1} \ldots b_{jr_j},\ j = 1, 2, \ldots, k \qquad (2.1)$$

для некоторых

$$b_{j1}, \ldots, b_{jr_j} \in M,\ r_j = 1, 2, \ldots .$$

Для $j = 1, 2, \ldots, k$, $s = 1, \ldots, r_j$ положим

$$\mathbf{c}_j = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a_j, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k,$$

$$\mathbf{c}_{js} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b_{js}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k.$$

Согласно утверждению 2) леммы 2.1,

$$\mathbf{a} = [\mathbf{c}_1 \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{c}_2 \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{c}_k]_{l,\sigma,k}, \qquad (2.2)$$

а, ввиду (2.1) и следствия 2.1,

$$\mathbf{c}_j = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b_{j1} \ldots b_{jr_j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) =$$

$$= [\mathbf{c}_{j1} \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{c}_{j2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{c}_{jr_j}]_{l,\sigma,k}, \qquad (2.3)$$

где, как не сложно заметить,

$$\mathbf{c}_{j1}, \mathbf{c}_{j2}, \ldots, \mathbf{c}_{jr_j} \in \mathbf{U}_j(M) \subseteq \mathbf{U}(M).$$

Заметим, что число элементов под знаком l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ в правой части (2.3) равно

$$(r_j - 1)(l - 1) + 1,$$

а число элементов под знаком l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ в правой части (2.2) равно

$$(l-2)(k-1) + \sum_{j=1}^{k} (r_j - 1)(l-1) + 1 =$$

$$= (r_1 + \ldots + r_k - 1)(l - 1) + 1.$$

Подставив в (2.2) вместо $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ их правые части из (2.3), видим, что элемент $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{t(l-1)+1}]_{l,\sigma,k}$$

для некоторых

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{t(l-1)+1} \in \mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\},$$

где $t = r_1 + \ldots + r_k - 1$. Следовательно, по предложению 1.1 l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. порождается множеством $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$. □

Сформулируем ряд следствий из теоремы 2.1.

Считая в теореме 2.1 σ циклом длины m *из* $\mathbf{S}_k$, получим

***Следствие* 2.2**. *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M, σ – цикл длины m из $\mathbf{S}_k$, m делит $l - 1$. Тогда l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$**.**

Полагая в следствии 2.2 $\sigma = (12 \ldots m)$, $l = m + 1$, получим

***Следствие* 2.3.** *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M,* $(12 \ldots m) \in \mathbf{S}_k$. Тогда $(m + 1)$*-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{m+1, (12 \ldots m), k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$.

Полагая в следствии 2.2 $m = k$, $\sigma = (12 \ldots k)$, $l = k + 1$, или в следствии 2.3 $m = k$, получим

***Следствие* 2.4.** *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M. Тогда* $(k + 1)$*-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$**.**

Полагая в следствии 2.4 $k = 2$, получим

***Следствие* 2.5.** *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M. Тогда тернарная полугруппа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождается множеством* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{(1, 1)\}$.

Если множество M, порождающее полугруппу A, содержит единицу 1 этой полугруппы, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то, ввиду замечания 2.1, $\mathbf{e} \in \mathbf{U}(M)$. Поэтому в этом случае множество $\mathbf{U}(M)$ совпадает с множеством $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$. Это позволяет переформулировать теорему 2.1 для случая $1 \in M$.

***Теорема* 2.2**. *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M, $1 \in M$, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством* $\mathbf{U}(M)$.

***Замечание* 2.2**. Для теоремы 2.2 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.2–2.5.

Ясно, что множества M и $\mathbf{U}_j(M)$ имеют одинаковую мощность для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Потому, если M счётное множество, то множества $\mathbf{U}_j(M)$ и $\mathbf{U}(M)$ также счётные. Если же множество M содержит n элементов, то множество $\mathbf{U}_j(M)$ также содержит n элементов, **а** множество $\mathbf{U}(M)$ содержит: $k(n - 1) + 1$ элементов, если $1 \in M$; kn элементов, если $1 \notin M$. Это позволяет дополнить теорему 2.1 следующим предложением

***Предложение* 2.1**. *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается n-элементным множеством M, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1) *если $1 \in M$, то l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является $(k(n - 1) + 1)$-порожденной*;

2) *если $1 \notin M$, то l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является $(kn + 1)$-порожденной.*

Следующее предложение, являющееся следствием теоремы 2.1, формально включает в себя и эту теорему.

***Предложение* 2.2**. *Пусть полугруппа A с единицей* 1 *порождается множеством M, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *порождается любым подмножеством множества* A^k, *включающим множество* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$. *В частности, она порождается множеством*

$$\mathbf{U}(A) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_j(A).$$

Если в условиях теоремы 2.1 множество M содержит более одного элемента, то любой элемент $(a_1, \ldots, a_k)$ из A^k, у которого, по крайней мере, две компоненты отличны от 1, не принадлежит множеству $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$. Например, для любого элемента $a \in M$, $a \neq 1$ элемент $(a, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-2})$ не принадлежит множеству $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$. Потому теорему 2.1 можно дополнить ещё одним предложением.

***Предложение* 2.3**. *Если полугруппа A с единицей* 1 *порождается неодноэлементным множеством M, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *порождается её собственным подмножеством* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$.

***Замечание* 2.3**. Из предложения 2.3 следует, что если полугруппа A с единицей 1 порождается неодноэлементным множеством M, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не может быть неприводимым порождающим множеством для самой себя.

В связи с теоремой 2.1 представляют интерес следующие два вопроса.

***Вопрос* 2.2**. *Если в условиях теоремы* 2.1 *порождающее множеством M неприводимо, то будет ли неприводимым порождающее множество* $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$?

***Вопрос* 2.3**. *Можно ли в формулировке теореме* 2.1 *обойтись без элемента* **e**?

Следующий пример показывает, что ответы на оба вопроса – отрицательные.

***Пример* 2.1**. В качестве исходной полугруппы рассмотрим циклическую группу $A = \{1, a\}$, которая порождается множеством $M = \{a\}$. Тогда

$$A^2 = \{\mathbf{e} = (1, 1), \mathbf{u} = (1, a), \mathbf{v} = (a, 1), \mathbf{w} = (a, a)\},$$
$$\mathbf{U}_1(M) = \{\mathbf{v}\}, \mathbf{U}_2(M) = \{\mathbf{u}\}, \mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Согласно теореме 2.1, множество

$$\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

порождает тернарную полугруппу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$.

Так как

$$[\mathbf{uuu}]_{3,(12),2} = \mathbf{v}, [\mathbf{vvv}]_{3,(12),2} = \mathbf{u},$$
$$[\mathbf{uuv}]_{3,(12),2} = [\mathbf{vuu}]_{3,(12),2}] = \mathbf{u},$$
$$[\mathbf{vvu}]_{3,(12),2} = [\mathbf{uvv}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},$$
$$[\mathbf{uvu}]_{3,(12),2} = \mathbf{u}, [\mathbf{vuv}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},$$

то $< \mathbf{U}(M), [\ ]_{3,(12),2} >$ – тернарная подполугруппа тернарной полугруппы $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$. Следовательно, множество $\mathbf{U}(M)$ не порождает тернарную полугруппу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$, что дает отрицательный ответ на вопрос 2.3.

Равенства

$$[\mathbf{uuu}]_{3,(12),2} = \mathbf{v}, [\mathbf{vvv}]_{3,(12),2}] = \mathbf{u}$$

показывают, что порождающее множество $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ не является неприводимым, так как из него можно удалить либо элемент **u**, либо элемент **v**. Полученные порождающие множества $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{e}, \mathbf{v}\}$ будут уже неприводимыми. Таким образом, и на вопрос 2.2 ответ – отрицательный.

Так как

$$[\mathbf{uuw}]_{3,(12),2} = \mathbf{e}, [\mathbf{uwe}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},$$

то $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ – еще одно порождающее множество, причем неприводимое. Неприводимым порождающим множеством является и множество $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, так как

$$[\mathbf{vvw}]_{3,(12),2} = \mathbf{e}, [\mathbf{vwe}]_{3,(12),2} = \mathbf{u}.$$

Таким образом, тернарную полугруппу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождают каждое из следующих четырех двухэлементных неприводимых множеств

$$\{\mathbf{e}, \mathbf{u}\}, \{\mathbf{e}, \mathbf{v}\}, \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}, \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}.$$

Отметим, что последние два множества не содержат **e**, но при этом $\mathbf{w} \notin \mathbf{U}(M)$.

Кроме множества $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, тернарную полугруппу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождают также каждое из следующих трехэлементных множеств

$$\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}, \{\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}, \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}.$$

Теорему 2.2 можно проиллюстрировать следующим примером.

***Пример* 2.2**. Так как мультипликативная полугруппа **N** всех натуральных чисел порождается множеством $\mathbf{P} \bigcup \{\mathbf{1}\}$, состоящим из единицы и всех простых чисел, то по теореме 2.2 l-арная полугруппа $< \mathbf{N}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством

$$\mathbf{U}(\mathbf{P} \cup \{\mathbf{1}\}) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_j(P \bigcup \{1\}) =$$

$$= \bigcup_{j=1}^{k} \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \mid p \in \mathbf{P} \cup \{\mathbf{1}\}\}.$$

Как показывает следующий пример, в некоторых частных случаях l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ из теоремы 2.1 порождается множеством $\mathbf{U}(M)$, которое не содержит элемент **e**.

***Пример* 2.3**. Пусть $A = \{1, a\}$ – циклическая группа из примера 2.1, которая порождается множеством $M = \{a\}$, $k = 3$, $\sigma = (123) \in \mathbf{S}_3$. Тогда

$$A^3 = \{\mathbf{e} = (1, 1, 1), (1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1),$$
$$(1, a, a), (a, 1, a), (a, a, 1), (a, a, a)\},$$
$$\mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u} = (1, 1, a), \mathbf{v} = (1, a, 1), \mathbf{w} = (a, 1, 1)\}.$$

По теореме 2.1 4-арная полугруппа $< A^3, [\ ]_{4,(123),3} >$ порождается множеством

$$\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}\}.$$

Но так как $[\mathbf{uuvv}]_{4,(123),3} = \mathbf{e}$, то $< A^3, [\,]_{4,(123),3} >$ порождается множеством $\mathbf{U}(M)$.

Приведём ещё один важный пример.

***Пример* 2.4**. Известно (см., например, [5]), что для любого порождающего множества M симметрической группы $\mathbf{S}_n$ и любого преобразования α из симметрической полугруппы $\mathbf{F}_n$, у которого множество $\{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n)\}$ состоит из $n-1$ элементов, множество $M \bigcup \{\alpha\}$ является порождающим для симметрической полугруппы $\mathbf{F}_n$. В качестве преобразования α можно взять, например, преобразование

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_n$, порождается [6] двухэлементным множеством

$$\{\alpha_1 = (123 \ldots n), \alpha_2 = (12)\},$$

то симметрическая полугруппа $\mathbf{F}_n$ порождается трёхэлементным множеством

$$M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha\}.$$

Принимая во внимание теорему 2.1 и предложение 2.1, видим, что l-арная полугруппа $< \mathbf{F}_n^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$, где подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, является $(3k+1)$-порождённой, так как порождается $(3k+1)$-элементным множеством $\mathbf{U}(M_1) \bigcup \{\mathbf{e}\}$, где

$$\mathbf{e} = (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k}),$$

ε – тождественное преобразование множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_n$, порождается [6] $(n-1)$-элементным множеством

$$\{\beta_1 = (12), \beta_2 = (23), \ldots, \beta_{n-1} = (n-1\ n)\},$$

то симметрическая полугруппа $\mathbf{F}_n$ порождается n-элементным множеством

$$M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha\}.$$

Принимая во внимание теорему 2.1 и предложение 2.1, видим, что l-арная полугруппа $< \mathbf{F}_n^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$, где подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, является $(kn+1)$-порождённой, так как порождается $(kn+1)$-элементным множеством $\mathbf{U}(M_2) \bigcup \{\mathbf{e}\}$.

Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_n$, порождается [6] $(n-1)$-элементным множеством

$$\{\gamma_1 = (1n), \gamma_2 = (2n), \ldots, \gamma_{n-1} = (n-1\ n)\},$$

то симметрическая полугруппа $\mathbf{F}_n$ порождается n-элементным множеством

$$M_3 = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \alpha\}.$$

Принимая во внимание теорему 2.1 и предложение 2.1, видим, что l-арная полугруппа $< \mathbf{F}_n^k, [\,]_{l,\sigma,k} >$, где подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, является $(kn+1)$-порождённой, так как порождается $(kn+1)$-элементным множеством $\mathbf{U}(M_3) \bigcup \{\mathbf{e}\}$.

При доказательстве следующей теоремы используется тот факт, что в симметрической группе $\mathbf{S}_k$ имеются подстановки, удовлетворяющие условию $\sigma^k = \sigma$. В качестве такой подстановки можно взять, например, любой цикл из $\mathbf{S}_k$ длины $k-1$, в частности, цикл $(12 \ldots k-1)$.

***Теорема* 2.3**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, которое не содержит единицу* 1 *этой полугруппы, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^k = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $< A^k, [\,]_{k,\sigma,k} >$ является k-арной полугруппой, которая порождается множеством* $\mathbf{U}(M)$, *не содержащим* $\mathbf{e}$.

Доказательство. Так как полугруппа A порождается множеством M, которое не содержит ее единицу 1, то для некоторого $k \geq 2$ найдутся такие $b_1, \ldots, b_k \in M$, что

$$b_1 b_2 \ldots b_k = 1. \tag{2.4}$$

Кроме того, согласно замечанию 2.1, множество $\mathbf{U}(M)$ не содержит $\mathbf{e}$.

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и положим

$$\mathbf{v}_1 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b_1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}),$$

$$\mathbf{v}_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\sigma(j)-1}, b_2, \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{k-\sigma(j)}),$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{v}_{k-1} = (\underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{\sigma^{k-2}(j)-1}, b_{k-1}, \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{k-\sigma^{k-2}(j)}),$$

$$\mathbf{v}_k = (\underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{\sigma^{k-1}(j)-1}, b_k, \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{k-\sigma^{k-1}(j)}) = $$

$$= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b_k, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}).$$

Так как $\sigma^k = \sigma$, то по теореме 1.2 $< A^k, [\,]_{k,\sigma,k} >$ – k-арная полугруппа.

Используя определение операции $[\,]_{k,\sigma,k}$, тождественность подстановки σ^{k-1}, а также (2.4), получим

$$[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_k]_{k,\sigma,k} =$$

$$= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}) = \mathbf{e},$$

то есть

$$\mathbf{e} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_k]_{k,\sigma,k}, \tag{2.5}$$

где, как несложно заметить,

$$\mathbf{v}_i \in \mathbf{U}_{\sigma^{i-1}(j)}(M) \subseteq \mathbf{U}(M), \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Согласно теореме 2.1 k-арная полугруппа $< A^k, [\,]_{k,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$, то есть всякий элемент $\mathbf{a} \in A^k$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{t(k-1)+1}]_{k,\sigma,k} \tag{2.6}$$

для некоторых $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{t(k-1)+1} \in \mathbf{U}(M) \bigcup \{\mathbf{e}\}$.

Заменяя в правой части (2.6) элементы $\mathbf{u}_i$, совпадающие с $\mathbf{e}$, правой частью из (2.5), видим, что всякий элемент $\mathbf{a} \in A^k$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_{r(k-1)+1}]_{k,\sigma,k}$$

для некоторых $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r(k-1)+1} \in \mathbf{U}(M)$. Таким образом, по предложению 1.1 k-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{k,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}(M)$. □

Заметим, что пример 2.3 не является следствием теоремы 2.3, так как $\sigma^k = (123)^3$ – тождественная подстановка.

***Пример* 2.5**. Снова рассмотрим циклическую группу $A = \{1, a\}$, которая порождается множеством $M = \{a\}$. Полагая в теореме 2.3 $k = 4$, $\sigma = (123) \in \mathbf{S}_4$, получим 4-арную полугруппу $< A^4, [\ ]_{4,(123),4} >$, которая порождается множеством

$$\mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u}_1 = (a, 1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, a, 1, 1),$$
$$\mathbf{u}_3 = (1, 1, a, 1),\ \mathbf{u}_4 = (a, 1, 1, 1)\},$$

не содержащим элемент $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1)$, который может быть представлен в виде

$$\mathbf{e} = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_1]_{4,(123),4}.$$

Отметим, что тернарная полугруппа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ из примера 2.1 и 4-арные полугруппы $< A^3, [\ ]_{4,(123),3} >$ и $< A^4, [\ ]_{4,(123),4} >$ из примеров 2.3 и 2.5 являются полиадическими группами, в которых согласно теореме 1.3 нет единиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

2. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

4. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. *Ляпин*, *Е.С.* Полугруппы / Е.С. Ляпин. – М.: Физматгиз, 1960. – 592 с.

6. *Коксетер*, *Г.С.М.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. – М.: Наука, 1980. – 240 с.

Поступила в редакцию 05.01.2021.