

УДК 535.42

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. III. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ КУММЕРА – КУММЕРА И ТРИКОМИ – КУММЕРА С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PARABOLIC ROTARY COORDINATES. III. SPATIOTEMPORAL WAVE PACKETS OF KUMMER – KUMMER AND TRICOMI – KUMMER WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girkel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для пространственно-временных волновых пакетов Куммера – Куммера и Трикоми – Куммера с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких мод, чтобы они переносили конечную мощность.

Ключевые слова: пространственно-временные волновые пакеты, параболические вращательные координаты, моды Куммера – Куммера, моды Трикоми – Куммера.

Analytical expressions in the closed form for spatiotemporal wave packets of Kummer-Kummer and Tricomi-Kummer with continuous angular index m in parabolic rotary coordinates are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of free parameters of such modes that they transfer finite power are formulated.

Keywords: spatiotemporal wave packets, parabolic rotary coordinates, modes Kummer – Kummer, modes Tricomi – Kummer.

Введение

Поиск новых типов оптических полей ведется как в направлении нахождения новых решений, так и направлении обобщения уже известных решений. В последнее время нами изучаются световые поля, описываемые комплексными амплитудами с непрерывным угловым индексом m . Настоящая работа является продолжением работ [1]–[2], где изучались возможные новые типы световых полей типа Куммера – Куммера ($K-K$) и Трикоми – Куммера ($T-K$). Амплитуды таких полей с непрерывным угловым индексом m являются точными решениями волнового уравнения в параболических вращательных координатах.

Достаточно общее решение волнового уравнения для световых монохроматических волн в параболических вращательных безразмерных координатах можно записать в виде [1], [2]

$$E = e^{i(Q+T)} \cdot (X + iY)^m \times \\ \times (a_1 M_- + a_2 M_{1-} + a_3 U_- + a_4 \tilde{U}_-) \times \\ \times (a_5 M_+ + a_6 M_{1+} + a_7 U_+ + a_8 \tilde{U}_+).$$

Здесь представленные функции

$$M_{\pm 1} = (R \pm Q)^{-m} M(a - m, 1 - m; \mp i(R \pm Q)),$$

$$M_{\pm} = M(a, m + 1; \mp i(R \pm Q)),$$

$$U_{\pm} = U(a, m + 1; \mp i(R \pm Q)),$$

$$\tilde{U}_{\pm} = e^{\mp i(R \pm Q)} U(m + 1 - a, m + 1; \pm i(R \pm Q))$$

выражаются через функции Куммера M и Трикоми U . Безразмерные координаты и переменные:

$$kx = X; \quad ky = Y; \quad kz = Z;$$

$$\omega t = T;$$

$$k\rho = k\sqrt{x^2 + y^2} = R_{\perp} = \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$R = kr = \sqrt{X^2 + Y^2 + Q^2};$$

$$Q = Z - iZ_0.$$

Независимыми функциями в E можно выбрать по одной функции из каждой скобки, например $U_+ M_{-1}$. В общем случае параметры a комплексные, т. е. $a = a' + ia''$. В [1], [2] исследовались новые виды световых полей типа $K-K$ и $T-K$.

В данной работе этот подход распространяется на более общие решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. Получены выражения, описывающие пространственно-временные волновые пакеты (ПВВП) $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m и обсуждаются физически приемлемые значения их свободных параметров.

1 ПБВП $K-K$ в параболических вращательных координатах

Амплитуда реального пучка, чтобы последний переносил конечную мощность, должна удовлетворять условиям квадратичной интегрируемости (КИ). В работах [1], [2] нами было установлено, что для непараксиальных пучков $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m путем подбора параметров можно, в лучшем случае, добиться, чтобы амплитуда E убывала как $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$ при $R_{\perp} \rightarrow \infty$, т. е. квази-КИ. Поэтому в настоящей работе будут найдены новые дополнительные решения волнового уравнения с непрерывным угловым индексом m , описывающие так называемые ПБВП $K-K$ и $T-K$ в параболических вращательных координатах и обладающие строго КИ.

Известно, что если $f(X, Y, Z, T)$ является решением волнового уравнения, то, согласно первому преобразованию Бейтмена [3]–[5] в безразмерном виде

$$f(X, Y, Z, T) \rightarrow f_1(X, Y, Z, T) = \frac{1}{Z+T} f\left(\frac{BX}{Z+T}, \frac{BY}{Z+T}, \frac{S^2 - B^2}{2(Z+T)}, \frac{S^2 + B^2}{2(Z+T)}\right), \quad (1.1)$$

где $S^2 = R^2 - T^2$, функция $f_1(X, Y, Z, T)$ также является решением волнового уравнения. Это преобразование пригодно для любого решения волнового уравнения и дает новые решения из известных. Большинство авторов (Besiries [6], [7], Utkin [8], Borisov [9]) полагают $B = 1$, тем самым исключая случай $B = 0$. Однако Hillion [10], [11] полагает B произвольным комплексным числом. Мы также считаем, что в преобразовании Бейтмена (1.1) параметр B может быть любым, и, в частности, равным нулю. Компьютерное моделирование в системе Maple подтверждает вывод о том, что допустим параметр $B = 0$.

Чтобы избавиться от неопределенности при $Z+T \rightarrow 0$ произведем комплексификацию координаты Z в (1.1) соотношением $Z \rightarrow Q = Z - iZ_0$. Здесь $Z_0 > 0$, а Q – безразмерный комплексный параметр пучка, широко применяемый в теории гауссовых световых пучков.

Предварительно применим преобразование (1.1) к волне $E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m$, которая обладает бесконечной энергией и бесконечной переносимой мощностью. Тогда получаем

$$E = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \exp\left(\frac{i(X^2 + Y^2)}{Q+T}\right) \cdot \exp(i(Z-T)). \quad (1.2)$$

Это выражение описывает гауссов ПБВП, движущийся вдоль оси OZ со скоростью $v_{\text{фаз}} = \omega/k$. Его амплитуда убывает по гауссову закону

в направлениях, перпендикулярных оси OZ . Поэтому пакет (1.2) переносит конечную мощность и является аналогом сфокусированной волновой моды (*focus wave mode*) с внедренным оптическим вихрем. Его перетяжка движется в противоположном направлении Z . При $m \neq 0$ – пакет полый. Здесь и далее полагаем угловой индекс m непрерывным, $m \geq 0$.

А. Обсудим применение комплексифицированного ($Z \rightarrow Q = Z - iZ_0$) преобразования Бейтмена (1.1) для следующего решения

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m \cdot M_+ M_-$$

[1], [2], описывающего пучки $K-K$ в параболических вращательных безразмерных координатах. Получаем ПБВП $K-K$ с амплитудой

$$E(sM_+ M_-) = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right) \times \\ \times M\left(a, m+1; i \frac{\sqrt{4B^2 R_{\perp}^2 + (S^2 - B^2)^2 - (S^2 - B^2)}}{2(Q+T)}\right) \times \\ \times M\left(a, m+1; -i \frac{\sqrt{4B^2 R_{\perp}^2 + (S^2 - B^2)^2 + (S^2 - B^2)}}{2(Q+T)}\right). \quad (1.3)$$

Здесь и далее нижний индекс s при амплитуде E означает spatio, т. е. ПБВП. Полагая затем, для простоты, $B = 0$, $\text{Re}(S - B) > 0$ в (1.3), находим амплитуду

$$E(sMM) = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \exp\left(i \frac{S^2}{Q+T}\right) \times \\ \times M\left(a, m+1; -i \frac{S^2}{Q+T}\right).$$

Здесь вторая функция Куммера M обратилась в константу, которую мы не пишем.

Применяя преобразование Куммера к оставшейся функции M , получаем ПБВП K в упрощенной форме с амплитудой

$$E(sM) = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times M\left(m+1-a, m+1; i \frac{S^2}{Q+T}\right). \quad (1.4)$$

По сравнению с общим решением (1.3) здесь, благодаря ограничению $B = 0$, осталась одна функция M вместо двух, исчезли корни в ее аргументе и исчез гауссиан. Последнее выражение (1.4) описывает локализованные ПБВПы. Поскольку (1.4) является строгим решением волнового уравнения, то ПБВПы можно также назвать сфокусированными волновыми модами или даже световыми пулями. Амплитуда ПБВП экспоненциально убывает в поперечных оси OZ направлениях. Это подтверждает также графическое моделирование интенсивности рассматриваемых полей. При $a = 0$ выражение (1.4)

редуцируется к амплитуде, которая описывает гауссов *ПВВП*.

Проанализируем условия КИ для *ПВВП* (1.4). Условие КИ: $E \rightarrow R_{\perp}^d$, причем $d < -1$. Согласно Флюгге, [12, с. 304], при $|L| \rightarrow \infty$

$$M(a, b, L) \rightarrow \frac{e^{-i\pi a} \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} L^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} L^{a-b} e^L,$$

если $a \neq 0, -1, -2, \dots$. Без ограничения общности можно при анализе не учитывать зависимости от Q и T . Тогда, при $R_{\perp}^2 = X^2 + Y^2 \rightarrow \infty$ получаем

$$E \rightarrow \frac{R_{\perp}^{m-2a} \exp\left(\frac{iR_{\perp}^2}{Q+T}\right)}{\Gamma(m+1-a)} + \frac{R_{\perp}^{2a-m-2}}{\Gamma(a)}.$$

1. Пусть $Z_0 > 0$ в $Q = Z - iZ_0$. Тогда при $a = -n = 0, -1, -2, \dots$, $m \geq 0$ пакет (1.4) превращается в *ПВВП* Лагерра с амплитудой

$$E_{sLG} = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \cdot L_n^m \left(\frac{iS^2}{Q+T} \right)$$

и обладающий строго КИ!

2. Кроме того, находим, что при $Z_0 > 0$ возможны следующие варианты анализа условий КИ функции E_{sKK} (1.4):

1. Если $a' > \frac{m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$.

Здесь и далее W – переносимая мощность.

2. Если $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$.

3. Если $a' \in \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2} \right)$, тогда $E \rightarrow 0$, но $W \rightarrow \infty$.

4. Если $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, т. е. квази-КИ, но $W \rightarrow \infty$.

5. Если $a' < \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$, т. е. строгая КИ! Здесь условие 5 включает в себя также условие 1 ($a = -n = 0, -1, -2, \dots$).

Б. Для пучка

$$E(M_{-}M_{+}) = e^{i(Z+T)} \times \\ \times (X+iY)^m (R+Q)^{-m} M(a, 1+m; i(R-Q)) \times \\ \times M(a-m, 1-m; -i(R+Q))$$

применим 1 преобразование Бейтмена. Затем, полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду *ПВВП*

$$E(sM_{-}M_{+}) = \\ = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{S^2} \right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для *ПВВП* $E(sM_{-}M_{+})$.

При $|R_{\perp}| \rightarrow \infty$ получаем

$$E(sM_{-}M_{+}) \rightarrow \left(\frac{R_{\perp}^{-2+2a-m}}{\Gamma(a-m)} + \frac{R_{\perp}^{m-2a}}{\Gamma(1-a)} \exp\left(\frac{iR_{\perp}^2}{Q+T}\right) \right).$$

Пусть $Z_0 > 0$ в $Q = Z - iZ_0$.

Тогда при $a-m = -N+1 = 0, -1, -2, \dots$ – КИ строго.

При $Z_0 > 0$ находим, что возможны также следующие варианты условий КИ функции $E(sM_{-}M_{+})$:

– если $a' > \frac{m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' \in \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2} \right)$, тогда $E \rightarrow 0$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' < \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$.

Строгая КИ.

В. Обсудим пучки $K-K$ типа $E(M_{-}M_{+})$. Согласно [2], его амплитуду можно взять в форме

$$E_{*}(M_{-}M_{+}) = e^{i(Q+T)} \cdot (X-iY)^m \times \\ \times M(a+m, 1+m; -i(R+Q)) \times \\ \times M(a+m, 1+m; i(R-Q)).$$

При заменах $a+m = a_1$, $Y \rightarrow (-Y)$ последний пучок $E_{*}(M_{-}M_{+})$ преобразуется в пучок $E(M_{-}M_{+})$, рассмотренный ранее в [7]. Используя полученные выше результаты (1.4) для пучка $E(M_{-}M_{+})$, сразу можем записать выражения для *ПВВП* $E_{*}(sM_{-}M_{+})$. Амплитуда *ПВВП*

$$E_{*}(sM_{-}M_{+}) = \frac{1}{Q+T} \times \\ \times \left(\frac{X+iY}{S^2} \right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Условия КИ для *ПВВП* $E_{*}(sM_{-}M_{+})$:

– если $a' > \frac{-m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{-m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' \in \left(\frac{-m+1}{2}, \frac{-m+2}{2} \right)$, тогда $E \rightarrow 0$,

но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{-m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' < \frac{-m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$.

Строгая КИ.

Г. Наконец, обсудим пучки с амплитудой в форме

$$E(M_{-1}M_{+}) = e^{i(Q-T)} \times \\ \times (X+iY)^m (R-Q)^{-m} M(a, 1+m; -i(R+Q)) \times \\ \times M(a-m, 1-m; i(R-Q)).$$

Здесь в работе [2] мы брали $Z < 0$. Однако, для получения ВППВ удобнее заменить в $E(M_{-1}M_{+})$ переменную $Q \rightarrow (-Q)$. Тогда получаем

$$E_*(M_{-1}M_{+}) = e^{-i(Q+T)} \times \\ \times (X+iY)^m (R+Q)^{-m} M(a, 1+m; -i(R-Q)) \times \\ \times M(a-m, 1-m; i(R+Q)).$$

Здесь можно взять $Z > 0$; $m \geq 0$. Применяем 1 преобразование Бейтмена. Затем, полагая $B \rightarrow 0$, находим, после некоторых преобразований, амплитуду ПБВП

$$E_*(sM_{-1}M_{+}) = \\ = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{S^2} \right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для ПБВП $E_*(sM_{-1}M_{+})$. Получаем, как для $E(sM_{-1}M_{+1})$

- если $a' > \frac{m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$;
- если $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$;
- если $a' \in \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2}\right)$, тогда $E \rightarrow 0$, но $W \rightarrow \infty$;
- если $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, но $W \rightarrow \infty$;
- если $a' < \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$.

Строгая КИ.

В отличие от пакетов $E(sM_{-1}M_{+1})$ здесь в $E_*(sM_{-1}M_{+1})$ следует полагать $Z_0 > 0$.

2 Физически реализуемые ПБВП ТК с непрерывным угловым индексом m

Предварительно обсудим возможности использования функций Трикоми U_{+} и U_{-} в (1.1).

При $Z \rightarrow \infty$ функции $U_{+} \rightarrow Q^{-a}$, $U_{-} \rightarrow \frac{R_{\perp}^2}{2Q}$, что

неплохо. Функции U_{+} и U_{-} при $|R_{\perp}| \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности, что физически неприемлемо. Попытки комплексифицировать переменные Z или X, Y функций U_{+} и U_{-} приводят к разрывам (скачкам) аргументов ($\mp i(R \pm Q)$) и соответственно амплитуд вблизи $Z = 0$, что также неприемлемо. Поэтому вариант $U_{-}U_{+}$ на всей оси Z не подходит. Однако можно использовать в

(1.1), например, функцию $M_{-}U_{+}$ при $Z > 0$ и функцию $U_{-}M_{+}$ при $Z < 0$. Далее мы будем обсуждать пучки в области полупространства.

А. Обсудим непараксиальные пучки $T-K$

$$E(U_{+}M_{-}) = e^{i(Z+T)} \times \\ \times (X+iY)^m M(a, m+1; i(R-Q)) \times \\ \times U(a, m+1; -i(R+Q)), \quad (2.1)$$

которые пригодны при $Z > 0$. Пусть при этом также $a = (m+1)/2$. Тогда

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m \exp\left(\frac{i(R-Q)}{2}\right) J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{-i(R+Q)}{2}\right) (R+Q)^{-m/2} H_{m/2}^{(2)}\left(-\frac{R+Q}{2}\right) \rightarrow \\ \rightarrow e^{i(\Phi+T)} J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right) H_{m/2}^{(1)}\left(\frac{R+Q}{2}\right).$$

Последний вариант (при $Z_0 = 0$) соответствует Ковалеву [10], формула (21). Такие пучки он называет пучками Ханкеля – Бесселя. У него упоминаются также фактически пучки $T-K$ $E(U_{-}M_{+})$. Применяем 1 преобразование Бейтмена для $E(U_{+}M_{-})$. Затем, полагая $B \rightarrow 0$, находим, после некоторых преобразований, амплитуду ПБВП

$$E(sU_{+}M_{-}) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times U\left(a, 1+m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для ПБВП. При $|R_{\perp}| \rightarrow \infty$

амплитуда $E(sU_{+}M_{-}) \rightarrow R_{\perp}^{m-2a} \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right)$. От-

сюда при $Z > 0 \cap Z_0 > 0 \cap m \geq 0$ – КИ ПБВП $E(sU_{+}M_{-})$ при произвольном параметре a . При $a = (m+1)/2$ ПБВП $E(sU_{+}M_{-})$ редуцируются к ПБВП Ханкеля – Бесселя.

Б. Обсудим непараксиальные пучки $T-K$ [2]

$$E_*(U_{+}M_{-1}) = e^{i(Q+T)} \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times (X-iY)^m M(a+m, 1+m; i(R-Q)) \times \\ \times U(a, 1-m; -i(R+Q)). \quad (2.3)$$

Здесь $Z > 0 \cap m \geq 0$. Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E_*(sU_{+}M_{-1}) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X-iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times U\left(a, 1-m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда следует, что условия КИ ПБВП $E(sU_{+}M_{-1})$ такие же, как для $E(sU_{+}M_{-})$, т. е. $Z > 0 \cap Z_0 > 0 \cap m \geq 0$ произвольном параметре a .

В. Обсудим теперь пучки $T-K$ [2]

$$E(\tilde{U}_+ M_-) = e^{i(T-Q)} \cdot (X+iY)^m \times \\ \times U(m+1-a, m+1; i(R+Q)) \times \\ \times M(m+1-a, m+1; -i(R-Q)).$$

Поменяем предварительно $T \rightarrow (-T)$ в $e^{i(T-Q)}$, чтобы в дальнейшем получить бегущее поле. Тогда

$$E_*(\tilde{U}_+ M_-) = e^{-i(T+Q)} \cdot (X+iY)^m \times \\ \times U(m+1-a, m+1; i(R+Q)) \times \\ \times M(m+1-a, m+1; -i(R-Q)).$$

Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E_*(sU_+ M_-) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times U\left(m+1-a, 1+m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Тогда, при $|R_\perp| \gg 1$ амплитуда волнового поля

$$E(\tilde{U}_+ M_-) \rightarrow R_\perp^{-m-2+2a} \exp\left(\frac{-iR_\perp^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда условия КИ ПБВП $E_*(sU_+ M_-)$ следующие: $Z > 0 \cap Z_0 < 0 \cap m \geq 0$ при произвольном параметре a .

Г. Обсудим теперь пучки $T-K$ [2]

$$E_*(M_{-1} \tilde{U}_+) = e^{i(T-Q)} \cdot (X-iY)^m \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times M(1-a, 1+m, -i(R-Q)) \times \\ \times U(-m+1-a, -m+1; i(R+Q)).$$

Предварительно выполним замену $T \rightarrow (-T)$ в $e^{i(T-Q)}$ и получаем при $Z > 0$ непараксиальные пучки $T-K$

$$E_{**}(M_{-1} \tilde{U}_+) = e^{-i(T+Q)} \cdot (X+iY)^m \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times M(1-a, 1+m, -i(R-Q)) \times \\ \times U(-m+1-a, -m+1; i(R+Q)).$$

Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E_{**}(s\tilde{U}_+ M_{-1}) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X-iY}{S^2} \right)^m \times \\ \times U\left(-m+1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Тогда, при $|R_\perp| \gg 1$ амплитуда волнового поля

$$E_{**}(s\tilde{U}_+ M_{-1}) \rightarrow R_\perp^{-2-2a+m} \exp\left(\frac{-iR_\perp^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда условия КИ ПБВП $E_{**}(s\tilde{U}_+ M_{-1})$ следующие: $Z > 0 \cap Z_0 < 0 \cap m \geq 0$ при произвольном параметре a , т. е. такие же, как для ПБВП $E_*(s\tilde{U}_+ M_-)$.

Аналогичные результаты получаются, если проанализировать варианты ПБВП $T-K$ других типов, включающих в свою амплитуду функции Трикоми $\tilde{U}_-$ и U_- . Здесь всегда $Z < 0$.

Заключение

В данной работе получены выражения, описывающие дополнительные типы 3D непараксиальных ПБВП $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах.

Установлено, что для таких ПБВП $K-K$ и $T-K$ путем подбора свободных параметров всегда можно добиться строгой КИ амплитуды и, тем самым, переносимой конечной мощности пакета и его физической реализуемости. Существенно также, что здесь для КИ не требуется гауссова аподизация пучков. Показано, что непараксиальные пучки $T-K$ физически реализуемы только в области полупространства $Z > 0$ или при $Z > 0$. Компьютерное моделирование в системе Maple подтверждает все эти выводы.

Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям параметра a сильно расширяет класс известных в настоящее время ПБВП с цилиндрической симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиргель, С.С. Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. I. 3D световые пучки Куммера – Куммера с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 13–17.
2. Гиргель, С.С. Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. II. 3D световые пучки Трикоми – Куммера и другие пучки с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 20–24.
3. Bateman, H. The conformal transformations of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 2. – P. 70–89.
4. Bateman, H. The transformations of the electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1910. – Vol. 8. – P. 223–264.
5. Бейтмен, Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн / Г. Бейтмен. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 180 с.
6. Besieris, I.M. Bateman conformal transformations within the framework of the bidirectional spectral representation / I.M. Besieris, A.M. Shaarawi, A.M. Attiya // Progress In Electromagnetics Research, PIER. – 2004. – Vol. 48. – P. 201–231.
7. Besieris, I.M. Spatiotemporall localized null electromagnetic waves I. Luminal / I.M. Besieris,

A.M. Shaarawi // Progress In Electromagnetics Research B. – 2008. – Vol. 8. – P. 1–28.

8. Utkin, A.B. Mathieu Progressive Waves / A.V. Utkin // Commun. Theor. Phys. – 2011. – Vol. 56. – P. 733–739.

9. Борисов, В.В. Производящие функции сфокусированных волновых мод типа Бесселя – Гаусса / В.В. Борисов // Записки семинаров ПОМИ. – 2002. – Т. 285. – С. 53–57.

10. Hillion, P. The Courant-Hilbert solutions of the wave equation / P. Hillion // J. Math. Phys. – 1992. – Vol. 33, № 8. – P. 2749–2753.

11. Hillion, P. The Bateman solutions of the spinor wave equation / P. Yillion // Modern Physics Letters A. – 1993. – Vol. 8, № 22. – P. 2111–2115.

12. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике. Т. 2. / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

13. Ковалёв, А.А. Лазерные пучки Ханкеля-Бесселя / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 297–304.

14. Изместьев, А.А. Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве / А.А. Изместьев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1970. – Т. XIII, № 9. – С. 1380–1388.

15. *Three-dimensional nonparaxial beams in parabolic rotational coordinates* / D. Deng [et al.] // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38, № 19. – P. 3934–3936.

16. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцию 14.10.2020.