

УДК 517.538.52+517.538.53

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МИТТАГ – ЛЕФФЛЕРА

Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RATIONAL APPROXIMATION OF THE MITTAG – LEFFLER FUNCTIONS

N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Установлено, что для функций Миттаг – Леффлера F_γ при $n \geq m-1$ и $n \rightarrow \infty$ аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают F_γ равномерно на компакте $D = \{z : |z| \leq 1\}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей. В частности, для функций Миттаг – Леффлера доказаны аналоги хорошо известных теорем Д. Браесса и Л. Трефезена, относящихся к аппроксимации функции $\exp(z)$.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, асимптотические равенства, функции Миттаг – Леффлера, рациональные аппроксимации.

It is shown that for $m-1 \leq n$ the Padé approximants $\{\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\}$, which locally deliver the best rational approximations to the Mittag – Leffler functions F_γ , approximate the F_γ as $n \rightarrow \infty$ uniformly on the compact set $D = \{z : |z| \leq 1\}$ at a rate asymptotically equal to the best possible one. In particular, analogues of the well-known results of Braess and Trefethen relating to the approximation of $\exp(z)$ are proved for the Mittag – Leffler functions.

Keywords: Padé approximations, asymptotic equality, Mittag – Leffler functions, rational approximations.

Введение

Предполагая, что параметр $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$, рассмотрим однопараметрическое семейство целых функций $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(z) = {}_1F_1(1; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\gamma)_k}, \quad (0.1)$$

где $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера. Ряды вида (0.1) принято называть гипергеометрическими рядами, а их суммы – гипергеометрическими функциями. Напомним, что функция Миттаг – Леффлера [1], [18] задаётся степенным рядом

$$E_{\rho, \beta}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(\rho p^{-1} + \beta)} \quad (\rho > 0, \beta \in \mathbb{C})$$

и является обобщением показательной функции. Принимая во внимание известное равенство $(\gamma)_p = \Gamma(p+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, где, как и в предыдущей формуле, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что функции (0.1) являются функциями Миттаг – Леффлера. В частности, к таким функциям относится $F_1(z) = e^z = \exp z$.

При $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ рациональная аппроксимация функций $F_\gamma \in \mathcal{F}$ подробно изучалась в [3]. Мы хотим обобщить результаты этой работы, предполагая, что параметр γ может принимать и

комплексные значения. Как и в [3] в качестве аппарата приближения будем использовать аппроксимации Паде функции F_γ , однако, метод доказательства основной теоремы будет существенно отличаться от метода этой работы.

Каждой $F_\gamma \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие таблицу Паде $[\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)]_{n,m=0}^{\infty}$, элементами которой являются дроби

$$\pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{p_n(z; F_\gamma)}{q_m(z; F_\gamma)}$$

вида

$$r_{n,m}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, \quad (0.2)$$

которые однозначно определяются тем, что имеют максимально возможный порядок касания к ряду (0.1) в классе рациональных функций вида (0.2) [4]. Для F_γ будем также рассматривать её

таблицу Чебышёва $[r_{n,m}^*(\cdot; F_\gamma)]_{n,m=0}^{\infty}$, состоящую из рациональных функций (0.2), наилучшим образом приближающих F_γ в равномерной норме, которые определяются из равенств (вообще говоря, неоднозначным образом)

$$\begin{aligned} R_{n,m}(F_\gamma; D) &= \inf \left\{ \|F_\gamma - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m} \right\} = \\ &= \|F_\gamma - r_{n,m}^*\|, \end{aligned}$$

где $\|g\| = \sup \{ |g(z)| : z \in D \}$, $D = \{z : |z| \leq 1\}$, а $\mathcal{R}_{n,m}$ – множество всех рациональных функций, представимых в виде (0.2) (если рациональная функция наилучшего приближения не единственна, то в качестве $r_{n,m}^*$ возьмем одну из таких функций).

Для экспоненты первые результаты об асимптотическом поведении строк таблиц Паде и Чебышёва были получены Э. Саффом [5], [6]. Хорошо известно [4], что дроби Паде $\pi_{n,m}(z; f)$ (учитывая современную терминологию, далее их будем называть аппроксимациями Паде) аналитической в окрестности нуля функции f являются локально наилучшими в классе $\mathcal{R}_{n,m}$ рациональными аппроксимациями степенного ряда, представляющего функцию f . Из результатов Э. Саффа, в частности, следует, что при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ бесконечно малые величины $\|e^z - \pi_{n,m}(z; e^z)\|$, $\|e^z - r_{n,m}^*(z; e^z)\|$ эквивалентны. Следовательно, для $\exp z$ локальные экстремальные аппроксимационные свойства её аппроксимаций Паде имеют глобальный характер. Позже в [7]–[9] эффект Саффа был установлен и для других целых функций. В этих работах соответствующие утверждения, как и у Э. Саффа, относятся в основном к строкам таблиц Паде и Чебышёва. В [10]–[12] для широкого класса целых функций ($\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, бесселевы функции, интеграл вероятности, функции Миттаг – Леффлера и др.) эффект глобальности экстремальных свойств дробей Паде был установлен для последовательностей $\{\pi_{n,m}(z; f)\}$ элементов таблиц Паде при $n+m \rightarrow \infty$ в предположении, что выполнены условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^4}{n} = 0. \quad (0.3)$$

К настоящему времени единственной нетривиальной функцией, для которой таблицы Паде и Чебышёва исследованы в полном объеме, является экспонента. В случае таблицы Паде соответствующее утверждение в виде гипотезы было сформулировано Г. Мейнардусом. Гипотеза Г. Мейнардуса доказана Д. Браессом [13]: для каждого $z \in D$ при $n+m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n,m}(z; e^z) &= \\ &= \frac{(-1)^m m! n! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Здесь и далее предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по всем $z \in D$.

Поведение последовательностей элементов таблицы Чебышёва экспоненты полностью описано Л. Трефезеном [14]: при $n+m \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(e^z; D) = \|e^z - r_{n,m}^*(z; e^z)\| =$$

$$= \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!} (1+o(1)).$$

Из результатов Д. Браесса и Л. Трефезена следует, что для экспоненты эффект Саффа при $n+m \rightarrow \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0. \quad (0.4)$$

В этой связи в [3] было сделано предположение о том, что константа 4 в равенстве (0.3) не является точной. В этой же работе при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ для функций Миттаг – Леффлера это предположение нашло подтверждение.

Перейдем непосредственно к формулировке основных результатов данной работы.

Теорема 0.1. Пусть $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Тогда при $n \geq m-1$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$\begin{aligned} F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) &= \\ &= \frac{(-1)^m m! (\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (0.5)$$

Основываясь на тождестве $e^{-z} = 1/e^z$ и определении аппроксимаций Паде, легко показать, что $\pi_{n,m}(z; e^z) = 1/\pi_{m,n}(-z; e^z)$. Поэтому при исследовании всей таблицы Паде экспоненты без потери общности достаточно рассмотреть поведение её элементов, лежащих не ниже главной диагонали, т. е. при $n \geq m$. Поэтому классический результат Д. Браесса является частным случаем теоремы 0.1. О необходимости условий $n \geq m-1$ в теореме 0.1 при $\gamma \neq 1$ смотри [15].

Теорема 0.2. Пусть $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Тогда, если $n \geq m-1$ и $m = o(n)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \sim \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}. \quad (0.6)$$

Если же $n \geq m-1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \leq 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \asymp \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}. \quad (0.7)$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называются эквивалентными $(\alpha_n \sim \beta_n)$, если $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Бесконечно малые $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$ ($\alpha_n \asymp \beta_n$), если существуют такие положительные постоянные A и B , для которых $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Сравнивая теоремы 0.1 и 0.2, нетрудно видеть, что если $m = o(n)$, то при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ для функций Миттаг – Леффлера также имеет место эффект Саффа. В случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$,

$0 < \theta \leq 1$, мы можем лишь утверждать, что б. м. $\|F_\gamma - \pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\|$ и $\|F_\gamma - r_{n,m}^*(\cdot; F_\gamma)\|$ имеют одинаковый порядок.

1 Доказательство теоремы 0.1

Доказательство теоремы 0.1 существенно отличается от доказательства аналогичной теоремы из [3], где рассматривался случай действительных γ . В своей основной части оно опирается на два известных в теории аппроксимаций Паде результата, принадлежащих Ван Россуму [16] и А.И. Аптекареву [17].

Утверждение 1.1 [16]. Если $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ и $n \geq m-1$, то

$$q_m(z; F_\gamma) F_\gamma(z) - p_n(z; F_\gamma) = \frac{(-1)^m m! z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (n+\gamma)_{m+1}} F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z). \quad (1.1)$$

Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!}. \quad (1.2)$$

Утверждение 1.2 [17]. Если $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ и $n \geq m-1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$q_m(z; F_\gamma) = e^{-\frac{mz}{n+m+\gamma+1}} (1 + o(1)). \quad (1.3)$$

Доказательству теоремы 0.1 предположим две леммы.

Лемма 1.1. Если $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, $n \geq m-1$ и

$$\Delta(n, m, k) = \frac{(m+1)_k}{(n+m+\gamma+1)_k} - \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^k,$$

то при произвольном m и достаточно больших n

$$|\Delta(n, m, k)| \leq \frac{k}{n+m+\gamma_1+1}, \quad (1.4)$$

где $k = 2, 3, \dots$, а $\gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma$.

Доказательство проведём с помощью индукции по k . Пусть $k = 2$. Тогда легко заметить, что

$$\Delta(n, m, 2) = \frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \cdot \frac{n+\gamma}{(n+m+\gamma+1)(n+m+\gamma+2)}.$$

Поэтому при произвольном m и достаточно больших n

$$|\Delta(n, m, 2)| \leq \frac{2}{n+m+\gamma_1+1}.$$

При $k = 3$ неравенство (1.4) доказывается аналогично.

Предположим, что $k \geq 4$ и (1.4) справедливо для $k-1$ при произвольном m . Представим $\Delta(n, m, k)$ в виде

$$\Delta(n, m, k) = \frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \cdot \left[\Delta(n, m+1, k-1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m+2}{n+m+\gamma+2} \right)^{k-1} - \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^{k-1} \right]$$

С помощью формулы

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

преобразуем разность в квадратных скобках. В результате получим, что она равна

$$\frac{n+\gamma}{(n+m+\gamma+1)(n+m+\gamma+2)} \times \sum_{p=0}^{k-2} \left(\frac{m+2}{n+m+\gamma+2} \right)^p \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^{k-p-2}. \quad (1.5)$$

Отсюда и из предыдущего равенства, основываясь на предположении индукции, с учётом того, что при $k \geq 4$ и достаточно больших n

$$\left| \frac{m+2}{n+m+\gamma+2} \right| < \frac{11}{20},$$

$$\left| \frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right| < \frac{11}{20},$$

а сумма в (1.5) меньше 1, получаем

$$|\Delta(n, m, k)| \leq \frac{m+1}{n+m+\gamma_1+1} \times \left[\frac{k-1}{n+m+\gamma_1+2} + \frac{1}{n+m+\gamma_1+1} \right] \leq \frac{k}{n+m+\gamma_1+1}. \quad \square$$

Лемма 1.2. При $n \geq m-1$, и $n \rightarrow \infty$

$${}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) = e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} (1 + o(1)). \quad (1.6)$$

Доказательство. Из (1.2) следует, что

$${}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)_k}{(n+m+\gamma+1)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

С другой стороны

$$e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^k \frac{z^k}{k!}.$$

Поэтому, так как $\Delta(n, m, 0) = \Delta(n, m, 1) = 0$, применяя лемму 1.1, получим

$$\left| {}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) - e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta(n, m, k)}{k!} z^k \right| \leq \frac{1}{n+m+\gamma_1+1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k-1)!}.$$

Отсюда, в силу ограниченности модуля функции $e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}}$ по совокупности параметров n, m и $z \in D$, вытекает (1.6). $\square$

Теперь для доказательства теоремы 0.1 достаточно воспользоваться утверждениями 1.1 и 1.2, легко проверяемым равенством

$$(n+\gamma)_{m+1} = \frac{(\gamma)_{n+m+1}}{(\gamma)_n}$$

и при этом учесть, что при $n \geq m-1$ и $n \rightarrow \infty$

$$e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} = e^{\frac{mz}{n+m}} (1 + o(1)), e^{-\frac{mz}{n+m+\gamma+1}} = e^{-\frac{mz}{n+m}} (1 + o(1)).$$

2 Доказательство теоремы 0.2

При достаточно больших n рассмотрим аналитическую в D функцию

$$\varphi(z) := F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma).$$

Покажем, что

$$\min_{|z|=1} |\varphi(z)| \leq R_{n,m}(F_\gamma; D) \leq \max_{|z|=1} |\varphi(z)|. \quad (2.1)$$

Правое неравенство в (2.1) вполне очевидно. Для доказательства левого неравенства воспользуемся следующей леммой Гончара – Дзядыка [18, лемма 3.1].

Лемма 2.1. Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на $\bar{G}$ функция φ имеет в G по крайней мере $n+1$ нуль с учетом кратности, то при произвольном $m \geq 0$ справедливо неравенство

$$R_{n,m}(\varphi; \bar{G}) \geq \min_{\partial G} |\varphi(z)|,$$

где ∂G – граница области G .

Из теоремы 0.1 следует, что в круге $\{z: |z| < 1\}$ с учетом кратности φ имеет $n+m+1$ нуль. Поэтому, применяя лемму 2.1, получим

$$\begin{aligned} R_{n,m}(F_\gamma; D) &= \|F_\gamma - r_{n,m}^*\| = \|F_\gamma - \pi_{n,m} - (r_{n,m}^* - \pi_{n,m})\| = \\ &= \|\varphi - \tilde{r}_{n+m,2m}\| \geq R_{n+m,2m}(\varphi; D) \geq \min_{|z|=1} |\varphi(z)|. \end{aligned}$$

Неравенство (2.1) доказано.

Теперь для доказательства эквивалентности (0.6) достаточно заметить, что из (0.5) при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$\max_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim \min_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Соотношение (0.7) доказывается аналогично. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mittag-Leffler, M.G. Sur la nouvelle fonction $E(x)$ / M.G. Mittag-Leffler // C.R. Akad. Sci. Paris. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.
2. Джрбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.
3. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сб. – 2007. – Vol. 198, № 7. – P. 109–122.
4. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
5. Saff, E.B. The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function / E.B. Saff // II. Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 32. – P. 187–194.
6. Saff, E.B. On the degree of best rational approximation to the exponential function /

E.B. Saff // J. Approx. Theory. – 1973. – Vol. 9, № 2. – P. 97–101.

7. Lubinsky, D.S. Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. II. / D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1988. – Vol. 4. – P. 321–339.

8. Levin, A.L. Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1990. – Vol. 6. – P. 257–286.

9. Березкина, Л.Л. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / Л.Л. Березкина, В.Н. Русак // Весті АН БССР. Сер. фіз.-матем. наук. – 1990. – № 4. – С. 27–32.

10. Русак, В.Н. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / В.Н. Русак, Та Хонг Куанг // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 10. – С. 868–871.

11. Русак, В.Н. Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора / В.Н. Русак, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 9. – С. 63–92.

12. Levin, A.L. Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 293. – P. 533–545.

13. Braess, D. On the degree of best rational approximation to the exponential function / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

14. Trefethen, L.N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk / L.N. Trefethen // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 380–384.

15. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

16. Van Rossum, H. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.

17. Аптекарев, А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$ / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

18. Дзядык, В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ / В.К. Дзядык // Матем. сборник. – 1979. – Т. 108 (150), № 2. – С. 247–267.

Поступила в редакцию 23.11.2020.