Проблемы физики, математики и техники, № 1 (46), 2021

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

КВАЗИОБРАТИМОСТЬ СЕТЕЙ ДЖЕКСОНА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Ю.В. Малинковский, В.А. Немилостивая

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

QUASI-REVERSIBILITY OF JACKSON'S NETWORKS WITH EXPONENTIAL CONSTRAINT ON THE SOJOURN TIME OF CLAIMS

Yu.V. Malinkovskii, V.A. Niamilastsivaya

F. Scorina Gomel State University

Исследуются выходящие потоки при помощи процедуры обращения времени для экспоненциальной сети массового обслуживания, состоящей из центров двух видов – однолинейных и многолинейных. Длительность пребывания в центрах сети – это случайная величина, для которой при фиксированном числе требований в центре условное распределение является экспоненциальным. Установлена квазиобратимость марковского процесса состояний сети.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания*, *однолинейные и многолинейные центры*, *ограниченная длительность пребывания*, *обращение времени*, *квазиобратимость*.

Outbound flows are investigated using the reverese time procedure for an exponential queuing network containing knots of two types - single-line and multi-line. The sojourn time at the knots of network is limited by an exponential random variable for a fixed number of claims in the knot. The quasi-reversibility of the Markov network process is established.

Keywords: *queuing network*, *single-line and multi-line knots*, *limited sojourn time*, *reverse time*, *quasi-reversibility.*

Введение

Системы массового обслуживания, в которых время пребывания требований случайно и имеет экспоненциальное распределение, рассматривались в классической монографии [1]. Стохастические сети со случайным временем пребывания заявок в узлах исследовались в статьях [2]–[6]. В работах [7], [8] впервые исследовались стохастические сети, в которых отличалось поведение обслуженных заявок и заявок с истёкшим временем пребывания. Стационарное распределение сетей Джексона с двумя типами обслуживающих центров и экспоненциальным временем пребывания требований в них найдено в [9]. В настоящей статье исследуется характер выходящих из этой сети потоков требований и доказывается квазиобратимость марковского процесса.

1 Модель сети массового обслуживания

В стохастическую сеть, содержащую N центров, поступает стационарный пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Поступающее в сеть массового обслуживания требование одномоментно и независимо от остальных требований следует в i-й центр с вероятностью p_{0i}, $\left(i=1,\ldots,N,\ p_{01}+p_{02}+\cdots+p_{0N}=1\right)$. Число мест для ожидания требований в обслуживающих центрах бесконечно. Стохастическая сеть состоит из двух випов обслуживающих центров – однолинейных и многолинейных.

Длительность обслуживания требования единственным прибором i-го центра имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_i\ \left(i=1,\ldots,M\right)$, условное распределение продолжительностей обслуживания требований в оставшихся $N-M$ центрах, когда в них находится n_i требований, – показательное с параметром $\mu_i\left(n_i\right)$, при этом $\mu_i\left(n_i\right)>0$ если $n_i\in\mathbb{N}$ и $\mu_i\left(0\right)=0\quad\left(i=M+1,M+2,\ldots,N\right)$. Длительность пребывания требования в i-ом центре является случайной величиной, условное распределение которой (если в i-м центре находится n_i требований) экспоненциальное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$ $\left(i=1,\ldots,N\right)$. Из этого вытекает, что, условная вероятность того, что пребывание любого требования завершится в промежутке времени $\left[t,t+h\right)$, если в момент t в i-м обслуживающем центре находилось n_i требований, равна $\frac{\nu_i}{n_i}h+o\left(h\right)$ при $h\to0$, а условная вероятность завершения пребывания по крайней мере одного из требований равна $\nu_ih+o\left(h\right)$. Если требование поступает в центр, не содержащий требований, оно сразу же начинает обслуживаться. Процессы поступления, обслуживания и пребывания требований в обслуживающих центрах являются независимыми, а обслуживание требований производится в порядке их поступления. Требование, обслуженное в i-м центре, одномоментно и независимо от иных требований с вероятностью p_{ij} направляется в j-й центр, а с вероятностью p_{i0} оставляет сеть $(i, j = 1,\dots, N, \quad p_{i0} + p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1)$. Требование, продолжительность пребывания которого в i-м центре истекло, одномоментно и независимо от других требований с вероятностью $r_{i,j}$ для $i = 1,\dots, M$ переходит в j-й центр обслуживания, а с вероятностью r_{i0} оставляет сеть $(j = 1,\dots, N,\ r_{i0} + r_{i1} + \dots + r_{iN} = 1)$. Если же $i = M+1, M+2,\dots, N$, то оно ведёт себя как обслуженное, то есть с вероятностью p_{ij} направляется в j-й центр, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $(j = 1,\dots, N)$. Центр с номером 0 будем отождествлять с внешностью сети. Имеем две стохастические матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

Матрица P является как маршрутной матрицей обслуженных требований, так и маршрутной матрицей неудовлетворенных требований для центров $i = M+1, M+2,\dots, N$, а R – маршрутной матрицей неудовлетворенных требований для центров $i = 1,\dots, M$. Таким образом, $p_{00} = r_{00} = 0,\ r_{0j} = p_{0j}$ для $j = 1,\dots, N$.

Матрица $S = (s_{i,j}, i, j = 0,1,\dots, N)$, где

$$s_{0j} = p_{0j},$$

$$s_{ij} = \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i} = \frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i} p_{ij} + \frac{\nu_i}{\mu_i + \nu_i} r_{ij},$$

$$i = 1,\dots, M,\ s_{ij} = p_{ij},\ i = M+1, M+2,\dots, N,$$

стохастическая и отвечает за движение требований между центрами $0,1,\dots,N$.

Состоянием сети в момент t будет значение многомерной цепи Маркова

$$\vec{n}(t) = (n_1(t), \dots n_N(t))$$

с непрерывной длительностью, где $n_i(t)$ – число требований в i-ом центре в данный момент. Пространство состояний этой цепи $X = Z_+^N$, где $Z_+ = \{0,1,2,\dots\}$. Из неприводимости маршрутной матрицы и однозначной строгой положительности интенсивностей выхода из состояний данной цепи в моменты скачков, следует неприводимость цепи Маркова $\vec{n}(t)$.

Напомним основные результаты, полученные нами ранее [9] и необходимые нам для исследования выходящих потоков сети.

Составлены уравнения равновесия для вертикальных сечений:

$$\begin{gathered} \lambda \varepsilon_i p_i(n_i - 1) = (\mu_i + \nu_i) p_i(n_i), \\ n_i = 1,2,\dots, i = 1,\dots, M; \end{gathered} \qquad (1.1)$$

$$\begin{gathered} \lambda \varepsilon_i p_i(n_i - 1) = (\mu_i(n_i) + \nu_i) p_i(n_i), \\ n_i = 1,2,\dots, i = M+1, M+2,\dots, N. \end{gathered}$$

Полученное нами в [9] уравнение трафика имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i s_{ij} = \\ = p_{0j} + \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i} + \sum_{i=M+1}^{N} \varepsilon_i p_{ij}, \qquad (1.2) \\ j = 1,\dots, N. \end{gathered}$$

Будем предполагать, что маршрутная матрица S является неприводимой. Тогда уравнение трафика (1.2) при фиксированных $\mu_i, \nu_i, i = 1,\dots,N$ имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$.

В статье [9] была доказана

Лемма 1.1. *При выполнении уравнения трафика* (1.2)

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i s_{i0} = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}}{\mu_i + \nu_i} + \sum_{i=M+1}^{N} \varepsilon_i p_{i0} = 1.$$

2 Исследование выходящих потоков

Исследуем вид выходящих из стохастической сети потоков. Если обозначить интенсивность перехода цепи из одного состояния $n \in X$ в другое состояние $m \in X$ через $q(n, m)$, то получим

$$\begin{gathered} q(n, n + e_i) = \lambda p_{0i},\ i = 1,\dots, N, \\ q(n, n - e_i) = (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) I_{\{n_i \neq 0\}},\ i = 1,\dots, M, \qquad (2.1) \\ q(n, n - e_i) = (\mu_i(n_i) + \nu_i) p_{i0} I_{\{n_i \neq 0\}}, \\ i = M+1, M+2,\dots, N. \end{gathered}$$

Используем теорему о конечномерных согласованных распределениях, тогда можно продолжить процесс на отрицательную полуось так, чтобы он оставался консервативным стационарным марковским процессом. Теперь рассмотрим два процесса: процесс $\{\vec{n}(t), t \in \Re\}$ и процесс с обращенным временем $\{\vec{n}^R(t), t \in \Re\}$, где $\vec{n}^R(t) = \vec{n}(-t)$, который, как известно [10], также является стационарным консервативным марковским процессом с тем же стационарным распределением и теми же интенсивностями выхода из состояний, что и первоначальный процесс. Все характеристики процесса с обращенным временем будем обозначать аналогично первоначальному процессу, но с верхним индексом R. Используем тот факт, что интенсивности перехода процессов в прямом и обратном времени связаны зависимостью [10]

$$q^R(n,m)=\frac{p(m)}{p(n)}q(m,n).$$

Тогда из (2.1) и (1.1) найдём

$$q^R(n,n+e_i)=\frac{p(n+e_i)}{p(n)}q(n+e_i,n)=$$

$$=\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i+\nu_i}(\mu_i p_{i0}+\nu_i r_{i0})I_{\{n_i\neq 0\}},\ i=1,\ldots,M;$$

$$q^R(n,n+e_i)=\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(n_i)+\nu_i}(\mu_i(n_i)+\nu_i)I_{\{n_i\neq 0\}}p_{i0}=$$

$$=\lambda\varepsilon_i p_{i0},\quad i=M+1,M+2,\ldots,N.$$

Обозначим

$$p_{0i}^R=\varepsilon_i\frac{\mu_i p_{i0}+\nu_i r_{i0}}{\mu_i+\nu_i},\ i=1,\ldots,M,$$

$$p_{0i}^R=\varepsilon_i p_{i0},\ i=M+1,M+2,\ldots,N,$$

тогда

$$q^R(n,n+e_i)=\lambda p_{0i}^R,\ i=1,\ldots,N. \qquad (2.2)$$

В силу Леммы 1.1 $p_{01}^R+p_{02}^R+\cdots+p_{0N}^R=1$.

Итак, процесс с обращённым временем описывает некоторую сеть массового обслуживания. Причём, учитывая (2.2), входящий в эту сеть поток является стационарным пуассоновским с интенсивностью λ, а каждое требование просеивается на i-ый центр независимо от других требований с вероятностью p_{oi}^R. Используя известный факт, что процедура просеивания рекуррентна, получим, что и входящие потоки в сеть в обратном времени независимые стационарные пуассоновские потоки. Эти потоки для первоначальной стохастической сети являются выходящими потоками. Исходя из этого, мы можем сделать вывод, что выходящие из первоначальной стохастической сети потоки требований являются независимыми между собой стационарными пуассоновскими потоками. Более того, так как в сети в реверсивном времени текущее состояние не зависит от будущих поступлений, а будущие поступления для сети в обратном времени совпадает с прошлыми уходами из первоначальной сети, то этим доказано, что текущее состояние первоначальной стохастической сети не зависит от прошлых уходов. Таким образом, нами доказан следующий результат.

***Теорема* 2.1.** *В стационарном режиме процесс* $\{\vec{n}(t),t\in\Re\}$ *является квазиобратимым, т. е. выходящие из сети потоки требований являются независимыми стационарными пуассоновскими, а текущее состояние сети не зависит от прошлых уходов требований из сети.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко*, *Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 431с.

2. *Ковалёв*, *Е.А.* Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях / Е.А. Ковалёв // АВТ. – 1985. – № 2. – С. 50–55.

3. *Якубович*, *О.В.* Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами сигналов и положительных заявок и ограничением на время пребывания / О.В. Якубович // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – Ч. 2. – С. 207–211.

4. *Якубович*, *О.В.* Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания положительных, отрицательных заявок и сигналов / О.В. Якубович, В.Е. Евдокимович // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 63–67.

5. *Летунович*, *Ю.Е.* Неоднородные сети с ограничением на время пребывания в режимах обслуживания / Ю.Е. Летунович // АВТ. – 2010. – № 5. – С. 33–41.

6. *Якубович*, *О.В.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (137). – С. 74–77.

7. *Малинковский*, *Ю.В.* Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю.В. Малинковский // АВТ. – 2015. – № 4. – С. 67 – 78.

8. *Малинковский*, *Ю.В.* Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский // АВТ. – 2017. – № 10. – С. 155–167.

9. *Малинковский*, *Ю.В.* Стационарное распределение сетей Джексона с экспоненциальным ограничением на временя пребывания заявок / Ю.В. Малинковский, В.А. Немилостивая // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 73–77.

10. *Kelly*, *F.P.* Reversibility and Stochastic Networks / F.P. Kelly. – N.Y.: Wiley, 1979. – 230 p.

Поступила в редакцию 16.02.2021.