ФИЗИКА

УДК 539.12

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КВАДРУПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

Е.М. Овсиюк, А.Д. Коральков, Я.А. Войнова

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

VECTOR PARTICLE WITH ELECTRIC QUADRUPOLE MOMENT IN THE COULOMB FIELD, NONRELATIVISTIC THEORY

E.M. Ovsiyuk, A.D. Koral'kov, Ya.A. Voynova

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

В работе строятся решения уравнения для частицы со спином 1 и электрическим квадрупольным моментом в кулоновском поле. С учетом диагонализации оператора пространственного отражения получены системы из 4 и 6 радиальных уравнений. Обусловленные электрическим квадрупольным моментом слагаемые присутствуют в обеих системах. Система из 4 уравнений приводится к уравнению 2-го порядка, которое имеет две нерегулярные точки $r = 0, \infty$ рангов 3 и 4 регулярные точки. Построены его решения Фробениуса, исследована сходимость вовлеченных в решения 8-членных рядов. Условие трансцендентности таких решений дает физически интерпретируемую формулу для уровней энергии. Система из 6 уравнений оказывается сложной, в нерелятивистском приближении она сводится к двум связанным уравнениям 2-го порядка, откуда следует уравнение 4-го порядка. Построены решения Фробениуса этого уравнения. Выделены два типа решений, которые могли бы соответствовать связанным состояниям частицы.

Ключевые слова: *векторная частица*, *квадрупольный момент*, *кулоновское поле*, *нерелятивистское приближение*, *решения Фробениуса*, *условие трансцендентности*.

The problem of vector particle with electric quadrupole moment in external Coulomb field is investigated. After separation of the variables, two systems of 4 and 6 equations respectively were derived. The terms due to the electric quadrupole moment are present in both systems. The system of 4 equations is reduced to a second order equation which contains two irregular points $r = 0, \infty$ of the rank 3 and 2, and four regular points. There are constructed its Frobenius type solutions, convergence of involved series is studied. The transcendence condition for such solutions gives a physically interpretable formula for the energy levels. The system of 6 equations turns out to be complicated, in the nonrelativistic approximation it is reduced to two coupled equations of the second order, whence the equation of the fourth order follows. Frobenius solutions of this equation are constructed. Two types of solutions are identified that could correspond to the bound states of a particle.

Keywords: *vector particle*, *quadrupole moment*, *Coulomb field*, *nonrelativistic approximation*, *Frobenius solutions*, *transcendence condition*.

Введение

Известно, что в рамках теории релятивистских волновых уравнений можно предложить уравнения, которые описывают частицы с дополнительными электромагнитными характеристиками, также со спектрами спиновых или массовых состояний [1]–[3]. В частности, интенсивно исследовались уравнения для векторных частиц [4]–[19], обладающих помимо электрического заряда аномальным магнитным и электрическим квадрупольным моментами. Прежде такие уравнения решались в присутствии внешних однородных магнитного и электрического полей.

Уравнение для векторной частицы в случае внешнего кулоновского поля оказывается очень сложным: даже в случае обычной частицы без дополнительных электромагнитных моментов эта задача все еще не решена полностью. Однако в нерелятивистском пределе уравнение для обычной векторной частицы в кулоновском поле решается точно [20].

1 Исходное уравнение

В настоящей работе мы исследуем аналогичную нерелятивистскую задачу для частицы с квадрупольным моментом. Исходное уравнение имеет вид (предполагаем использование тетрадного формализма; см. обозначения в [3])

$$\left\{ i\beta^c \left[i\left(e^{\beta}_{(c)}\partial_{\beta} + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc} \right) - e' A_c \right] + \right.$$
$$\left. +\lambda \frac{e}{M} F_{\alpha\beta} P j^{\alpha\beta} - M \right\} \Psi = 0; \tag{1.1}$$

свободный параметр λ – безразмерный, P – проективный оператор, выделяющий из 10-компонентной функции тензорную составляющую. В декартовом базисе матрица P – это

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_6 \end{vmatrix}.$$

Ниже используются обозначения

$$M = \frac{mc}{\hbar}, \; e' = \frac{e}{c\hbar}, \; \Gamma = \lambda \frac{4\alpha}{M}, \; \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

В сферической тетраде [21] уравнение (1.1) принимает вид

$$\left[\beta^0\left(i\partial_t+\frac{\alpha}{r}\right)+i\left(\beta^3\partial_r+\frac{1}{r}(\beta^1 j^{31}+\beta^2 j^{32})\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\Sigma_{\theta,\phi}+\frac{\Gamma}{r^2}Pj^{03}-M\right]\Phi=0,$$

где зависящий от угловых переменных оператор определен равенством

$$\Sigma_{\theta,\phi}=i\,\beta^1\partial_\theta+\beta^2\,\frac{i\partial_\phi+ij^{12}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

В используемом базисе явный вид компонент оператора сохраняющегося полного момента следующий:

$$j_1=l_1+\frac{\cos\phi}{\sin\theta}ij^{12},\ \ j_2=l_2+\frac{\sin\phi}{\sin\theta}ij^{12},$$
$$j_3=l_3,\ \ j^{12}=\beta^1\beta^2-\beta^2\beta^1.$$

Ниже будем использовать волновую функцию и явные выражения для матриц Даффина – Кеммера в циклическом представлении [21], матрица ij^{12} имеет в этом базисе диагональную структуру:

$$ij^{12}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&t_3&0&0\\0&0&t_3&0\\0&0&0&t_3\end{vmatrix},\ \ t_3=\begin{vmatrix}+1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}.$$

Вид проективного оператора P не меняется при переходе от декартового базиса к циклическому.

2 Разделение переменных в релятивистском уравнении

Система радиальных уравнений для обычной векторной частицы в кулоновском поле известна [21], чтобы получить обобщенную систему уравнений для векторной частицы с аномальным моментом, достаточно найти явный вид дополнительного слагаемого в уравнении:

$$\frac{\Gamma}{r^2}Pj^{03}=\frac{\Gamma}{r^2}P(\beta^0\beta^3-\beta^3\beta^0),$$

$$P\,j^{03}=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&+i\\0&0&0&0&+i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Структура 10-компонентной волновой функции векторной частицы с квантовыми числами ε, j, m задается соотношениями [21]

$$\Psi(x)=\{f_0(x),\vec f(x),\vec E(x),\vec H(x)\},$$

$$\Phi_0(x)=e^{-i\varepsilon t}f_0(r)D_0,$$

$$\vec\Phi(x)=e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix}f_1(r)D_{-1}\\f_2(r)D_0\\f_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},\ \ \vec E(x)=e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix}E_1(r)D_{-1}\\E_2(r)D_0\\E_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},$$

$$\vec H(x)=e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix}H_1(r)D_{-1}\\H_2(r)D_0\\H_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},$$

где используются D-функции Вигнера [21]: $D_\sigma=D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0),\ \sigma=0,-1,+1.$ После необходимых вычислений находим систему уравнений

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-\frac{\nu}{r}(E_1+E_3)=mf_0,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+i\frac{\nu}{r}H_2=mf_1,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2-i\frac{\nu}{r}(H_1-H_3)=mf_2,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_3-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_3-i\frac{\nu}{r}H_2=mf_3;$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_1+\frac{\nu}{r}f_0-i\frac{\Gamma}{r^2}H_1=mE_1,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_2-\frac{d}{dr}f_0=mE_2,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_3+\frac{\nu}{r}f_0+i\frac{\Gamma}{r^2}H_3=mE_3,$$

$$-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1-i\frac{\nu}{r}f_2+i\frac{\Gamma}{r^2}E_1=mH_1,$$

$$i\frac{\nu}{r}(f_1-f_3)=mH_2,$$

$$i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_3+i\frac{\nu}{r}f_2-i\frac{\Gamma}{r^2}E_3=mH_3.$$

Сделаем замечания о размерностях, входящих в систему величин (и величин, которые будут использоваться дальше):

$$[\varepsilon]=\text{metre}^{-1},\ \ \varepsilon=\frac{\varepsilon'}{\hbar c};\ \ [m]=\text{metre}^{-1},$$

$$m=\frac{Mc}{\hbar},\ \ \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137};$$

$$[\Gamma]=\text{metre},\ \ \gamma=m\Gamma,\ \ [\gamma]=1,$$

$$E=\frac{\varepsilon}{m}=\frac{\varepsilon'}{Mc^2},\ \ [E]=1,\ \ x=rx,\ \ [x]=1.$$

Одновременно с операторами $\vec j^{\,2}, j_3$ будем диагонализировать оператор пространственной инверсии $\widehat\Pi$. В представлении декартовой тетрады и декартова базиса матриц β^a этот оператор имеет вид

$$\widehat\Pi=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-I&0&0\\0&0&-I&0\\0&0&0&+I\end{vmatrix}\widehat P,\ \ \widehat P\Psi(\vec r)=\Psi(-\vec r).$$

После перехода к сферической тетраде, а затем к циклическому представлению матриц β^a получаем другое представление для этого оператора [21]:

$$\widehat{\Pi}_{spher} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{vmatrix} \widehat{P},\ \Pi_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение на собственные значения $\widehat{\Pi}_{spher}\Psi = P\Psi$ имеет два решения:

$$P = (-1)^{j+1},\ f_0 = 0,\ f_3 = -f_1,\ f_2 = 0,$$
$$E_3 = -E_1,\ E_2 = 0,\ H_3 = H_1;$$
$$P = (-1)^j,\ f_3 = +f_1,\ E_3 = +E_1,\ H_3 = -H_1,\ H_2 = 0.$$

Для состояний с $P = (-1)^{j+1}$ имеем 4 радиальных уравнения:

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = mf_1,$$
$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 - i\frac{\Gamma}{r^2}H_1 = mE_1,$$
$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\Gamma}{r^2}E_1 = mH_1,\ 2i\frac{\nu}{r}f_1 = mH_2. \quad (2.1)$$

Для состояний с $P = (-1)^j$ имеем 6 радиальных уравнений:

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 = mf_0,$$
$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 = mf_1,$$
$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 = mf_2,$$
$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 + \frac{\nu}{r}f_0 - i\frac{\Gamma}{r^2}H_1 = mE_1,$$
$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 = mE_2,$$
$$i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - i\frac{\Gamma}{r^2}E_1 = -mH_1. \quad (2.2)$$

3 Состояния с четностью $P = (-1)^{j+1}$

В системе (2.1) исключим переменные H_1, H_2 из двух первых уравнений:

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)mE_1 - \frac{2\nu^2}{r^2}f +$$
$$+i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right]_1 = m^2 f_1,$$
$$\left[-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m - \frac{\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right]f_1 = \left(m^2 - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right)E_1.$$

Далее исключим функцию E_1, в результате получим уравнение 2-го порядка для f_1:

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left[-\frac{2rm}{mr^2 + \Gamma} - \frac{2rm}{mr^2 - \Gamma} + \frac{6}{r}\right]\frac{df_1}{dr} +$$
$$+\left[\frac{2\varepsilon\alpha}{r} + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 4}{r^2} + \frac{2i\Gamma\varepsilon}{mr^3} +\right.$$
$$+\frac{\Gamma\left(\Gamma m + i\alpha\right)}{mr^4} + \frac{2\nu^2\Gamma^2}{m^2 r^6} - m^2 + \varepsilon^2 +$$
$$\left.+\frac{2m\left(i\varepsilon r + i\alpha - 1\right)}{mr^2 + \Gamma} - \frac{2m\left(i\varepsilon r + i\alpha + 1\right)}{mr^2 - \Gamma}\right]f_1 = 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным: $x = mr$, $E = \varepsilon / m, \gamma = m\Gamma$, при этом получаем более компактную форму для уравнения:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left[-\frac{2x}{x^2 + \gamma} - \frac{2x}{x^2 - \gamma} + \frac{6}{x}\right]\frac{df_1}{dx} +$$
$$+\left[E^2 - 1 + \frac{2E\alpha}{x} + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 4}{x^2} + \frac{2i\gamma E}{x^3} +\right.$$
$$+\frac{\gamma(\gamma + i\alpha)}{x^4} + \frac{2\nu^2\gamma^2}{x^6} +$$
$$\left.+\frac{2(iEx + i\alpha - 1)}{x^2 + \gamma} - \frac{2(iEx + i\alpha + 1)}{x^2 - \gamma}\right]f_1 = 0. \quad (3.1)$$

Здесь имеем особые точки

$$x = 0,\ \text{Rank} = 3,\ x = \infty,\ \text{Rank} = 2;$$
$$x = -\sqrt{\gamma},\ +\sqrt{\gamma},\ -i\sqrt{\gamma},\ +i\sqrt{\gamma},\ \text{Rank} = 1. \quad (3.2)$$

Из физических соображений [2], [3] должно выполняться неравенство $\gamma^2 < 0$. Уравнение удобно представить в символическом виде:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left[-\frac{2x}{x^2 + \gamma} - \frac{2x}{x^2 - \gamma} + \frac{6}{x}\right]\frac{df_1}{dx} +$$
$$+\left[E^2 - 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} +\right.$$
$$\left.+\frac{a_4}{x^4} + \frac{a_6}{x^6} + \frac{L}{x^2 + \gamma} + \frac{N}{x^2 - \gamma}\right]f_1 = 0.$$

Строим его решения Фробениуса около точки $x = 0$ в виде $f_1(x) = e^{Dx}x^A e^{B/x}e^{C/x^2}F(x)$, для функции $F(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 F}{dx^2} +$$
$$+\left[-\frac{2x}{x^2 + \gamma} - \frac{2x}{x^2 - \gamma} + \frac{2A + 6}{x} - \frac{2B}{x^2} - \frac{4C}{x^3} + 2D\right]\frac{dF}{dx} +$$
$$+\left[(E^2 + D^2 - 1) + \frac{2AD + 6D + a_1}{x} +\right.$$
$$+\frac{A^2 + 5A - 2BD + a_2}{x^2} + \frac{-2AB - 4B - 4CD + a_3}{x^3} +$$
$$+\frac{-4AC + B^2 - 6C + a_4}{x^4} + \frac{4BC}{x^5} + \frac{4C^2 + a_6}{x^6} +$$
$$+\frac{-2A\gamma - 2Bx - 4C - 2D\gamma x + L\gamma}{\gamma\left(x^2 + \gamma\right)} +$$
$$\left.+\frac{-2A\gamma + 2Bx + 4C - 2D\gamma x + N\gamma}{\gamma\left(x^2 - \gamma\right)}\right]F = 0.$$

При выборе параметров как указано ниже (ищем решения для связанных состояний)

$$D = -\sqrt{1-E^2} < 0,\ A = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2 + i\gamma\alpha}{\sqrt{2\nu^2(-\gamma^2)}},$$

$$B = 0,\ C = -\frac{1}{2}\sqrt{2\nu^2(-\gamma^2)} < 0$$

уравнение упрощается:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \left[-\frac{2x}{x^2+\gamma} - \frac{2x}{x^2-\gamma} + \frac{2A+6}{x} - \frac{2B}{x^2} - \frac{4C}{x^3} + 2D \right]\frac{dF}{dx} +$$
$$+\left[\frac{2AD+6D+a_1}{x} + \frac{A^2+5A-2BD+a_2}{x^2} + \frac{-2AB-4B-4CD+a_3}{x^3} + \frac{-2A\gamma-2Bx-4C-2D\gamma x+L\gamma}{\gamma\left(x^2+\gamma\right)} + \frac{-2A\gamma+2Bx+4C-2D\gamma x+N\gamma}{\gamma\left(x^2-\gamma\right)} \right]F = 0.$$

Его решения строятся в виде степенных рядов $F(x) = \sum_0^\infty c_k x^k$ с 8-членным рекуррентным соотношением для коэффициентов:

$$\underline{k = 6,7,8,...}\quad \left[2D(k-6) + \left(2AD + 2D + a_1\right)\right]d_{k-6} +$$
$$+\Big[(k-5)(k-6) + \left(2+2A\right)(k-5) + \left(A^2 + A - 2BD + L + N + a_2\right)\Big]d_{k-5} +$$
$$+\left[-2B(k-4) + \left(-2AB - 4CD + a_3\right)\right]d_{k-4} +$$
$$+\left[-4C(k-3) + \left(8C - L\gamma + N\gamma\right)\right]d_{k-3} +$$
$$+\left[-2D\gamma^2(k-2) + \gamma^2\left(-2AD - 6D - a_1\right)\right]d_{k-2} +$$
$$+\Big[-\gamma^2(k-1)(k-2) - 2\gamma^2\left(3+A\right)(k-1) + \gamma^2\left(-A^2 - 5A + 2BD - a_2\right)\Big]d_{k-1} +$$
$$+\left[2B\gamma^2 k + \gamma^2\left(2AB + 4B + 4CD - a_3\right)\right]d_k +$$
$$+4C\gamma^2(k+1)d_{k+1} = 0,$$

кратко это соотношение можно представлять в виде

$$P_{k-6}c_{k-6} + P_{k-5}c_{k-5} + P_{k-4}c_{k-4} + P_{k-3}c_{k-3} + P_{k-2}c_{k-2} + P_{k-1}c_{k-1} + P_k c_k + P_{k+1}c_{k+1} = 0.$$

Сходимость рядов исследуется методом Пуанкаре – Перрона, это дает

$$R_{\text{conv}} = |\sqrt{\gamma}\,|, +\infty.$$

Для получения какого-нибудь правила квантования энергий исследуем условие трансцендентности решений (учитывая, что параметр γ – чисто мнимый, делаем замену $i\gamma \Rightarrow \gamma$), в результате получаем

$$P_{k-6} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha E = \sqrt{1-E^2}\left(n - 1/2 - \frac{\gamma\alpha - \gamma^2}{2\sqrt{\gamma^2 l(l+1)}} \right).$$

Отсюда, в зависимости от знака вещественного параметра квадрупольного момента γ, имеем два разных спектра

$$\gamma = \pm|\gamma|,$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{N^2}}},\ N = n - 1/2 \pm \frac{\gamma - \alpha}{2\sqrt{j(j+1)}}.$$

4 Случай минимального $j = 0$

Отдельно должен быть рассмотрен случай $j = 0$:

$$\Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t} f_0(r),\ \vec{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{vmatrix},\ \vec{H}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Радиальные уравнения имеют вид (квадрупольный момент себя никак не проявляет):

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 = mf_0,\ +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 = mf_2,$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 = mE_2,\ H_2 = 0.$$

Если исключить f_0, f_2, то для E_2 получим уравнение

$$\frac{d^2E_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dE_2}{dr} + \left(\varepsilon^2 - m^2 + \frac{2\varepsilon\alpha}{r} + \frac{\alpha^2 - 2}{r^2}\right)E_2 = 0,$$

которое дает известный спектр энергий

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}},\ N = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{9 - 4\alpha^2}\right) + n,$$
$$n = 0,1,2,...$$

5 Нерелятивистское приближение, состояния с четностью $P = (-1)^j$

Поскольку релятивистская система (2.2) из 6 радиальных уравнений очень сложная, перейдем в ней к нерелятивистскому пределу. Для этого исключим нединамические переменные f_0, H_1:

$$f_0 = -\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1\right],$$

$$H_1 = -\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right].$$

Оставшиеся 4 уравнения примут вид

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 - \frac{i}{m}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right] = mf_1,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}t\right)E_2+$$

$$+2i\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right]=mf_2,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_1-\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2+2\frac{\nu}{r}E_1\right]+$$

$$+i\frac{\Gamma}{r^2}\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right]=mE_1,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_2+\frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2+2\frac{\nu}{r}E_1\right]=mE_2.$$

Введем большие и малые компоненты соотношениями

$$f_1=\Psi_1+\psi_1,\ iE_1=\Psi_1-\psi_1,$$
$$f_2=\Psi_2+\psi_2,\ iE_2=\Psi_2-\psi_2.$$

Тогда, комбинируя уравнения (одновременно выделяем энергию покоя заменой $\varepsilon=m+E$), получим два уравнения, в которые входят только большие компоненты

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+2mE+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{2\nu^2}{r^2}-\frac{2\Gamma}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}\right)\Psi_1-$$
$$-\nu\left(\frac{2}{r^2}+\frac{\Gamma}{r^3}\right)\Psi_2=0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+2mE+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{2\nu^2+2}{r^2}\right)\Psi_2-$$
$$-2\nu\left(\frac{2}{r^2}+\frac{\Gamma}{r^3}\right)\Psi_1=0,$$
$$2\nu^2=j(j+1). \qquad (5.1)$$

Существуют еще два уравнения, которые позволяют вычислить малые компоненты по известным большим, их здесь не приводим. Из (5.1) методом исключения получаем уравнения 4-го порядка для $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$. Структура сингулярностей у этих двух уравнений 4-го порядка одинаковая. Достаточно исследовать одно уравнение, например, для функции Ψ_1. Форму уравнения можно упростить, если перейти к безразмерным величинам $x=rm,\ \Gamma m=\gamma,\ \varepsilon=E/m,$ в результате имеем

$$\frac{d^4\Psi_1}{dx^4}+\left[\frac{10}{x}-\frac{4}{2x+\gamma}\right]\frac{d^3\Psi_1}{dx^3}+$$
$$+\left[4\varepsilon+\frac{-24+4\alpha\gamma}{\gamma x}+\frac{22-4\nu^2}{x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\gamma}{x^3}-\frac{\gamma^2}{x^4}+\frac{48}{(2x+\gamma)\gamma}+\frac{8}{(2x+\gamma)^2}\right]\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+$$
$$+\left[\frac{64-16\nu^2+20\gamma^2\varepsilon-8\alpha\gamma}{\gamma^2 x}+\right.$$
$$\frac{-24+8\nu^2+16\alpha\gamma}{\gamma x^2}+\frac{8-12\nu^2}{x^3}+$$
$$\left.+\frac{-128-8\gamma^2\varepsilon+16\alpha\gamma+32\nu^2}{(2x+\gamma)\gamma^2}-\frac{32}{(2x+\gamma)^2\gamma}\right]\frac{d\Psi_1}{dx}+$$
$$+\left[4\varepsilon^2+\frac{128\nu^2+8\varepsilon\alpha\gamma^3+64\alpha\gamma-32\gamma^2\varepsilon}{x\gamma^3}+\right.$$
$$+\frac{-24\alpha\gamma-48\nu^2+20\gamma^2\varepsilon+4\alpha^2\gamma^2-8\varepsilon\nu^2\gamma^2}{\gamma^2x^2}+$$
$$+\frac{8\alpha\gamma-4\gamma^2\varepsilon+16\nu^2-8\alpha\nu^2\gamma}{\gamma x^3}+$$
$$+\frac{-8\nu^2-4\alpha\gamma-2\gamma^2\varepsilon+4\nu^4}{x^4}-\frac{2\gamma\left(-2+2\nu^2+\alpha\gamma\right)}{x^5}+$$
$$+\frac{2\gamma^2}{x^6}+\frac{-128\alpha\gamma+64\gamma^2\varepsilon-256\nu^2}{(2x+\gamma)\gamma^3}+$$
$$\left.+\frac{-32\alpha\gamma+16\gamma^2\varepsilon-64\nu^2}{(2x+\gamma)^2\gamma^2}\right]\Psi_1=0.$$

Удобно использовать его краткое представление

$$\frac{d^4}{dx^4}\Psi_1+\left(\frac{10}{x}-\frac{4}{2x+\gamma}\right)\frac{d^3}{dx^3}\Psi_1+$$
$$+\left(4\varepsilon+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_5}{2x+\gamma}+\frac{a_6}{(2x+\gamma)^2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1+$$
$$+\left(\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\frac{b_4}{2x+\gamma}+\frac{b_5}{(2x+\gamma)^2}\right)\frac{d}{dx}\Psi_1+$$
$$+\left(4\varepsilon^2+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\frac{c_4}{x^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{c_5}{x^5}+\frac{c_6}{x^6}+\frac{c_7}{2x+\gamma}+\frac{c_8}{(2x+\gamma)^2}\right)\Psi_1=0. \qquad (5.2)$$

6 Решения Фробениуса уравнения 4-го порядка

Точка $x=0$ является нерегулярной особой точкой и имеет ранг 2. Поэтому решения уравнения (5.2) в окрестности точки $x=0$ ищем в виде

$$\Psi_1(x)=x^Ae^{Bx}e^{C/x}f(x).$$

Параметры A, B, С фиксируются, чтобы упростить вид уравнения для $f(x)$.

После необходимых вычислений устанавливаем существование четырех различных решений I, II, III, IV (используем отрицательные значения для B, поскольку строим решения, пригодные для описания связанных состояний):

$$\text{(I, II)}\ \ B=-\sqrt{-2\varepsilon},\ C_1=0,\ A_1=-1,\ A_2=+2,$$

$$\begin{cases}\Psi_1(x)=e^{Bx}\dfrac{1}{x}f_1(x),\\ \Psi_2(x)=e^{Bx}x^2f_2(x),\end{cases}$$

$$\text{(III)}\ \ B=-\sqrt{-2\varepsilon},\ C_2=+\gamma,\ A_3=-1,$$

$$\Psi_3(x) = e^{Bx}\frac{1}{x}e^{+\gamma/x}f_3(x),$$

$$\text{(IV)}\ \ B = -\sqrt{-2\varepsilon},\ C_3 = -\gamma,\ A_4 = +1,$$

$$\Psi_4(x) = e^{Bx}xe^{-\gamma/x}f_4(x).$$

Для описания связанных состояний могут быть пригодны только два типа решений из четырех: те, которые стремятся к нулю в точке $x = 0$. Можно показать, что решения для функций $f_1(r), f_2(r)$ строятся в виде степенных рядов с 8-членными рекуррентными соотношениями. Решения для функций $f_3(r), f_4(r)$ также строятся в виде степенных рядов, но с 9-членными рекуррентными соотношениями. То есть, имеем 4 решения фробениусовского типа. Исследована сходимость этих степенных рядов методом Пуанкаре – Перрона. Возможные радиусы сходимости одинаковы: $R_{conv} = |\Gamma|/2,\ \infty$.

В окрестности регулярной особой точки $r = -\Gamma/2$ решения имеют вид

$$\Psi_1(r) = (2r+\Gamma)^s,\ \ s = 0, -1, -3, -4.$$

Только решения с индексом $s = 0$ ведут себя в точке $r = -\Gamma/2$ регулярно.

Использование в качестве правила квантования уровней энергии условия трансцендентности решений здесь приводит к достаточно тривиальному результату

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2}{n^2};$$

он едва ли корректно описывает реальный спектр энергии в этих состояниях, поэтому детали этого анализа не приводим.

7 Нерелятивистское описание состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$

В радиальной системе уравнений (2.1) исключим нединамические переменные H_1, H_2:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right]f_1 + \left[i(\varepsilon + \frac{\alpha}{r})m - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{\Gamma}{r^2}\right]E_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\Gamma^2}{r^4} - m^2\right)E_1 + \left[-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m - \frac{\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right]f_1 = 0. \qquad (7.1)$$

Затем вводим большие и малые компоненты: $f_1 = \Psi + \psi,\ iE_1 = \Psi - \psi,$ тогда система (7.1) примет вид (одновременно выделим энергию покоя формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow m + E_{n-r}$, где E_{n-r} – нерелятивистская энергия):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right)(\Psi + \psi) + \left[\left(m + E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right)m + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{i\Gamma}{r^2}\right](\Psi - \psi) = 0,$$

$$\left(\frac{\Gamma^2}{r^4} - m^2\right)(\Psi - \psi) + \left[\left(m + E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right)m - \frac{i\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right](\Psi + \psi) = 0.$$

Переписываем эти уравнения по-другому, выделим слагаемые, пропорциональные m^2:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)(\Psi + \psi) - m^2(\Psi + \psi) + \left[m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{i\Gamma}{r^2}\right](\Psi - \psi) + m^2(\Psi - \psi) = 0,$$

$$\frac{\Gamma^2}{r^4}(\Psi - \psi) - m^2(\Psi - \psi) + \left[m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{i\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right](\Psi + \psi) + m^2(\Psi + \psi) = 0.$$

Замечаем, что если сложить эти два уравнения, то все пропорциональные m^2 члены взаимно сокращаются, и в получаемом после этого уравнении имеем право пренебречь малой компонентной ψ в сравнении с большой Ψ. Так приходим к уравнению только для большой компоненты

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + 2m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2i\Gamma}{r^3} + \frac{\Gamma^2}{r^4}\right]\Psi = 0.$$

Осталось сделать замену $i\Gamma \Rightarrow \Gamma,$ в результате получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + 2m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2\Gamma}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right]\Psi = 0.$$

Это уравнение с двумя особыми точками в $r = 0, \infty,$ обе ранга 2; т. е. оно принадлежит к классу дважды вырожденных функций Гойна. Это уравнение имеет существенно более простую структуру сингулярных точек, чем его релятивистский аналог (см. (3.1)–(3.2)).

Построим решения Фробениуса в окрестности нуля, для этого используем подстановку

$$R(r) = e^{Cr}r^A e^{\frac{B}{r}}f(r),$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \left(\frac{2+2A}{r} - \frac{2B}{r^2} + 2C\right)\frac{df}{dr} + \left(\frac{2AC + 2C + 2m\alpha}{r} + \frac{A^2 + A - 2BC - j^2 - j}{r^2} + \right.$$

$$+\frac{-2AB-2\Gamma}{r^3}+\frac{B^2-\Gamma^2}{r^4}+C^2+2mE_{n-r}\Bigg)f=0.$$

При ограничениях на параметры (для C выбираем отрицательное значение)

$$C=-\sqrt{-2mE_{n-r}}<0;\ B_1=\Gamma,\ A_1=-1;$$

$$B_2=-\Gamma,\ A_2=+1$$

уравнение упрощается. Связанным состояниям должны соответствовать отрицательные значения для параметра B. Следовательно, в зависимости от знака величины Γ, имеем две разные возможности выбрать решения, пригодные для описания связанных состояний (требуем, чтобы около нуля множитель $e^{\frac{B}{r}}$ стремился к нулю):

$$\Gamma>0,\ A=+1,\ B=-\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}};$$

$$\Gamma<0,\ A=-1,\ B=+\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}}.$$

Уравнение для $f(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left(2C+\frac{2+2A}{r}-\frac{2B}{r^2}\right)\frac{df}{dr}+$$

$$+\left(\frac{2AC+2C+2m\alpha}{r}+\frac{A^2+A-2BC-j^2-j}{r^2}\right)f=0,$$

или кратко

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left(a+\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2}\right)\frac{df}{dr}+\left(\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}\right)f=0.$$

Решения строим в виде степенных рядов $f=\sum_{k=0}^{\infty}c_kr^k$. После простых вычислений находим 3-членные рекуррентные формулы:

$$k=0,\ b_2c_0+a_2c_1=0,$$

$$k=1,\ b_1c_0+(a_1+b_2)c_1+2a_2c_2=0,$$

$$k=2,\ (a+b_1)c_1+(2+2a_1+b_2)c_2+3a_2c_3=0,$$

т. е. имеем общую рекуррентную формулу

$$k\ge1,\ [a(k-1)+b_1]c_{k-1}+$$

$$+[k(k-1)+a_1k+b_2]c_k+a_2(k+1)c_{k+1}=0,$$

или кратко

$$P_{k-1}c_{k-1}+P_kc_k+P_{k+1}c_{k+1}=0,$$

где $P_{k-1}=2C(k-1)+2AC+2C+2m\alpha,$

$$P_k=k(k-1)+(2+2A)k+A^2+A-2BC-j^2-j,$$

$$P_{k+1}=-2B(k+1).$$

В соответствии с методом Пуанкаре – Перрона делим соотношение на k^2 и устремляем $k\to\infty$:

$$\frac{1}{k^2}\big[a(k-1)+b_1\big]+\frac{1}{k^2}\big[k(k-1)+a_1k+b_2\big]\frac{c_k}{c_{k-1}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}a_2(k+1)\frac{c_{k+1}}{c_k}\frac{c_k}{c_{k-1}}=0,$$

в результате получаем алгебраическое уравнение, определяющее возможный радиус сходимости:

$$r=0\ \Rightarrow\ R_{conv}=\frac{1}{|r|}=\infty.$$

Рассмотрим условие, выделяющее из всех решений трансцендентные функции Гойна

$$P_{n-1}=0\quad\Rightarrow\quad C=-\frac{m\alpha}{[(k-1)+A+2\,]},$$

где

$$\Gamma>0,\ A=+1,\ B=-\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}},$$

$$\Gamma<0,\ A=-1,\ B=+\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}}.$$

Отсюда, в зависимости от знака величины Γ, получаем разные решения:

$$\Gamma>0,\ R(r)=e^{-\sqrt{-2mE}r}re^{\frac{-\Gamma}{r}}f(r),\ E_{n-r}=-\frac{m\alpha^2}{2(k+2)^2},$$

$$\Gamma<0,\ (r)=e^{-\sqrt{-2mE}r}r^{-1}e^{\frac{+\Gamma}{r}}f(r),\ E_{n-r}=-\frac{m\alpha^2}{2k^2}.$$

Сопоставим эти формулы с релятивистскими, полученными также из условия трансцендентности:

$$E=\frac{m}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{N^2}}},\ N=n-1/2\pm\frac{\gamma-\alpha}{2\sqrt{j(j+1)}},\ \gamma=\pm|\gamma|.$$

Обращаем внимание на то, что с ростом j вклад зависящего от j члена быстро падает. Если отбросить этот вклад полностью, то с учетом равенства

$$\frac{m}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}}\approx m-\frac{1}{2}\frac{m\alpha^2}{N^2}$$

можно (игнорируя некоторое расхождение) полагать, что релятивистская и нерелятивистская формулы, полученные из двух разных условий трансцендентности и для разных решений, частично коррелируют друг с другом.

Заключение

В работе строятся решения квантово-механического уравнения для частицы со спином 1 и электрическим квадрупольным моментом в присутствии внешнего кулоновского поля. Выведена система уравнений для 10 радиальных функций. С учетом требования диагонализации оператора пространственного отражения система уравнений разбивается на независимые подсистемы из 4 и 6 уравнений соответственно для четностей $P=(-1)^{j+1}$ и $P=(-1)^j$. Дополнительные слагаемые, обусловленные электрическим квадрупольным моментом, присутствуют в обеих подсистемах.

Релятивистская радиальная система из 4 уравнений приводится к уравнению 2-го порядка для основной функции. Оно имеет две нерегулярные точки ранга 3 и 2, кроме того есть 4 регулярные точки с простыми индексами. Для этого уравнения построены решения Фробениуса, найдены 8-членные рекуррентные соотношения для коэффициентов степенных рядов, исследована сходимость рядов. Условие трансцендентности решений дает формулу для уровней энергии, которая представляется разумной с физической точки зрения.

Релятивистская система из 6 уравнений оказывается очень сложной, для упрощения задачи в ней выполнено нерелятивистское приближение. При этом радиальная система сводится к двум связанным дифференциальным уравнениям 2-го порядка для двух функций. Отсюда методом исключения получено уравнение 4-го порядка. Построены 4 независимые решения Фробениуса этого уравнения, исследована сходимость вовлеченных в них 8- и 9-членных степенных рядов. Среди решений выделены те, которые могли бы соответствовать связанным состояниям частицы в кулоновском поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плетюхов*, *В.А*. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Беларуская навука, 2015. – 328 с.

2. *Elementary particles with internal structure in external fields*. Vol I. General Theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

3. *Elementary particles with internal structure in external fields*. Vol II. Physical Problems / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.

4. *Corben*, *H.C*. The electromagnetic properties of mesotrons / H.C Corben, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1940. – Vol. 58. – P. 953.

5. *Symonds*, *N.* Vector meson in a homogeneous magnetic field / N. Symonds // Phil. Mag. – 1949. – Vol. 40. – P. 636–644.

6. *Aronson*, *A*. Spin-1 electrodynamics with an electric quadrupole moment / A. Aronson // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 186. – P. 1434–1441.

7. *Tsai*, *W*. Motion of spin-1 particles in homogeneous magnetic field, multispinor formalism / W. Tsai // Phys. Rev. D. – 1971. – Vol. 4. – P. 3652–3657.

8. *Kyriakopoulos*, *E*. Tensor approach to spin-one mesons. III. Magnetic Dipole Moment and Electric Quadrupole Moment / E. Kyriakopoulos // Phys. Rev. D. – 1972. – Vol. 6. – P. 2207.

9. *Shamaly*, *A*. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A.Z. Capri // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, № 14. – P. 1467–1470.

10. *Власов*, *П.А*. Электромагнитные моменты частиц со спином 1 и эквивалентность некоторого класса волновых уравнений // УФЖ. – 1977. – Т. 22. – С. 951.

11. *Савченко*, *О.Я*. Векторный мезон в электромагнитном поле / О.Я. Савченко // ТМФ. – 1993. – Т. 95. – С. 51–57.

12. *Савченко*, *О.Я*. Решение уравнения Кеммера и уравнения Брейта в циркулярно поляризованной волне / О.Я. Савченко // ТМФ. – 1994. – Т. 101. – С. 200–210.

13. *Савченко*, *О.Я*. Векторный мезон в циркулярно поляризованной волне и постоянном магнитном поле // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – С. 271–280.

14. *Квантовая механика частицы со спином* 1 *и аномальным магнитным моментом в магнитном поле* / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 83–90.

15. *Spin* 1 *particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 4 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 47–84.

16. *Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 3 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 11–46.

17. *Spin* 1 *particle with anomalous magnetic moment in an external uniform magnetic field* / V. Kisel, Ya.A. Voynova, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, V.M. Red'kov // NPCS. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 21–39.

18. *Spin* 1 *particle with anomalous magnetic mment in an external uniform electric field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21, № 1. – P. 1–20.

19. *Квантовая механика частицы со спином* 1 *и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле* / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.

20. *On describing bound states for a spin* 1 *particle in the external Coulomb field* / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings. – 2018. – Vol. 25. – P. 59–78.

21. *Редьков*, *В.М*. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Беларуская навука, 2011. – 339 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, *проект* № Ф20РА-007.

Поступила в редакцию 12.07.2020.