Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

ФИЗИКА

УДК 535.42

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. II. 3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ ТРИКОМИ – КУММЕРА И ДРУГИЕ ПУЧКИ С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PARABOLIC ROTARY COORDINATES. II. 3D TRICOMI – KUMMER LIGHT BEAMS AND OTHER BEAMS WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для непараксиальных и параксиальных 3D пучков Трикоми – Куммера (*T* – *K*) и других пучков с непрерывным угловым индексом *m* в параболических вращательных координатах. Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Показано, что параксиальные пучки без гауссиана могут переносить конечную мощность.

Ключевые слова: *непараксиальные пучки*, *параксиальные пучки*, *параболическиее пучки*, *пучки Трикоми – Куммера.*

Analytical expressions in the closed form for nonparaxial and paraxial 3D Tricomi – Kummer (*T* – *K*) beams and other beams with continuous angular index *m* in parabolic rotary coordinates are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of free parameters of such beams are formulated. It is shown, that paraxial beams without Gaussian can transfer finite power.

Keywords: *nonparaxial beams*, *paraxial beams*, *parabolic beams*, *Tricomi – Kummer beams.*

Введение

Потребности науки и техники приводят к необходимости поиска новых типов оптических полей. Исследования ведутся как в направлении нахождения новых решений, так и направлении обобщения уже известных решений. В работах [1]–[7] были введены пучки Бесселя [1], Бесселя – Гаусса [2], [3], Куммера – Гаусса [4], Куммера [5], Вебера – Гаусса [6] и Куммера – Куммера (*К-К*) [7] непрерывного порядка.

В данной работе этот подход распространяется на другие решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. Получены выражения, описывающие 3*D* световые пучки *Т* – *К* и другие типы пучков *К* – *К* с непрерывным угловым индексом *m* и обсуждаются физически приемлемые значения их свободных параметров. Некоторые решения с дискретным порядком *m* в параболических вращательных координатах обсуждались, например, в [8]–[10].

1 Дополнительные решения волнового уравнения в параболических координатах вращения

В работе [7] для монохроматических волн решения волнового уравнения в параболических координатах вращения

$$\left[x = \xi\eta\cos\varphi;\;\; y = \xi\eta\sin\varphi;\;\; z = (\eta^2-\xi^2)/2\right]$$

были представлены в безразмерном виде

$$E = e^{i(Z\pm T)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot(c_1M_-+c_2U_-)(c_5M_++c_6U_+),$$

где

$$M_\pm = M\left(a, m+1; \mp i(R\pm Z)\right);$$

$$U_\pm = U\left(a, m+1; \mp i(R\pm Z)\right);$$

$$kx = X;\;\; ky = Y;\;\; kz = Z;\;\; \omega t = T;$$

$$k\rho = k\sqrt{x^2+y^2} = R_\perp = \sqrt{X^2+Y^2};$$

$$R = kr = \sqrt{X^2+Y^2+Q^2};\;\; Q = Z - iZ_0.$$

Затем были исследованы решения типа

$$E(M_+M_-) = e^{i(Z\pm T)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot M_+M_-.$$

В настоящей работе получены и исследованы дополнительно другие типы световых пучков в параболических координатах вращения. Согласно Абрамовиц [11], гипергеометрическое уравнение, кроме решения $w(z) = M(a,b,z)$, имеет при $b \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$ еще другие независимые решения. Поэтому общее решение волнового уравнения, при $b \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ для световых монохроматических волн в параболических вращательных безразмерных координатах можно записать в виде

$$E = e^{i(Q+T)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot(a_1M_-+a_2M_{1-}+a_3U_-+a_4\tilde{U}_-)\times$$
$$\times(a_5M_++a_6M_{1+}+a_7U_-+a_8\tilde{U}_-). \qquad (1.1)$$

© *Гиргель С.С.*, 2020

Здесь обозначены функции

$$M_{\pm 1} = (R \pm Q)^{-m} M\left(a-m, 1-m; \mp i(R \pm Q)\right);$$

$$\tilde{U}_{\pm} = e^{\mp i(R \pm Q)} U\left(m+1-a, m+1; \pm i(R \pm Q)\right).$$

В (1.1) можно выбрать по одной независимой функции из каждой скобки, например $U_{+}M_{-1}$. В общем случае параметры a комплексные, т. е. $a = a' + ia''$. В параксиальном приближении, которое характеризует нижний индекс p, например,

$$U_{+p} = U\left(a, m+1; -i2Q\right);$$

$$U_{-p} = U\left(a, m+1; +i\frac{R_{\perp}^2}{2Q}\right).$$

А) Амплитуда реального пучка, чтобы пучок переносил конечную мощность, должна удовлетворять условиям квадратичной интегрируемости (КИ). Проанализируем условия КИ для непараксиальных волновых пучков $K-K$ типа

$$E(M_{-}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \cdot \left(X+iY\right)^m (R+Q)^{-m} \times$$

$$\times M\left(a, m+1; i(R-Q)\right) \cdot M\left(a-m, 1-m; -i(R+Q)\right).$$

При $Z > 0$ и m – нецелом, следуя Флюгге [12], получаем при $\left|R_{\perp}\right| \to \infty$ амплитуду

$$E(M_{-}M_{+1}) \to$$

$$\to \left(\frac{R_{\perp}^{-a}}{\Gamma(b-a)} + \frac{R_{\perp}^{a-b} e^{iR_{\perp}}}{\Gamma(a)}\right)\left(\frac{R_{\perp}^{-a+m}}{\Gamma(1-a)} + \frac{R_{\perp}^{a-1} e^{-iR_{\perp}}}{\Gamma(a-m)}\right).$$

Строго КИ нет. Если $a' = \frac{m}{2}$ или $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \to const$. Внутри интервала $\left(\frac{m}{2}, \frac{m+2}{2}\right)$ при возрастании $\left|R_{\perp}\right|$ функция $\left|E\right|$ убывает. При $a' = \frac{m+1}{2}$ (лучший вариант) $E \to R_{\perp}^{-1}$. Это – на границе КИ и можно назвать случай $E \to R_{\perp}^{-1}$ квази-КИ. Квази-КИ при реальных апертурных ограничениях будет приводить к практической реализации пучков $E(M_{-}M_{+1})$. При $a = \frac{m+1}{2}$, с точностью до постоянных множителей,

$$E(M_{-}M_{+1}) = e^{i(m\varphi+T)} \cdot J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right) \cdot J_{-m/2}\left(-\frac{R+Q}{2}\right).$$

Это – стоячая волна. Однако, если взять комплексный параметр a таким, чтобы $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда возникает бегущая волна с квази-КИ, как для волн типа $E(M_{-}M_{+})$.

Обсудим теперь возможные варианты, когда одна из функций Куммера M становится присоединенным полиномом Лагерра.

а) Пусть $a-m=n$, тогда при $\left|R_{\perp}\right| \to \infty$ амплитуда $E(M_{-}M_{+1}) \to \left(R_{\perp}^{2n-m} + R_{\perp}^{-1}\right)$. Отсюда при $(a=m-n) \cap (m \ge 2n+1)$ амплитуда $E \to R_{\perp}^{-1}$, а при $(a=n) \cap (m=2n)$ амплитуда $E \to const$.

б) Аналогично, пусть $a = 1+n$, тогда при $\left|R_{\perp}\right| \to \infty$ амплитуда $E(M_{-}M_{+1}) \to \left(R_{\perp}^{2n-m} + R_{\perp}^{-1}\right)$. Отсюда при $(a=1+n) \cap (m \ge 2n+1)$ амплитуда $E \to R_{\perp}^{-1}$, а при $(a=1+n) \cap (m=2n)$ амплитуда $E \to const$.

Пучок $E(M_{-}M_{+1})$ в параксиальном приближении описывается выражением

$$E(M_{-p}M_{+1p}) = e^{i(Z+T)} \times$$

$$\times \left(X+iY\right)^m Q^{-m} M\left(a-m, 1-m; -2iQ\right) \times$$

$$\times M\left(a, m+1; i\frac{R_{\perp}^2}{2Q}\right).$$

Выясним условия его КИ. При $\left|R_{\perp}\right| \to \infty$ амплитуда $E(M_{-p}M_{+1p}) \to R_{\perp}^{m} M\left(a, m+1; i\frac{R_{\perp}^2}{2Q}\right)$. Отсюда условия КИ для $E(M_{-p}M_{+1p})$ такие же, как для $E(M_{-p}M_{+p})$ [7]. Компьютерное моделирование интенсивности пучков подтверждает выводы о возможностях осуществления КИ таких пучков.

Б) Рассмотрим непараксиальный пучок $K-K$ типа

$$E(M_{-1}M_{+}) = e^{i(Q+T)} \times$$

$$\times \left(X+iY\right)^m (R-Q)^{-m} M\left(a, m+1; -i(R+Q)\right) \times$$

$$\times M\left(a-m, 1-m; i(R-Q)\right).$$

Он получается из $E(M_{-}M_{+1})$ заменами $R \to (-R)$. Здесь необходимо брать $Z < 0$. Тогда при $\left|R_{\perp}\right| \to \infty$ амплитуда

$$E \to M\left(a, m+1; -iR_{\perp}\right) \cdot M\left(a-m, 1-m+1; iR_{\perp}\right).$$

Условия КИ для пучка $E(M_{-1}M_{+})$ такие же, как для $E(M_{-}M_{+1})$. При $a' = \frac{m}{2}$ и $a' = \frac{m+1}{2}$ $E \to const$. Лучший вариант $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда снова имеем квази-КИ. Кроме того, еще существуют возможности квази-КИ а) и б), как для пучков вида $E(M_{-}M_{+1})$, рассмотренные выше.

В параксиальном приближении, при $Z < 0$, получаем

$$E(M_{-1p}M_{+p}) = e^{i(Q+T)} (X+iY)^m \times$$

$$\times Q^{-m} M\left(a-m, -m+1; -2iQ\right) \cdot M\left(a, 1+m; i\frac{R_{\perp}^2}{2Q}\right).$$

Отсюда условия КИ для пучков вида $E(M_{-1p}M_{+p})$ такие же, как для пучков $E(M_{-p}M_{+1p})$ и пучков $E(M_{-p}M_{+p})$, т. е. при $Z < 0$ и $Z_0 > 0$ возможны следующие варианты:

1. Если $a' < \frac{m}{2}$, тогда $\left|E\right| \to \infty$ и $W \to \infty$.

2. Если $a' = \dfrac{m}{2}$, тогда $E \to const$, но $W \to \infty$.

3. Если $a' \in \left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m+1}{2}\right]$, тогда $E \to 0$, но $W \to \infty$.

4. Если $a' > \dfrac{m+1}{2}$, тогда $E \to 0$ и $W \to const$.

Итак, необходимые и достаточные условия переносимой конечной мощности W параксиальных параболических пучков $K-K$ $E(M_{-1p}M_{+p})$ и, тем самым, их физической реализуемости следующие: $(Z_0 > 0) \bigcap \left(a' > \dfrac{m+1}{2}\right)$. При этом мнимая часть a'' параметра a не влияет на КИ. Компьютерное моделирование подтверждает эти выводы.

В) Обсудим непараксиальный пучок типа

$$E(M_{-1}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \times$$
$$\times \left(X + iY\right)^m R_\perp^{-2m} M\left(a-m, 1-m; -i(R+Q)\right) \times$$
$$\times M\left(a-m, 1-m; i(R-Q)\right).$$

При $X = Y \to 0$ и $m \geq 0$ возникает неопределенность в амплитуде типа $E \to 0/0$, поэтому делаем замену $m \to (-m)$ и получаем пучок

$$E_*(M_{-1}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \times$$
$$\times \left(X - iY\right)^m M\left(a+m, 1+m; -i(R-Q)\right) \times.$$
$$\times M\left(a+m, 1+m; i(R+Q)\right).$$

При последующих заменах $a + m = a_1$, $Y \to (-Y)$ пучок $E_*(M_{-1}M_{+1})$ преобразуется в пучок $E(M\_M_+)$, рассмотренный ранее в [7].

2 Волновые поля Трикоми – Куммера

Предварительно обсудим возможности использования функций Трикоми U_+ и U_- в (1.1). При $Z \to \infty$ функции $U_+ \to Q^{-a}$, $U_- \to \dfrac{R_\perp^2}{2Q}$, что неплохо. Функции U_+ и U_- при $|R_\perp| \to 0$ стремятся к бесконечности, что физически неприемлемо. Попытки комплексифицировать переменные Z или X, Y функций U_+ и U_- приводят к разрывам (скачкам) аргументов $(\mp i(R \pm Q))$ и соответственно амплитуд вблизи $Z = 0$, что также неприемлемо. Поэтому вариант U_U_+ на всей оси Z не подходит. Однако можно использовать в (1.1), например, функцию M_U_+ при $Z > 0$ и функцию U_M_+ при $Z < 0$. Далее мы будем обсуждать пучки *Т-К* в области полупространства.

А) Обсудим непараксиальные пучки $T-K$

$$E(U_+M_-) = e^{i(Z+T)} \cdot \left(X + iY\right)^m \times$$
$$\times M\left(a, m+1; i(R-Z)\right) \cdot U\left(a, m+1; -i(R+Z)\right), \tag{2.1}$$

которые пригодны при $Z > 0$. Рассмотрим возможности КИ непараксиальных пучков $T-K$ с амплитудой $E(U_+M_-)$, которые аналитичны при $Z > 0$. Тогда при $|R_\perp| \to \infty$ функция

$$\left(\frac{R_\perp^{-1}}{\Gamma(a)} + \frac{R_\perp^{-2a+m}}{\Gamma(m+1-a)}\right)\left(\frac{R_\perp^{-1}}{\Gamma(a)} + \frac{R_\perp^{-2a+m}}{\Gamma(m+1-a)}\right).$$

Отсюда, в лучшем случае, можно добиться только квази-КИ. Конкретно, при $a' \geq (m+1)/2$ функция $E(U\_M_+) \to R_\perp^{-1}$, т. е. имеет место квази-КИ; при $a' = m'/2$ функция $E \to const$; при $a' < m'/2$ функция $E \to \infty$.

В частности, пусть $a = (m+1)/2$. Тогда

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot \left(X + iY\right)^m \exp\left(\frac{i(R-Z)}{2}\right) J_{m/2}\left(\frac{R-Z}{2}\right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{-i(R+Z)}{2}\right)(R+Z)^{-m/2} H_{m/2}^{(2)}\left(-\frac{R+Z}{2}\right) \to .$$
$$\to e^{i(\varphi+T)} J_{m/2}\left(\frac{R-Z}{2}\right) H_{m/2}^{(1)}\left(\frac{R+Z}{2}\right).$$

Последний вариант соответствует Ковалеву [10], формула (21). Такие пучки он называет пучками Ханкеля – Бесселя. У него упоминаются также фактически пучки $T-K$ $E(U\_M_+)$. Таким образом, пучки Ханкеля – Бесселя обладают квази-КИ.

В статье Изместьева [8], формула (17), производится переход к параксиальному пределу у функции Трикоми, следуя преобразованию, предложенному Пинни [13]. Однако, как показывает компьютерное моделирование, преобразование Пинни не верно ни количественно, ни качественно. Поэтому проведем параксиализацию пучков $T-K$ с амплитудой $E(U_+M_-)$ стандартным путем. Тогда получаем

$$E(U_{+p}M_{-p}) = e^{i(Q-T)}\left(X + iY\right)^m \times$$
$$\times U_{+p}\left(a, m+1; -2iQ\right) \cdot M_{-p}\left(a, m+1; i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right). \tag{2.2}$$

Обсудим возможные условия КИ параксиальных пучков $E(U_{+p}M_{-p})$. Как видим, они такие же, как для пучков $E(M_{+p}M_{-p})$, рассмотренные в [7]. Итак, необходимые и достаточные условия переносимой конечной мощности W параксиальных параболических пучков $T-K$ (2.2) и, тем самым, их физической реализуемости следующие: $(Z_0 > 0) \bigcap \left(a' > \dfrac{m+1}{2}\right)$. При этом мнимая часть a'' параметра a не влияет на КИ. Компьютерное моделирование подтверждает эти выводы.

Б) Перейдем к непараксиальным пучкам $T-K$

$$E(U_+M_{-1}) = e^{i(Z+T)} \cdot (R-Q)^{-m} \times$$
$$\times \left(X + iY\right)^m M\left(a-m, 1-m; i(R-Q)\right) \times \tag{2.3}$$
$$\times U\left(a, 1+m; -i(R+Q)\right).$$

Существует неопределенность в выражении (2.3), при $X = Y = 0$ и $Z > 0$. Заменяя $m \to (-m)$ в (2.3) и преобразуя, устраняем неопределенность и получаем непараксиальные пучки $T - K$

$$E_*(U_+M_{-1}) = e^{i(Z+T)} \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times\left(X - iY\right)^m M\left(a+m, 1+m; i(R-Q)\right)\times \\ \times U\left(a, 1-m; -i(R+Q)\right). \qquad (2.4)$$

Пусть $a + m = -n$, тогда при $\left|R_\perp\right| \to \infty$ функция $E_*(U_+M_{-1}) \to R_\perp^{n-a}$ и нет КИ. При $1 - a = n$ $E_*(U_+M_{-1}) \to R_\perp^{-1}$, т. е. квази-КИ. При $\left|R_\perp\right| \to \infty$ функция $(R_\perp^{-2a-m} + R_\perp^{-1})(R_\perp^{-2a-m} + R_\perp^{-1})$. Тогда амплитуда непараксиальных пучков $E \to R_\perp^{-1}$, т. е. наблюдается квази-КИ, если удовлетворяется условие $a' \geq \dfrac{1-m}{2}$. При $a' = (-m)/2$ $E \to const$; при $a' < (-m)/2$ $\left|E\right| \to \infty$.

Исследуем условия КИ параксиальных пучков

$$E_*(U_{+p}M_{-1p}) = e^{i(Z+T)} \cdot Q^{-m} \cdot \left(X - iY\right)^m \times \\ \times M\left(a+m, 1+m; i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right) \cdot U\left(a, 1-m; -i2Q\right)).$$

При $\left|R_\perp\right| \to \infty$ функция

$$E_*(U_{+p}M_{-1p}) \to \left(R_\perp^{-2a-m} + R_\perp^{2a-2+m} e^{i\frac{R_\perp^2}{2Q}}\right).$$

Пусть $Z_0 > 0$. Тогда при $a' = -\dfrac{m}{2}$ $E \to const$, при $a' = \dfrac{1-m}{2}$ – квази-КИ. Однако, при $a' > \dfrac{1-m}{2}$ – строгая КИ для $E_*(U_{+p}M_{-1p})$.

В) Обсудим теперь пучки $T - K$

$$E(\tilde{U}_+M_-) = e^{i(T-R)} \cdot \left(X + iY\right)^m \times \\ \times U\left(m+1-a, m+1; i(R+Q)\right) \cdot M\left(a, m+1; i(R-Q)\right).$$

Здесь необходимо $Z > 0$. Тогда, при $\left|R_\perp\right| >> 1$ амплитуда волнового поля

$$E(\tilde{U}_+M_-) \to R_\perp^{a-1} M\left(a, m+1; iR_\perp\right).$$

Исследуем условия КИ таких пучков. При $a = m + 1 + n < -n$ нет КИ. В общем случае, при $\left|R_\perp\right| >> 1$, $E(\tilde{U}_+M_-) \to R_\perp^{-1} + R_\perp^{2a-2-m}$. При $a' \leq (m+1)/2$ $\left|E\right| \to R_\perp^{-1}$ – квази-КИ. Если $a' = (m+2)/2$, то $E \to const$. При $a = -n$ снова $\left|E\right| \to R_\perp^{-1}$, но это условие входит в условие $a' \leq (m+1)/2$.

В параксиальной аппроксимации (при $Z >> 1$) функция

$$E(\tilde{U}_{+p}M_{-p}) = e^{i(T-Q)} \cdot \left(X + iY\right)^m \times \\ \times U\left(m+1-a, m+1; i2Q\right) \cdot M\left(m+1-a, m+1; -i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)$$

и при $\left|R_\perp\right| >> 1$

$$E(\tilde{U}_{+p}M_{-p}) \to R_\perp^m \cdot M\left(m+1-a, m+1; -i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

Исследуем условия КИ.

1. При $m + 1 - a = -n$ $E \to R_\perp^{m+2n}$ и нет КИ.

2. При $(a = -n \cap m \geq 0 \cap Z_0 < 0)$ выполняются условия КИ.

3. Общий случай. Разлагаем M в ряд. Получаем при $\left|R_\perp\right| >> 1$, что

$$E(\tilde{U}_{+p}M_{-p}) \to \left(R_\perp^{-m-2+2a} + R_\perp^{-2a+m} \exp\left(-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\right).$$

КИ может быть лишь при $Z_0 < 0$. Анализ показывает, что при $a' = (m+2)/2$ $E \to const$ и нет КИ; при $a' = (m+1)/2$ $E \to R_\perp^{-1}$ и квази-КИ; при $a' < (m+1)/2$ – строго КИ.

Г) Рассмотрим теперь пучки $T - K$

$$E(M_{-1}\tilde{U}_+) = e^{i(T-Q)} \cdot \left(X + iY\right)^m \cdot \left(R - Q\right)^{-m} \times \\ \times M\left(1-a, 1-m; -i(R-Q)\right) \cdot U\left(m+1-a, m+1; i(R+Q)\right).$$

Существует неопределенность в последнем выражении, при $X = Y = 0$. Заменяя здесь $m \to (-m)$ и преобразуя, устраняем неопределенность и получаем непараксиальные пучки $T - K$

$$E_*(M_{-1}\tilde{U}_+) = e^{i(T-Q)} \cdot \left(X - iY\right)^m \cdot \left(R + Q\right)^{-m} \times \\ \times M\left(1-a, 1+m, -i(R-Q)\right) \cdot U\left(-m+1-a, -m+1; i(R+Q)\right).$$

Амплитуда поля при $\left|R_\perp\right| >> 1$

$$E_*(\tilde{U}_+M_{-1}) \to R_\perp^{m-1+a} M\left(1-a, 1+m; -iR_\perp\right).$$

Исследуем условия КИ пучков $E_*(M_{-1}\tilde{U}_+)$.

1. При $1 - a = -n$ $E \to R_\perp^{m+2n}$. Условий КИ нет.

2. $E_*(\tilde{U}_+M_{-1}) \to R_\perp^{m-1+a} \cdot M\left(a+m, 1+m; -iR_\perp\right)$.

Если $a + m = -n$, то $E \to R_\perp^{-1}$ – квази-КИ.

3. Общий случай. При $\left|R_\perp\right| >> 1$

$$E_*(\tilde{U}_+M_-) \to (R_\perp^{m+n-2+a} + R_\perp^{-1+n-a})$$

и нет строгой КИ. Тогда при $a' = (2-m)/2$ $E \to const$ и нет КИ; при $a' \leq (1-m)/2$ $E \to R_\perp^{-1}$ и квази-КИ.

Рассмотрим параксиальное приближение для пучков $E_*(M_{-1p}\tilde{U}_{+p})$. Получаем

$$E_*(M_{-1p}\tilde{U}_{+p}) = e^{i(T-Q)} \times \\ \times\left(X - iY\right)^m Q^{-m} M\left(1-a, 1+m, -i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\times \\ \times U\left(-m+1-a, -m+1; i2Q\right).$$

Исследуем условия КИ. При $|R_\perp| >> 1$

$$E_*(M_{-1p}\tilde{U}_{+p}) \to R_\perp^m \cdot M\left(1-a, 1+m, -i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

Разлагая M в ряд, при $|R_\perp| >> 1$ получаем, что

$$E_*(\tilde{U}_{+p}M_{-1p}) \to \left(\frac{R_\perp^{2a-2+m}}{\Gamma(m+a)} + \frac{R_\perp^{-2a-m}}{\Gamma(1-a)}\exp\left(-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\right).$$

Необходимое условие КИ – $Z_0 < 0$. Тогда при $a' > (2-m)/2$ $|E| \to \infty$; при $a' = (2-m)/2$ $E \to const$ и нет КИ; при $a' = (1-m)/2$ $E \to R_\perp^{-1}$ и квази-КИ; при $a' < (1-m)/2$ строгая КИ и переносимая мощность $W \to const$.

Заключение

В данной работе проанализированы выражения, описывающие дополнительные типы 3D световых пучков $K-K$ и новых типов пучков $T-K$ с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Частными случаями введенных здесь пучков являются соответствующие пучки с дискретным целочисленным индексом m.

Установлено, что для непараксиальных пучков $K-K$ и $T-K$ путем подбора свободных параметров можно добиться только квази-КИ. Показано, что непараксиальные пучки $T-K$ физически реализуемы только в области полупространства $Z > 0$ или при $Z > 0$.

В то же время для параксиальных версий рассматриваемых пучков существуют несколько возможностей для строгой КИ. Существенно также, что здесь для КИ не требуется гауссова аподизация пучков.

Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям a сильно расширяет класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргель*, *С.С.* Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 13–16.

2. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.

3. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.

4. *Гиргель*, *С.С.* Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 4–7.

5. *Гиргель*, *С.С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

6. *Гиргель*, *С.С.* Оптические пучки Вебера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 1–5.

7. *Гиргель*, *С.С.* Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. I. 3D световые пучки Куммера-Куммера с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 13–17.

8. *Изместьев*, *А.А.* Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве / А.А. Изместьев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1970. – Т. XIII, № 9. – С. 1380–1388.

9. *Three-dimensional nonparaxial beams in parabolic rotational coordinates* / Dongmei Deng [et al.] // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38, № 19. – P. 3934–3936.

10. *Ковалёв*, *А.А.* Лазерные пучки Ханкеля-Бесселя / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 297–304.

11. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

12. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

13. *Pinney*, *E.* Laguerre function in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector / E. Pinney // Math. Fnd Physics. – 1946. – Vol. 25. – P. 49–79.

Поступила в редакцию 25.06.2020.