

УДК 512.542

О МИНИМАЛЬНЫХ  $\sigma$ -ЛОКАЛЬНЫХ НЕ  $\mathfrak{H}$ -ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, Минск

ON MINIMAL  $\sigma$ -LOCAL NON- $\mathfrak{H}$ -FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova

Belarusian State University, Minsk

Изучаются критические  $\sigma$ -локальные формации конечных групп, где  $\sigma$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ . Получен критерий для критических  $\sigma$ -локальных формаций. Дано описание критических  $\sigma$ -локальных формаций для формаций всех  $\Pi$ -групп, всех  $\sigma$ -разрешимых  $\Pi$ -групп, где  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ , а также получено описание минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\sigma$ -разрешимых формаций конечных групп.

**Ключевые слова:** конечная группа, формационная  $\sigma$ -функция,  $\sigma$ -локальная формация, локальная формация, критическая  $\sigma$ -локальная формация,  $\sigma$ -разрешимая группа.

The critical  $\sigma$ -local formations of finite groups are studied, where  $\sigma$  is some partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$ . A criterion is obtained for critical  $\sigma$ -local formations. A description of critical  $\sigma$ -local formations is given for formations of all  $\Pi$ -groups, all  $\sigma$ -soluble  $\Pi$ -groups, where  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ , and a description of minimal  $\sigma$ -local non- $\sigma$ -soluble formations of finite groups is obtained.

**Keywords:** finite group, formation  $\sigma$ -function,  $\sigma$ -local formation, local formation, critical  $\sigma$ -local formation,  $\sigma$ -soluble group.

**Введение**

При изучении внутреннего структурного строения локальных формаций и их классификации важную роль играют минимальные локальные не  $\mathfrak{H}$ -формации [1] или  $\mathfrak{H}_l$ -критические формации [2], т. е. такие локальные формации  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ .

Задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым [1]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ 1980–1993 гг. и завершилось построением теории критических локальных формаций, наиболее общим результатом которой стало описание минимальных локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций для случая, когда  $\mathfrak{H}$  – произвольная формация классического типа [3], т. е. формация имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны. Результаты теории минимальных локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций широко использовались в вопросах классификации локальных формаций, а также при изучении несократимых факторизаций ограниченных локальных формаций [4]–[5].

В дальнейшем критические формации изучались для различных типов формаций конечных групп. В частности, в работах [6]–[20] разработана теория критических  $\omega$ -локальных формаций. Ряд приложений теории минимальных  $\omega$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций получен при изучении

внутреннего строения  $\omega$ -локальных формаций, имеющих заданную структуру подформаций, а также при изучении свойств полугруппы  $\omega$ -локальных формаций, см., например, [21]–[23].

Разработка методов обобщенно локальных или  $\sigma$ -локальных формаций приводит к необходимости изучения и классификации критических  $\sigma$ -локальных формаций. При этом, следуя [1]–[2], минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией или  $\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией мы называем  $\sigma$ -локальную формацию  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , все собственные  $\sigma$ -локальные подформации которой содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ .

В данной работе получен критерий для минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций. Дано описание минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций для таких  $\sigma$ -локальных классов конечных групп  $\mathfrak{H}$ , как формация всех  $\Pi$ -групп, формация всех  $\sigma$ -разрешимых  $\Pi$ -групп, где  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . В частности, получено описание минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\sigma$ -разрешимых формаций конечных групп.

Для классического случая, когда  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$  в качестве следствий полученных результатов приведено описание минимальных локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций, где  $\mathfrak{H}$  – формация всех  $\pi$ -групп, формация всех разрешимых  $\pi$ -групп, где  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ , формация всех разрешимых групп.

**1 Обозначения и определения**

Основные определения, обозначения и общие свойства  $\sigma$ -локальных формаций представлены в работах [24]–[30]. Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ . Если  $n$  целое число, то  $\sigma(n)$  обозначает множество  $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ;  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ . Группа  $G$  называется [24]:  $\sigma$ -примарной, если  $G$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ ;  $\sigma$ -нильпотентной, если каждый главный фактор  $H/K$  группы  $G$  является  $\sigma$ -центральный в  $G$ , то есть полупрямое произведение  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$  является  $\sigma$ -примарным;  $\sigma$ -разрешимой, если  $G=1$  или  $G \neq 1$  и каждый главный фактор  $G$  является  $\sigma$ -примарным. Класс всех  $\sigma$ -разрешимых групп обозначают через  $\mathfrak{S}_\sigma$ , а через  $\mathfrak{N}_\sigma$  обозначают класс всех  $\sigma$ -нильпотентных групп.

Пусть  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . Тогда  $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$ . Группы  $G$  называют  $\Pi$ -группой, если  $\sigma(G) \subseteq \Pi$ . Через  $\mathfrak{G}_\Pi$  обозначают класс всех  $\Pi$ -групп, а через  $\mathfrak{S}_\Pi$  обозначают класс всех  $\sigma$ -разрешимых  $\Pi$ -групп. В частности, если  $\Pi = \{\sigma_i\}$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  – класс всех  $\sigma_i$ -групп,  $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$  – класс всех  $\sigma_i'$ -групп, соответственно,  $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$  – класс всех  $\sigma$ -разрешимых  $\sigma_i$ -групп,  $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$  – класс всех  $\sigma$ -разрешимых  $\sigma_i'$ -групп.

Функция  $f$  вида  $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  называется формационной  $\sigma$ -функцией. Для всякой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  класс  $LF_\sigma(f)$  определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i, \sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Мы также используем символ  $F_{\{\sigma_i\}}(G)$  вместо  $O_{\sigma_i, \sigma_i'}(G)$ . Если для некоторой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  имеет место  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , то говорят, что формация  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -локальной, а  $f$  является  $\sigma$ -локальным определением формации  $\mathfrak{F}$ .

Если  $f$  является формационной  $\sigma$ -функцией, то символ  $\text{Supp}(f)$  обозначает носитель  $f$ , то есть, множество всех  $\sigma_i$  таких, что  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ . Формационную  $\sigma$ -функцию  $f$  называют: внутренней, если  $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$  для всех  $i$ ; полной, если  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$  для всех  $i$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторая совокупность групп. Через  $l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X})$  обозначают пересечение всех  $\sigma$ -локальных формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ , и называют  $\sigma$ -локальной формацией, порожденной совокупностью групп  $\mathfrak{X}$ . Если  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$  для некоторой группы  $G$ , то  $\mathfrak{F}$  называют

однопорожденной  $\sigma$ -локальной формацией. Для всякого класса групп  $\mathfrak{F}$  также полагают

$$\mathfrak{F}(\sigma_i) = (G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

Пусть  $\mathfrak{H}$  – некоторый класс групп. Формацию  $\mathfrak{F}$  называют минимальной не  $\mathfrak{F}$ -формацией или  $\mathfrak{F}$ -критической формацией, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но все собственные подформации из  $\mathfrak{F}$  содержатся в  $\mathfrak{H}$ . Следуя [1]–[2]  $\sigma$ -локальную формацию  $\mathfrak{F}$  будем называть минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией или  $\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но все ее собственные  $\sigma$ -локальные подформации содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ .

**2 Вспомогательные результаты**

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Лемма 2.1 является частным случаем леммы 2.6 [28].

**Лемма 2.1** [28]. Пусть

$$\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$$

–  $\sigma$ -локальная формация порожденная  $\mathfrak{X}$  и  $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$ . Пусть  $t$  – формационная  $\sigma$ -функция, такая что  $t(\sigma_i) = \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $t(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Тогда:

- (1)  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ ,
- (2)  $t$  является  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$ ,
- (3)  $t(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  для всех  $i$ .

Отметим, что  $\sigma$ -локальное определение  $t$  формации  $\mathfrak{F}$  из леммы 2.1 называют наименьшим  $\sigma$ -локальным определением формации  $\mathfrak{F}$ .

**Лемма 2.2** [28]. Пусть  $f$  и  $h$  – формационные  $\sigma$ -функции и пусть  $\Pi = \text{Supp}(f)$ . Допустим, что  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$ . Тогда:

- (1)  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ ;
- (2)  $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}$  является насыщенной формацией.
- (3) Если каждая группа из  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -разрешимой, то  $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$ .
- (4) Если  $\sigma_i \in \Pi$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$ .
- (5)  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ , где  $F$  – единственная формационная  $\sigma$ -функция, такая что  $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $F(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Более того,  $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$  для всех  $i$ .

**Лемма 2.3** [4, с. 167.]. Пусть  $A$  – монолитическая группа с монолитом  $P$ . Тогда если  $P \not\subseteq \Phi(A)$ , то  $\text{form}(A/P)$  – единственная максимальная подформация формации  $\text{form}(A)$ .

### 3 Основной результат

Следуя [31], на множестве всех формационных  $\sigma$ -функций определим частичный порядок " $\leq$ " следующим образом: если  $f_1$  и  $f_2$  – формационные  $\sigma$ -функции, то  $f_1 \leq f_2$ , если  $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$  для любого  $\sigma_i \in \sigma$ .

Прежде чем мы докажем теорему 3.1 установим справедливость следующих лемм.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$ , где  $f_j$  – наименьшее  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}_j$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда в том и только в том случае  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ , когда  $f_1 \leq f_2$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$  и  $G \in \mathfrak{F}_1$ . Тогда  $G \in \mathfrak{F}_2$ . Значит, в силу леммы 2.1 и включения  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_1)$  имеет место

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_i) &= \text{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq \\ &\subseteq \text{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\sigma_i). \end{aligned}$$

Так как для любого  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F}_1)$  ввиду леммы 2.1  $f_1(\sigma_i) = \emptyset$ , то  $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ . Следовательно,  $f_1 \leq f_2$ .

*Достаточность.* Пусть имеет место  $f_1 \leq f_2$ . Тогда справедливо включение  $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$  для всех  $i$ . Пусть  $G \in \mathfrak{F}_1$ . Применяя лемму 2.1 с учетом  $f_1 \leq f_2$ , получим

$$G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$$

для любого  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Но тогда  $G \in \mathfrak{F}_2$ . Поэтому  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ .  $\square$

**Лемма 3.2.** Если  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$  и

$$G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$$

для некоторого  $\sigma_i \in \sigma(G)$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ .

*Доказательство.* Поскольку

$$G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F},$$

то  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ . Но тогда  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  по лемме 2.2 (1). Кроме того,  $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  влечет также, что  $G^{f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}} \subseteq O_{\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ . Ввиду леммы 2.2 (4) получаем  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$ .  $\square$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$ ,  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , где  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$ ,  $f$  – минимальное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form} G$ , где  $G$  – такая группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$  с монолитом

$P = G^\mathfrak{H}$ , что для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$  формация  $f(\sigma_i)$  является  $(H(\sigma_i))$ -критической.

*Доказательство. Необходимость.* Обозначим через  $G$  – группу минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^\mathfrak{H}$ . Ясно, что  $l_\sigma \text{form} G \subseteq \mathfrak{F}$ . Поскольку при этом все собственные  $\sigma$ -локальные подформации из  $\mathfrak{F}$  содержатся в  $\mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form} G$ .

Пусть  $\sigma_i \in \sigma(P)$ . Предположим, что  $f(\sigma_i) = (1)$ . Тогда в силу леммы 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)) = (1).$$

Поэтому  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = G$ . Значит,  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ .

Так как  $G$  – монолитическая группа и  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , то  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ , т. е.  $G$  является  $\sigma_i$ -группой.

Поскольку при этом  $G \notin \mathfrak{H}$ , то  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$  и  $H(\sigma_i) = \emptyset$  ввиду леммы 2.2 (5). Но тогда  $f(\sigma_i) = (1)$  –  $(H(\sigma_i))$ -критическая формация.

Пусть теперь  $f(\sigma_i) \neq (1)$ . По лемме 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)).$$

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная собственная подформация из  $f(\sigma_i)$ . Допустим, что  $\mathfrak{X} \not\subseteq H(\sigma_i)$  и обозначим через  $K$  группу минимального порядка из  $\mathfrak{X} \setminus H(\sigma_i)$ . Тогда  $K$  – монолитическая группа с монолитом  $K^{H(\sigma_i)}$ . Поскольку  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$ , то  $O_{\sigma_i}(K) = 1$ .

Пусть  $S$  – некоторая  $\sigma_i$ -группа,  $M = S \wr K = T \rtimes K$  – регулярное сплетение групп  $S$  и  $K$ , где  $T$  – база сплетения  $M$ . Тогда  $O_{\sigma_i}(M) = 1$  и  $F_{\{\sigma_i\}}(M) = O_{\sigma_i}(M) = T(O_{\sigma_i}(M) \cap K) = T$ , так как  $O_{\sigma_i}(K) = 1$ . Поскольку  $K \in \mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$ , то  $M = T \rtimes K \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ . Но в силу леммы 2.2 (4) имеет место включение  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ . Поэтому  $l_\sigma \text{form} M \subseteq \mathfrak{F}$ .

Допустим, что  $l_\sigma \text{form} M = \mathfrak{F}$ . Тогда по лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} f(\sigma_i) &= \text{form}(M / F_{\{\sigma_i\}}(M)) = \\ &= \text{form}(M / T) = \text{form} K \subseteq \mathfrak{X} \subset f(\sigma_i). \end{aligned}$$

Противоречие. Следовательно,  $l_\sigma \text{form} M \subset \mathfrak{F}$ . Значит,  $l_\sigma \text{form} M \subseteq \mathfrak{H}$ . Но тогда по лемме 2.1 (3) имеем  $M / F_{\{\sigma_i\}}(M) \simeq K \in H(\sigma_i)$ . Снова получили противоречие. Поэтому  $\mathfrak{X} \subseteq H(\sigma_i)$ . Таким образом, всякая собственная подформация из  $f(\sigma_i)$  содержится в  $H(\sigma_i)$ . Предположим, что  $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$ .

Рассмотрим прежде случай, когда  $P$  является  $\sigma$ -примарной группой. Тогда поскольку  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , то  $P - \sigma_i$ -группа. Значит,  $O_{\sigma_i}(G) = 1$  и  $O_{\sigma_i}(G) = F_{\{\sigma_i\}}(G)$ . По лемме 2.1 имеем

$$G/O_{\sigma_i}(G) = G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i).$$

Так как по предположению  $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$ , то  $G/O_{\sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$ . Но тогда  $G \in \mathfrak{H}$  в силу леммы

3.2. Последнее противоречит выбору группы  $G$ .

Значит,  $P$  не является  $\sigma$ -примарной группой. Поскольку при этом  $P -$  единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  и  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , то  $O_{\sigma_i}(G) = 1$  и  $O_{\sigma_i'}(G) = 1$ . Значит,  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$ . Применяя теперь лемму 2.1 имеем

$$G \simeq G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что  $f(\sigma_i) \not\subseteq H(\sigma_i)$ . Таким образом,  $f(\sigma_i)$  является  $(H(\sigma_i))$ -критической формацией.

*Достаточность.* Пусть выполняются условия теоремы. Понятно, что  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ . Пусть  $\mathcal{L} -$  произвольная собственная  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$ ,  $l -$  минимальное  $\sigma$ -локальное определение  $\mathcal{L}$ . Пусть  $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$ . Тогда  $P \subseteq F_{\{\sigma_i\}}(G)$  и  $F_{\{\sigma_i\}}(G)/P = F_{\{\sigma_i\}}(G/P)$ . Поскольку  $P = G^\sigma$ , то

$$\begin{aligned} G/F_{\{\sigma_i\}}(G) &\simeq (G/P)/(F_{\{\sigma_i\}}(G)/P) = \\ &= (G/P)/F_{\{\sigma_i\}}(G/P) \in H(\sigma_i). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(\sigma_i) &\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \\ &= \mathfrak{G}_{\sigma_i} \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G)) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i) = H(\sigma_i). \end{aligned}$$

Также ввиду леммы 3.1 имеет место включение  $l(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ . Следовательно,  $l(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$ . Пусть  $\sigma_i \in \sigma(P)$ . Допустим, что  $l(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ . Если при этом  $P - \sigma_i$ -группа, то  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$  и поскольку

$$G/O_{\sigma_i}(G) = G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) = l(\sigma_i) \subseteq \mathcal{L},$$

то  $G \in \mathcal{L}$  по лемме 3.2. Но тогда имеет место включение  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form} G \subseteq \mathcal{L} \subset \mathfrak{F}$ . Противоречие. Поэтому  $P$  не является  $\sigma$ -примарной группой. Так как  $P -$  единственная минимальная нормальная подгруппа  $G$ , то  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$ . Но тогда

$$G \simeq G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) = l(\sigma_i) \subseteq \mathcal{L}.$$

Снова получаем, что  $G \in \mathcal{L}$ , что невозможно. Таким образом,  $l(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$ . Поскольку по условию формация  $f(\sigma_i)$  является  $(H(\sigma_i))$ -критической, то  $l(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$ . В силу леммы 2.1 (1) имеет место равенство  $\sigma(G) = \sigma(\mathfrak{F})$ .

Следовательно,  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{H}$ . Но тогда  $\mathfrak{F} - \mathfrak{H}_\sigma$ -критическая формация.  $\square$

В классическом случае, когда  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$  получаем следующий известный результат.

**Следствие 3.1** [4, с. 169.]. Пусть  $\mathfrak{H} = LF(H)$ ,  $\mathfrak{F} = LF(f)$ , где  $H -$  канонический локальный экран формации  $\mathfrak{H}$ ,  $f -$  минимальный локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = \text{lform} G$ , где  $G -$  такая группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$  с монолитом  $P = G^\sigma$ , что для всех  $p \in \pi(P)$  формация  $f(p)$  является  $(H(p))$ -критической.

#### 4 Минимальные $\sigma$ -локальные не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формации

Напомним, что если  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ , то через  $\mathfrak{G}_\Pi$  обозначают формацию всех  $\Pi$ -групп. Ввиду замечания 2.4 [28] формация  $\mathfrak{G}_\Pi$  является totally  $\sigma$ -локальной.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathfrak{F} - \sigma$ -локальная формация,  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$ , где  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{G}_\Pi$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma \text{form}(G)$ , где  $G -$  простая  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \notin \Pi$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $\mathfrak{F} -$  минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{G}_\Pi$ -формация. Выберем в  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}_\Pi$  группу  $G$  минимального порядка. Тогда  $G -$  монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{G}_\Pi}$ . Поскольку  $l_\sigma \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$  и любая собственная  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$  содержится в  $\mathfrak{G}_\Pi$ , то  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ . Покажем, что группа  $G$  удовлетворяет условию теоремы.

Пусть  $f -$  наименьшее  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$  и  $H -$  каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{G}_\Pi$ . Ввиду теоремы 3.1 для всех  $\sigma_i \in \sigma(R)$  формация  $f(\sigma_i)$  является  $(H(\sigma_i))$ -критической. По лемме 2.1 имеем  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(G)$  и  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(G)$ . Ввиду замечания 2.4 [28]  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $H(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ .

Допустим, что  $R - \sigma$ -примарная группа и пусть  $\sigma_i \in \sigma(R)$ . Тогда  $R - \sigma_i$ -группа. Рассмотрим прежде случай, когда  $\sigma_i \notin \Pi$ . Тогда поскольку  $R -$  единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $O_{\sigma_i}(G) = 1$ .

Следовательно,  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ . Ввиду того, что  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$  – минимальная не  $H(\sigma_i)$ -формация и  $H(\sigma_i) = \emptyset$ , то

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G)) = (1).$$

Значит,  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$  и  $G = F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ . Таким образом,  $G - \sigma_i$ -группа,  $\sigma_i \notin \Pi$ . Поскольку  $G/R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$ , и при этом  $G - \Pi'$ -группа, то  $G = R$ . Но  $G$  – монолитическая группа. Следовательно,  $G = R$  – простая  $\sigma_i$ -группа, где  $\sigma_i \notin \Pi$ . Поскольку  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  – наследственная формация, то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ . Значит, в силу леммы 2.2 (4) имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Поэтому  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Таким образом, группа  $G$  удовлетворяет условию теоремы.

Допустим теперь, что  $\sigma_i \in \Pi$ . Тогда  $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и  $G/R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$ . Следовательно,  $G^{\mathfrak{G}_{\Pi}} \subseteq R$  и  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\Pi} = \mathfrak{G}_{\Pi}$ . Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь  $R$  не является  $\sigma$ -примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы  $G$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$  имеет место  $O_{\sigma_i}(G) = 1$  и  $O_{\sigma_i}(G) = 1$ . Поэтому  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$ .

Допустим, что найдется  $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$ . Тогда поскольку

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G)) = \text{form}(G)$$

– минимальная не  $H(\sigma_i)$ -формация и  $H(\sigma_i) = \emptyset$ , мы имеем  $\text{form}(G) = (1)$ . Последнее влечет  $G \simeq 1 \in \mathfrak{G}_{\Pi}$ . Противоречие. Поэтому  $\sigma(R) \subseteq \Pi$ . Но тогда  $R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$  и, кроме того,  $G/R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{G}_{\Pi} \mathfrak{G}_{\Pi} = \mathfrak{G}_{\Pi}$ . Противоречие. Поэтому данный случай также невозможен.

**Достаточность.** Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_{\sigma} \text{form}(G)$ , где группа  $G$  удовлетворяет условию теоремы. Тогда поскольку  $\sigma_i \notin \Pi$ , то  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\Pi}$ . Поскольку в силу примера 1.2 (ii) [28] для формации всех единичных групп имеет место  $(1) = LF_{\sigma}(f)$ , где  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $i$ , а также ввиду примера 1.2 (iii) [28] для формации всех  $\sigma_i$ -групп имеет место  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_{\sigma}(f)$ , где  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и  $f(\sigma_j) = \emptyset$  для всех  $j \neq i$ , то формация  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  имеет единственную  $\sigma$ -локальную подформацию (1). Так как  $(1) \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi}$ , то  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{G}_{\Pi}$ -формация.  $\square$

В частности, если  $\Pi = \{\sigma_i\}$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_{\sigma_i}$  и из теоремы 4.1 вытекает

**Следствие 4.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальная формация,  $\sigma_i \in \sigma$  и  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_j} = l_{\sigma} \text{form}(G)$ , где  $G$  – простая  $\sigma_j$ -группа для некоторого  $j \neq i$ .

В классическом случае, когда  $\sigma = \sigma^1$  из теоремы 4.1 получаем

**Следствие 4.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация,  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\pi}$ , где  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной локальной не  $\mathfrak{G}_{\pi}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p = l \text{form}(G)$ , где  $G$  – группа простого порядка  $p$  для некоторого  $p \notin \pi$ .

### 5 Минимальные $\sigma$ -локальные не $\mathfrak{G}_{\Pi}$ -формации

Пусть  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . Формация всех  $\sigma$ -разрешимых  $\Pi$ -групп обозначается через  $\mathfrak{G}_{\Pi}$ . Ввиду замечания 2.4 [28]  $\mathfrak{G}_{\Pi}$  является тотальной  $\sigma$ -локальной формацией.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальная формация,  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\Pi}$ , где  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{G}_{\Pi}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{G}_{\Pi}}$ , что выполняется одно из следующих условий:

(1)  $G = R$  – простая  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \notin \Pi$ ;

(2)  $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ ,  $R$  – не  $\sigma$ -примарная

$\Pi$ -группа и  $G/R$  –  $\sigma$ -разрешимая  $\Pi$ -группа.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{G}_{\Pi}$ -формация. Выберем в  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}_{\Pi}$  группу  $G$  минимального порядка. Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{G}_{\Pi}}$ . Поскольку  $l_{\sigma} \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$  и любая собственная  $\sigma$ -локальная подформация из  $\mathfrak{F}$  содержится в  $\mathfrak{G}_{\Pi}$ , то  $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G)$ . Покажем, что группа  $G$  удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть  $f$  – наименьшее  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$  и  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{G}_{\Pi}$ . Ввиду теоремы 3.1 для всех  $\sigma_i \in \sigma(R)$  формация  $f(\sigma_i)$  является  $(H(\sigma_i))$ -критической. По лемме 2.1 имеем  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(G)$  и  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(G)$ . Ввиду

замечания 2.4 [28] имеем  $H(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\Pi$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $H(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ .

Допустим, что  $R$  –  $\sigma$ -примарная группа и пусть  $\sigma_i \in \sigma(R)$ . Тогда  $R$  –  $\sigma_i$ -группа. Рассмотрим прежде случай, когда  $\sigma_i \notin \Pi$ . Тогда поскольку  $R$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $O_{\sigma_i}(G) = 1$ . Следовательно,  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ . Ввиду того, что  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$  – минимальная не  $H(\sigma_i)$ -формация и  $H(\sigma_i) = \emptyset$ , то  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G)) = (1)$ . Значит,  $G = F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ . Таким образом,  $G$  –  $\sigma_i$ -группа,  $\sigma_i \notin \Pi$ . Поскольку  $G/R \in \mathfrak{S}_\Pi$ , и при этом  $G$  –  $\Pi'$ -группа, то  $G = R$ . Но  $G$  – монолитическая группа. Следовательно,  $G = R$  – простая  $\sigma_i$ -группа, где  $\sigma_i \notin \Pi$ . Таким образом, группа  $G$  удовлетворяет условию 1) теоремы.

Допустим теперь, что  $\sigma_i \in \Pi$ . Тогда  $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и  $G/R \in \mathfrak{S}_\Pi$ . Следовательно,  $G^{\mathfrak{S}_\Pi} \subseteq R$  и  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{S}_\Pi = \mathfrak{S}_\Pi$ . Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь  $R$  не является  $\sigma$ -примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы  $G$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$  имеет место  $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i'}(G) = 1$ . Поэтому  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$ .

Допустим, что найдется  $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$ . Тогда поскольку  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G)) = \text{form}(G)$  – минимальная не  $H(\sigma_i)$ -формация и  $H(\sigma_i) = \emptyset$ , мы имеем  $\text{form}(G) = (1)$ . Последнее влечет  $G = 1 \in \mathfrak{S}_\Pi$ . Противоречие. Поэтому  $\sigma(R) \subseteq \Pi$ .

Покажем также, что данный случай возможен, только если  $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ . Действительно, так как  $R$  монолит группы  $G$ , то  $R$  – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поэтому  $|\pi(R)| \geq 3$ . С другой стороны, поскольку  $R$  не является  $\sigma$ -примарной группой, то  $|\sigma(R)| \geq 2$ . Далее, если теперь  $\sigma_i \in \sigma(R)$ , то  $\sigma_i \cap \pi(R) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $\pi(R) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \sigma(R)} \sigma_i$  и  $|\cup_{\sigma_i \in \sigma(R)} \sigma_i| \geq 3$ . Кроме того, поскольку  $R$  –  $\Pi$ -группа, то  $\sigma(R) \subseteq \Pi$  и  $\cup_{\sigma_i \in \sigma(R)} \sigma_i \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$ . Поэтому,  $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ .

Таким образом, если  $R$  не является  $\sigma$ -примарной группой, то  $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$  –  $\Pi$ -группа, при этом  $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ . Следовательно, группа  $G$  удовлетворяет условию 2) теоремы.

*Достаточность.* Пусть  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$  и группа  $G$  удовлетворяет условию 1). Тогда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  – формация всех  $\sigma_i$ -групп и (1) – единственная  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Поскольку  $\sigma_i \notin \Pi$  и (1)  $\subseteq \mathfrak{S}_\Pi$ , то  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{S}_\Pi$ -формация.

Пусть теперь группа  $G$  удовлетворяет условию 2). Тогда поскольку  $R$  единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , то для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$  имеет место  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$ . В силу леммы 2.1 имеем  $f(\sigma_i) = \text{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G)) = \text{form}(G)$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$ . С другой стороны, так как  $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$  и по лемме 2.2 (2)  $\mathfrak{S}_\Pi$  – насыщенная формация, то  $R \not\subseteq \Phi(G)$ . Поэтому в силу леммы 2.3 формация  $\text{form}(G) = f(\sigma_i)$  имеет единственную максимальную подформацию  $\text{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{S}_\Pi$ . Поскольку при этом  $\mathfrak{S}_\Pi = H(\sigma_i)$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$ , то в силу теоремы 3.1 формация  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{S}_\Pi$ -формацией.  $\square$

В случае, когда  $\sigma = \sigma^1$  получаем следующий результат.

**Следствие 5.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация,  $\mathfrak{S}_\pi$  – формация всех разрешимых  $\pi$ -групп, где  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной локальной не  $\mathfrak{S}_\pi$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l\text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{S}_\pi}$ , что выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $G = R$  – группа простого порядка  $p$  для некоторого  $p \notin \pi$ ;
- (2)  $|\pi| \geq 3$ ,  $P$  – неабелева  $\pi$ -группа и  $G/P$  – разрешимая  $\pi$ -группа.

## 6 Минимальные $\sigma$ -локальные не $\sigma$ -разрешимые формации

Группа  $G$  называется  $\sigma$ -разрешимой, если каждый главный фактор группы  $G$  является  $\sigma$ -примарным. Класс всех  $\sigma$ -разрешимых групп  $\mathfrak{S}_\sigma$  является тотально  $\sigma$ -локальной формацией. При этом  $\mathfrak{S}_\sigma = LF_\sigma(f)$ , где  $f(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\sigma$  для всех  $i$ .

Важным следствием теоремы 5.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{S}_\sigma$ -формаций.

**Теорема 6.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальная формация,  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\sigma$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{S}_\sigma$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ , что  $P$  –

не  $\sigma$ -примарная группа и группа  $G/P$  –  $\sigma$ -разрешима.

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{S}_\sigma$ -формация. Тогда применяя теорему 5.1 получим  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ , что выполняется одно из следующих условий:

(1)  $G = R$  – простая  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \notin \Pi$ ;

(2)  $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ ,  $R$  – не  $\sigma$ -примарная  $\Pi$ -группа и  $G/R$  –  $\sigma$ -разрешимая  $\Pi$ -группа.

Поскольку  $\Pi = \sigma$ , то  $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ . Кроме того, понятно, что условие (1) не может иметь место, а в условии (2) требование  $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$  выполняется для любого разбиения  $\sigma$ .

Таким образом,  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ , что  $R$  – не  $\sigma$ -примарная группа и группа  $G/R$  –  $\sigma$ -разрешима.  $\square$

В случае, когда  $\sigma = \sigma^1$  мы получаем следующий известный результат.

**Следствие 6.1** [5, с. 87]. *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной локальной неразрешимой формацией, когда  $\mathfrak{F} = l \text{form}(G)$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с неабелевым монолитом  $P$ , что  $G/P$  – разрешимая группа.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюз. симпозиум по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.
2. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
3. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.
4. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989.
5. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Бел. наука, 1997.
6. Джарадин, Д. Минимальные  $p$ -насыщенные ненильпотентные формации / Д. Джарадин // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 59–64.
7. Сафонова, И.Н. О минимальных  $\omega$ -локальных несверхразрешимых формациях / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 123–130.
8. Сафонова, И.Н. О минимальных  $\omega$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формациях / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 23–27.

9. Сафонова, И.Н. К теории  $\mathfrak{H}_\omega$ -критических формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – 2001. – № 3 (17). – С. 124–133.

10. Селькин, В.М. Минимальные наследственные  $\omega$ -локальные не  $\mathfrak{H}$ -формации / В.М. Селькин // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 3. – С. 460–469.

11. Сафонова, И.Н. К теории критических  $\omega$ -насыщенных формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. – 2004. – № 11. – С. 9–14.

12. Сафонова, И.Н. К теории критических частично насыщенных формаций / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры-19. – 2004. – № 6 (27). – С. 82–87.

13. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории  $\omega$ -локальных формаций / В.М. Селькин // Известия Гомельского госуниверситета. – 2005. – № 5 (32). – С. 166–168.

14. Сафонова, И.Н. О критических частично насыщенных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 2. – С. 51–55.

15. Сафонова, И.Н. О минимальных  $\omega$ -насыщенных не  $\mathfrak{N}^n$ -формациях / И.Н. Сафонова // Известия Гомельского госуниверситета. – 2006. – № 5 (38). – С. 68–72.

16. Селькин, В.М. О минимальных  $\tau$ -замкнутых  $\omega$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формациях / В.М. Селькин // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 81–85.

17. Сафонова, И.Н. О минимальных  $\omega$ -насыщенных не  $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия 2. Математика. – 2010. – № 2 (96). – С. 67–71.

18. Селькин, В.М. О минимальных  $\tau$ -замкнутых  $\omega$ -локальных не  $\pi$ -разложимых формациях / В.М. Селькин // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2010. – Т. 2, № 56-1. – С. 14–20.

19. Sel'kin, V.M. On minimal  $\tau$ -closed  $\omega$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations / V.M. Sel'kin // Algebra Colloquium. – 2012. – Vol. 19, № 4. – С. 727–734.

20. Сафонов, В.Г. О минимальных тотально  $\omega$ -насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2014. – № 6 (84). – С. 9–15.

21. Сафонов, В.Г. О приводимых  $\omega$ -насыщенных формациях с разрешимым дефектом  $\leq 2$  / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5. – С. 162–165.

22. Селькин, В.М. Об одном применении теории критических формаций / В.М. Селькин // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2012. – № 1 (67). – С. 18–21.

- 
23. Сафонов, В.Г. О коммутативных подгруппах разрешимых totally  $\omega$ -насыщенных формаций / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 80–86.
24. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
25. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Probl. Phys. Math. Tech. – 2018. – № 34 (1). – P. 79–82.
26. Chi, Z. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Probl. Phys. Math. Tech. – 2018. – № 34 (2). – P. 85–88.
27. Chi, Z. On  $\Sigma_i^\sigma$ -closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – 2019. – Vol. 70 (2). – P. 1707–1716.
28. Chi, Z. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47 (3). – P. 957–968.
29. Tsarev, A. Laws of the lattices of  $\sigma$ -local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterr. J. Math. – 2020. – 17 (3):75.
30. Safonova, I.N. On some properties of the lattice of totally  $\sigma$ -local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Mathematics and Informatics. – 2020. – № 3. – P. 1–12.
31. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10.11.2020.